

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2022

Bc. Alexandra Crhová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Populační modely a jejich ekonomické aplikace
Diplomová práce

2022

Bc. Alexandra Crhová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Alexandra Crhová**
Osobní číslo: **E20657**
Studijní program: **N0413A050009 Ekonomika a management**
Specializace: **Ekonomika a management podniku**
Téma práce: **Populační modely a jejich ekonomické aplikace**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Matematicky formulovat populačních modely od jednoduchých, které popisují vývoj jedné populace, po složitější, které řeší koexistenci více konkurujících si druhů, a popsat možnosti aplikace těchto modelů v ekonomické teorii a praxi.

Osnova:

- Jednoduché dynamické populační modely.
- Modely koexistence dvou druhů.
- Možnosti využití dynamických populačních modelů v ekonomii.
- Příklad aplikace vybraného modelu v oblasti ekonomie.

Rozsah pracovní zprávy: **50**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- BACAËR, N. A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-0-85729-114-1
- GANDOLFO, G. Economic Dynamics: Study Edition. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-62760-X
- KALAS, Josef, POSPÍŠIL, Zdeněk. Spojité modely v biologii. 1.vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2626-X
- SMÍTALOVÁ, Kristína a Štefan ŠUJAN. *Dynamické modely biologických spoločenstiev*. Bratislava: Veda, 1989. ISBN 80-224-0033-5
- TU, Pierre N. V. *Introductory Optimization Dynamics: Optimal Control with Econ. and Management Applications*. 2nd, Rev. and Enl. Ed. Berlin: Springer, 1991. ISBN 0-387-54462-3.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2021**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2022**

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

Ing. Michaela Kotková Stříteská, Ph.D. v.r.
vedoucí ústavu

Prohlašuji:

Práci s názvem Populační modely a jejich ekonomické aplikace jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne

Bc. Alexandra Crhová

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D. za jeho trpělivost, odborné a cenné rady, čas a připomínky, které mi velmi pomohly při zpracování mé diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu během celého mého studia.

ANOTACE

Cílem práce je matematicky formulovat populačních modely od jednoduchých, které popisují vývoj jedné populace, po složitější, které řeší koexistenci více konkurujících si druhů, a popsat možnosti aplikace těchto modelů v ekonomické teorii a praxi.

KLÍČOVÁ SLOVA

populace, populační modely, ekonomická aplikace, konkurence

TITLE

Population models and their economic applications

ANNOTATION

The goal of the work is to mathematically formulate population models, from simple ones that describe the development of one population to more that deal with the coexistence of competing species, and to describe the possibilities of applying these models in economic theory and practice.

KEYWORDS

population, population models, economic application, competition

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK.....	9
ÚVOD.....	10
1 ZÁKLADNÍ TEORIE.....	12
1.1 Tvorba matematického modelu.....	12
1.2 Diferenciální rovnice 1. řádu.....	13
1.3 Autonomní systémy	14
1.3.1 Autonomní systém na přímce	15
1.3.2 Autonomní systémy v rovině.....	15
1.3.3 Stacionární body lineárních systémů v rovině.....	16
1.4 Stabilita	17
2 JEDNODUCHÉ DYNAMICKÉ POPULAČNÍ MODELY	18
2.1 Růstové modely.....	18
2.2 Model růstu populace živých organismů	18
2.3 Model rovnováhy počtu druhů na ostrově / Macarturův model.....	20
2.4 Obecný logistický růst populace	22
2.5 Dynamika klimaxové populace.....	23
2.6 Dynamika populace pod predáčním tlakem.....	24
3 MODELY KOEXISTENCE DVOU DRUHŮ	27
3.1 Model konkurence mezi dvěma biologickými druhy.....	28
3.2 Model symbiózy dvou druhů	31
3.3 Klasický Lotkův-Volterrův model dravec-kořist.....	33
3.4 Model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti.....	35
3.5 Model dravec-kořist Gauseho typu	38
3.6 Koexistence dvou konkurujících si populací zprostředkovaná dravcem	40
3.7 Modely chování – vývoj vzorců chování	42
3.7.1 Obecný model soupeření	42

3.7.2	Model soupeření „jestřábů“ a „holubic“	46
4	MOŽNOSTI VYUŽITÍ DYNAMICKÝCH POPULAČNÍCH MODELŮ V EKONOMII	48
4.1	Využití modelu růstu populace živých organismů.....	48
4.2	Využití modelu konkurence dvou druhů.....	51
4.3	Využití modelu symbiózy dvou druhů.....	54
4.4	Využití modelu společenstva dravec-kořist	58
5	PŘÍKLAD APLIKACE VYBRANÉHO MODELU V OBLASTI EKONOMIE.....	63
	ZÁVĚR.....	69
	POUŽITÁ LITERATURA	72

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Obrázek 1 – Obecný logistický růst populace	23
Obrázek 2 – Dynamika klimaxové populace.....	24
Obrázek 3 – Model slabé konkurence.....	30
Obrázek 4 - Model symbiózy dvou druhů	33
Obrázek 5 - Klasický Lotka-Volter model dravec a kořist – různé počáteční hodnoty	35
Obrázek 6 - Model s vnitrodruhovou konkurencí kořisti – vyhynutí dravce, $\varepsilon_2 = 2,2$	36
Obrázek 7 - Stacionární bod je ohnisko, v tomto případě $-\varepsilon_2 = 1$	37
Obrázek 8 - Využití modelu symbiózy	58
Tabulka 1 - Míra inflace a průměrné reálné mzdy.....	59
Tabulka 2 - Průměrná roční míra inflace	59
Tabulka 3 - Meziroční růst/pokles reálné mzdy	60
Tabulka 4 - Míra zaměstnanosti a míra hrubých národních úspor v letech 2007-2021.....	63
Tabulka 5 - Míra zaměstnanosti v čase (t).....	64
Tabulka 6 - Míra hrubých národních úspor v čase (t).....	65

ÚVOD

Téma této diplomové práce je Populační modely a jejich ekonomická aplikace. Cílem práce je matematicky formulovat populační modely od jednoduchých, které popisují vývoj jedné populace, po složitější, které popisují koexistenci více konkurujících si druhů, a popsat možnosti aplikace těchto poznatků v ekonomické teorii a praxi. Diplomová práce je dělena do pěti částí.

V první části diplomové práce je popsána potřebná základní teorie. Nejprve je vysvětlena tvorba matematického modelu, kde se budu zabývat jak tvorbou, tak i tříděním modelů různými způsoby. Poté přijdou na řadu diferenciální rovnice prvního řádu, jejich upřesnění, formulace a možná řešení. Pak se budu věnovat autonomním systémům, které můžeme rozdělit na autonomní systémy na přímce nebo v rovině. A na závěr této kapitoly zjistíme, co je to stabilita.

V druhé části této diplomové práce jsou popsány jednoduché dynamické populační modely. Začíná se od nejjednodušších populačních modelů, mezi které se řadí růstové modely, model růstu populace živých organismů a model rovnováhy počtu druhů na ostrově, kterému se také říká Macarturův model. Následují jednoduché dynamické populační modely, mezi které se řadí obecný logistický růst populace, dynamika klimaxové populace a dynamika populace pod predačním tlakem.

Ve třetí části této diplomové práce jsou vysvětleny modely koexistence dvou druhů. Nejprve budou popsány typy modelů soužití dvou populací a následně budou přiblíženy vybrané modely. Jako první je vysvětlen model konkurence mezi dvěma biologickými druhy, ve kterém jde hlavně o soupeření mezi druhy. Pokračovat budeme modelem symbiózy dvou druhů, který jak uvidíme závisí na spolupráci dvou druhů. Poté bude ujasněn klasický Lotkúv-Volterrův model dravec a kořist, kde je jeden druh potravou druhého. A bude následovat model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti, v němž přibude další proměnná a využijeme i kapacitu prostředí. Potom se přesuneme k realističtějšímu modelu dravec-kořist Gauseho typu a jako poslední bude ukázán model koexistence dvou konkurujících si populací zprostředkovanou dravcem, ten je už zařazen mezi modely se třemi proměnnými. Na závěr této kapitoly budou vysvětleny modely chování, konkrétně vývoj vzorců chování, mezi které patří obecný model chování a model soupeření „holubic“ a „jestřábů“.

Ve čtvrté části je popsána možnost využití dynamických populačních modelů v ekonomii. První bude uveden příklad Malthusovského modelu, který je typ růstového modelu,

a jeho využití v ekonomice s pyramidovým systémem (například multilevel marketing). Potom bude převeden model konkurence dvou druhů do ekonomického prostředí. Další využití bude ukázáno na modelu symbiózy dvou druhů, kde budou popsány dva ekonomické subjekty, které se zabývají výrobou vzájemných komplementů. Následně bude vysvětlen a převeden do ekonomického prostředí model dravec-kořist.

V páté poslední části je zobrazen příklad aplikace vybraného modelu v oblasti ekonomie. Pro toto využití jsem si zvolila model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti, který budu převádět na prostředí trhu práce. Bude zde využita míra zaměstnanosti a míra hrubých národních úspor.

1 ZÁKLADNÍ TEORIE

V této kapitole bude představena tvorba matematického modelu a diferenciální rovnice 1. řádu. Dále pak autonomní systémy, mezi které budou zahrnuty autonomní systémy na přímce a v rovině. Na závěr této kapitoly bude vysvětlena stabilita.

Model může být chápán jako jednodušší zobrazení reality, která vede k určitému cíli. V ekonomii si můžeme představit zkoumání ekonomického jevu, problému řízení, systémů s účastí lidí apod. Zobrazení reality se může označit názvem originál, prototyp nebo předmět modelování. Za pomoci vlastností modelu znázorňuje proces modelování vlastnosti prototypu.

1.1 Tvorba matematického modelu

Existuje několik druhů modelů, které se třídí nejrůznějšími způsoby. V této podkapitole budou uvedeny některé z těchto modelů.

Dělit modely můžeme podle zobrazovaných vlastností předmětu modelování, v takovémto případě mluvíme o substitučních modelech, ve kterých se rovnají všechny nebo pouze část základních vlastností s prototypem, například ingredience. Dále se jedná o funkční modely, které popisují chování předmětu modelování, respektive jeho funkce. Strukturální modely jsou ty, kde je originál zkoumán z pohledu struktury vnitřního uspořádání prvků, své využití mají především v matematice, fyzice, chemii apod. A posledními jsou smíšené modely, které jsou kombinací předchozích modelů. Kombinovat můžeme dva i více modelů a sestava se může lišit. Pro svou složitost jsou však smíšené modely málo využívány.

Členit modely lze také podle zobrazující funkce na materiální a ideální. Materiální modely fungují na principu matematických, chemických či fyzikálních zákonů. Člověk může přeměňovat pouze podmínky existence objektu. Tyto modely se mohou dále dělit na fyzické, ty s fyzickou podobou originálu a na matematické s logickou výstavbou. Ideální modely jsou založeny na zákonech logiky a jsou pouze součástí činností lidstva. Dělíme je na představy původem v procesu vědeckého vnímání a na znakové modely.

Modely umíme klasifikovat i vzhledem k tvůrčím vyhovujícím požadavkům na matematické, utvořené díky matematickým výrazovým prostředkům a na schematické (všechny ostatní). U matematických modelů rozlišujeme stochastické, u kterých jsou některé prvky náhodné veličiny, a deterministické. Dle závislosti na čase rozlišujeme ještě statické, které nejsou závislé, a dynamické, které závislé na čase jsou. Matematické deterministické

dynamické modely lze dále rozdělit na spojité a diskrétní, podle toho, s jakými veličinami se pracuje. Obvykle mají spojité deterministické modely podobu diferenciálních rovnic

Celý proces utváření matematického modelu můžeme dělit na čtyři části. Do první části se řadí sestavení samotného modelu, které zahrnuje zápis vlastností a zkoumaných zvyklostí za pomoci matematických termínů. V druhé části se provádí matematická analýza a získávají se teoretické důsledky. Do třetí části se zařazuje průzkum, zda teoretické důsledky modelu souhlasí s výsledky pokusů a pozorování, a v případě shody následné přijetí modelu. A poslední čtvrtou částí je analýza modelu ve vztahu se získanými informacemi prověřovaného objektu a v případě potřeby následné vylepšení modelu.

Identifikací koeficientů označíme určení hodnot parametrů, které model obsahuje. Při této činnosti mohou nastat problémy, protože matematické modely jsou pouze zjednodušeným popisem reálné skutečnosti. Ve velké míře mohou být modely akceptovány pouze v případě, kdy veličiny dosahují dostatečného množství hodnot, například při využití statistických dat.

Matematická analýza má hned několik výsledků, mezi něž se obvykle řadí analytické, numerické a grafické řešení. V analytickém řešení nejčastěji hledáme jeho kvalitativní vlastnosti, protože získat takové řešení je velmi obtížné, někdy až nemožné. Numerické řešení dostaneme pomocí numerických metod, nejčastěji se pro tento typ výpočtu používá počítačová simulace. A grafické řešení má podobu funkce grafu v čase [9].

1.2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Diferenciální rovnice mají podobu matematických rovnic, v nichž v roli neznámých se vyskytují funkce a derivace těchto funkcí. Necht' G je podmnožina eukleidovského prostoru \mathbb{R}^2 . Je-li f reálná funkce vymezená na této podmnožině G , pak diferenciální rovnice prvního řádu má tvar

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Výsledkem této rovnice je funkce y , která je diferencovatelná v kterémkoli intervalu J , s hypotézou platnosti podmínky $[x, y(x)] \in G$ a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro každé $x \in J$. Jedna diferenciální rovnice může mít hned několik výsledků, až nekonečně mnoho.

Řešení rovnice (1) splňující počáteční neboli prvotní podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0] \in G$, nazveme počáteční úlohou (Cauchyovou úlohou) neboli počátečním problémem.

Můžeme se dostat i do situace, kdy daná počáteční úloha nemá žádný výsledek nebo jich má několik.

Řešení y počátečního problému nazveme úplným řešením, pokud splňuje počáteční podmínku a pokud toto řešení není obsaženo v žádném dalším řešení tohoto problému. Pokud má tento počáteční problém i další jiné řešení, které je součástí úplného řešení, pak řekneme, že daný problém má právě jedno řešení.

Obecné řešení rovnice (1) bude g , pokud platí rovnost $y = g(x, C)$ a jestli pro každé C můžeme zapsat funkci ve tvaru $y(x) = g(x, C)$. A pro všechna $(x_0, y_0) \in G$ se vyskytuje takové C_0 , že $y(x) = g(x, C_0)$ je výsledkem příslušného problému (1), který splňuje prvotní podmínku. Tvar $y(x) = g(x, C)$ má každé řešení rovnice (1) a tento výraz pojmenujeme partikulární řešení rovnice.

Předpokládejme, že jsou na množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f(y, x) = (f_1(y, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(y, x_1, \dots, x_n))$ vymezené funkce f_1, f_2, \dots, f_n a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Systém diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(y, x_1, \dots, x_n), \\x'_2 &= f_2(y, x_1, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= f_n(y, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

lze zapsat ve tvaru rovnice:

$$x' = \mathbf{f}(y, x).$$

Rovnice $x' = f(y, x)$ představuje systém n obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu a nazývá se také n -vektorová obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu [5], [8], [18].

1.3 Autonomní systémy

Jsou systémy obyčejných diferenciálních rovnic, které neobsahují žádnou nezávislou proměnou. Rovnice

$$x' = \mathbf{f}(x),$$

(2)

se označuje jako autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic, pokud $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, vektorová funkce $\mathbf{f}(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$: $\Omega \rightarrow$

$\mathbb{R}^n, \Omega \subseteq \mathbb{R}$ je množina bez izolovaných bodů a s neprázdným vnitřkem. Předpokládá se, že \mathbf{f} je spojitá a počáteční problém $x' = \mathbf{f}(x), x(t_0) = x_0$ má pouze jediné řešení, které je úplné řešení, pro jakékoliv $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Množina Ω je fázový prostor a proměnná t označuje čas.

Úplné neboli celkové řešení systému rovnic (2) $x = \Phi(t)$ může být vyobrazeno jako graf zobrazení $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ nebo jako křivka ve fázovém prostoru Ω ve tvaru parametrické rovnice $x = \Phi(t)$. Tato křivka se nazývá trajektorie.

Pokud $f(x^*) = 0$, pak bod x^* můžeme označit jako stacionární (rovnovážný, kritický, singulární) bod rovnice (2). V případě, že je trajektorie uzavřená křivka, lze ji definovat jako cyklus. Autonomní systém rovnic (2) může mít jen jeden typ trajektorie. Za prvé cyklus neboli uzavřenou trajektorii, která odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení. Za druhé trajektorie, které se navzájem nikdy neprotínají, nebo stacionární bod, jenž odpovídá konstantnímu řešení [6].

1.3.1 Autonomní systém na přímce

Zkoumáním fázového prostoru se budou dostávat data o postupu výsledku rovnice $x' = \mathbf{f}(x)$ pro $n = 1$.

Rovnice je počítána v prostoru Ω , ve kterém se omega rovná intervalu nebo jeho sjednocení. Výsledná trajektorie může mít podobu přímky, polopřímky bez krajního bodu, vnitřní úsečky nebo stacionárního bodu. Podrobněji:

- přímka – funkce f nemění znaménko, tedy zůstane kladná nebo záporná a řešením je \mathbb{R} ,
- polopřímka bez krajního bodu – je-li číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \notin \Omega$ nebo $f(a) = 0$, pak může nastat jeden nebo více případů $(-\infty; a) \subseteq \Omega, f(x) \neq 0$ pro $x < a$ nebo $(\infty; a) \subseteq \Omega, f(x) \neq 0$ pro $x > a$,
- vnitřek úsečky – existují-li čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $(a, b) \subseteq \Omega, f(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a zároveň $f(a) = 0$ nebo $b \notin \Omega$ nebo $a \notin \Omega$ a současně $f(b) = 0$,
- stacionární bod $x^* \in \Omega$, jestliže $f(x^*) = 0$ [16].

1.3.2 Autonomní systémy v rovině

Jsou systémy, které obsahují dvě spojitě funkce dvou proměnných, které jsou definované na nějaké množině. Předpokládány jsou dva autonomní systémy rovnice $x' = \mathbf{f}(x)$, tedy pro $n = 2$, v prostoru $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Systémy budou mít tvar

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

(3)

Dále je předpokládána jednoznačnost a existence řešení všech počátečních, prvotních problémů. Singulárnímu bodu $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ rovnic (3) se říká bod rotace, střed, ohnisko, uzel nebo sedlo, podrobnosti jsou uvedeny níže:

- *bod rotace* – pokud existuje v kterémkoli okolí bodu x^* alespoň jeden cyklus, který obsahuje ve svém vnitřku bod x^* ,
- *střed* – pokud můžeme definovat ryzí okolí \mathcal{V} bodu x^* takové, že všemi body z tohoto okolí prochází jedna trajektorie, která je uzavřená a ve vlastním vnitřku obsahuje bod x^* (střed je speciální druh bodu rotace),
- *ohnisko* – pokud lze definovat ryzí okolí \mathcal{V} bodu x^* takové, že bod $x(t)$ z trajektorie \mathbf{x} začínající z kteréhokoliv bodu z tohoto okolí \mathcal{V} má atribut konvergovat pro $t \rightarrow \infty$ nebo pro $t \rightarrow -\infty$ k x^* tak, že rozměr orientovaného úhlu $\alpha(t)$, který svírá vektor $(x_1(t), x_2(t)) - (x_1^*, x_2^*)$ s nějakým pevným vektorem, kde x_1 je pevný bod z Ω , má nevlastní limitu,
- *uzel* – pokud existuje ryzí okolí \mathcal{V} bodu x^* takové, že pro bod $x(t)$ z trajektorie \mathbf{x} vyběhajícího z kteréhokoliv bodu z tohoto okolí \mathcal{V} platí

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x^*,$$

a zároveň rozměr orientovaného úhlu $\alpha(t)$, který svírá vektor $(x_1(t), x_2(t)) - (x_1^*, x_2^*)$ s nějakým pevným vektorem, kde x_1 je pevný bod z Ω , má konečnou limitu,

- *sedlo* – pokud existuje pouze konečný počet trajektorií $\mathbf{x} = x(t)$ takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x^*.$$

1.3.3 Stacionární body lineárních systémů v rovině

Pro tento výpočet lze předpokládat, že máme lineární homogenní autonomní systém s konstantní maticí. Následně je dán dvourozměrný systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Jediným stacionárním bodem tohoto systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ je pro $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ bod $(0, 0)$. V případě, že se $\det(\mathbf{A}) = 0$ je stacionárních bodů nekonečně mnoho. Kvůli zjištění, o který typ bodu se

jedná, prozkoumáváme vlastní čísla matice A . Pro zavedený systém $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, za předpokladu $\det(A) \neq 0$, získáme dvě vlastní čísla λ_1, λ_2 . Pak se podle hodnot vlastních čísel říká stacionárním bodům uzel, sedlo, střed nebo ohnisko a pro singulární bod $(0, 0)$ platí:

- *uzel* – pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a zároveň $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ nebo $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,
- *sedlo* – pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a zároveň $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$ nebo $\lambda_1 < 0$ a $\lambda_2 > 0$,
- *střed* – pokud $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\beta i$, to znamená, že λ_1, λ_2 jsou ryze imaginární čísla,
- *ohnisko* – pokud $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0$.

Výsledky $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 = \lambda_2$ jsou v běžném systému nepravděpodobné a jejich výskyt téměř nulový, proto zde nebudou vysvětleny [14], [16].

1.4 Stabilita

Stabilita jinak nazveme také stálost vazeb zajišťujících udržitelnost systému. Při analýze modelu pomáhá stabilita prověřovat chování modelu v okolí stacionárních bodů.

Řešení \tilde{x} systému diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, za podmínky pro všechna řešení $|\mathbf{x}(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)| < \delta$, je stabilní, když pro každé ε větší než nula a pro každé $t_1 \in \mathbb{R}$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ tak, že pro každé $t > t_1$ platí $|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon$. Řešení \tilde{x} se nazývá nestabilní, pokud není stabilní.

Řešení \tilde{x} systému diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, za podmínky pro všechna řešení $|\mathbf{x}(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)| < \delta$, je stejnosměrně stabilní, jestliže pro každé ε větší než nula a pro každé $t_1 \in \mathbb{R}$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t > t_1$ platí $|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon$.

Pro autonomní systémy platí, že pokud je řešení stabilní, pak je i stejnosměrně stabilní, ale neplatí to obráceně – pokud je řešení stejnosměrně stabilní neznamená to, že je i stabilní.

Řešení \tilde{x} systému diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a když existuje δ větší než nula tak, že pro každé t_1 z reálných čísel platí

$$|\mathbf{x}(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| = 0.$$

Řešení \tilde{x} systému diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je stejnosměrně asymptoticky stabilní, pokud je asymptoticky stabilní a zároveň stejnosměrně stabilní [6], [11].

2 JEDNODUCHÉ DYNAMICKÉ POPULAČNÍ MODELY

V této kapitole budou vysvětleny základní populační modely a jednoduché dynamické populační modely.

2.1 Růstové modely

V čase t nechť $x(t)$ spadá do kterékoliv číselné míry rozsahu zadané populace. Touto populací rozumíme souhrn jedinců, kterými mohou být společenstva živých organismů včetně lidí, ale např. i částice znečišťující přírodu, dřevní hmotu živého stromu apod. Správná míra rozsahu populace může mít podobu počtu milionů korun tvořících kapitálové zásoby podniku nebo počet milionů obyvatel žijících na Zemi atd.

Nechť je dána velikost populace x v čase t . Funkce $b(t, x)$ udává rychlost růstu populace na jednotku populace. Obdobně $d(t, x)$ ukazuje míru ubývání neboli úmrtí jednotek z populace za jednotku času na každou jednotku populace při velikosti populace x v čase t .

Předpokládejme, že $b(t, x)$ a $d(t, x)$ jsou spojité nezáporné funkce a velikost populace $x = x(t)$ je diferencovatelná funkce. Bereme-li v úvahu změnu velikosti populace na časovém intervalu $\langle t, t + \Delta t \rangle$, kde změna t je malá, lze předpokládat:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = [b(t, x(t)) + o(1)]\Delta t[x(t) + o(1)] - [d(t, x(t)) + o(1)]\Delta t[x(t) + o(1)],$$
 kde $o(1)$ znázorňuje libovolnou funkci konvergující k 0 pro $\Delta t \rightarrow 0$.

Z tohoto vztahu vyplývá

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = [b(t, x(t)) + o(1)][x(t) + o(1)] - [d(t, x(t)) + o(1)][x(t) + o(1)].$$

A limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t, x)x, \text{ kde } \mu(t, x) = b(t, x) - d(t, x).$$

Funkce $\mu(t, x)$ může obecně záviset na t a x , ale také na mnoha dalších parametrech a proměnných. Této funkci říkáme specifická míra růstu [4].

2.2 Model růstu populace živých organismů

Tento model se využívá například při zjišťování růstu populací mikroorganismů, ale lze jej použít i pro populaci lidí. Pro tento model se předpokládá nekonstantnost specifické míry růstu a zároveň její závislost na množství dostupné potravy. Při malých populacích můžeme využívat

Malthusův model, který patří mezi jednodušší modely a je založen na závislosti specifické míry růstu μ na velikosti populace x :

$$x' = px.$$

Výsledkem uvedené rovnice je $x(t) = x(0)e^{pt}$. V případě malé populace a za krátké časové období se Malthusův model přibližuje statistickým údajům. Na druhou stranu při velké populaci by bylo její vyvíjení neomezené, což by zapříčinilo nedostatek potravy. Proto je v reálném světě nutné tento model modifikovat.

Vlivem omezenosti zdrojů dochází v tomto modelu uvnitř populace k vnitrodruhové konkurenci. Konkurence se zvětšuje s přibývajícím množstvím jedinců, zvyšuje úmrtnost a zmenšuje porodnost. Proto zavádíme hypotézu, a to specifickou míru růstu μ jako klesající funkci velikosti populace.

Lineární klesající funkce $\mu(x) = a - bx$, kde a je koeficient růstu (v idealizovaném prostředí s neomezenými zdroji, v reálném prostředí nemožné) a b je koeficient zpomalení růstu (znázorňuje konkurenci uvnitř populace). Vzhledem ke kladné hodnotě koeficientu b lze zapsat rovnici následovně:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x.$$

Této rovnici říkáme Verhulstova nebo logistická, jejímž grafem bývá logistická křivka. Je-li $a > 0$, má tato rovnice s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 \geq 0$ řešení:

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}}$$

Pokud na počátku monitorovaného období byly již přítomni nějací jedinci z uvažované populace, z řešení můžeme vidět, že k ustálení populace dojde na hodnotě a/b . Pokud však na počátku sledování žádná populace neexistuje, už se neobjeví.

Další lineární klesající funkce v celém intervalu $(0, \infty)$ bude rovna: $\mu(x) = -a \ln\left(\frac{x}{K}\right)$, kde $a, K > 0$. Dostaneme rovnici

$$\frac{dx}{dt} = -ax \ln \frac{x}{K},$$

jejíž řešení s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 > 0$ je

$$x(t) = K \exp\left(e^{-at} \ln \frac{x_0}{K}\right).$$

Grafické řešení této rovnice nazýváme Gompertzova křivka. Populace se ustálí na hodnotě parametru K [1].

2.3 Model rovnováhy počtu druhů na ostrově / Macarturův model

Tento model se zabývá růstem populace na novém neosídleném místě s omezenou rozlohou působnosti. Lze si ho představit jako nový opuštěný ostrov, kam imigrují z pevniny různé druhy organismů. S ptáky se např. na ostrov dostanou semena rostlin, vítr přinese drobné členovce, s lidmi připlují hlodavci apod. Některé druhy se na ostrově usadí trvale, jiné vymřou. Celý proces se opakuje, dokud nenastane určitá rovnováha počtu druhů. Pro matematické modelování lze předpokládat:

- 1) S rostoucí vzdáleností ostrova od pevniny klesá za jednotku času počet imigrujících druhů.
- 2) Se zvětšujícím se počtem imigrujících druhů roste za jednotku času počet druhů, které úspěšně kolonizují ostrov, a s rostoucím počtem druhů, které již na ostrově sídlí, klesá za časovou jednotku počet druhů, které úspěšně kolonizují ostrov.
- 3) S klesající velikostí ostrova (klesající zdroje) a s rostoucím počtem druhů na ostrově roste za jednotku času počet druhů, které na ostrově vymřou.

Označení:

S ... rozloha ostrova,

d ... vzdálenost ostrova od pevniny,

N_i ... intenzita migrace,

$N(t)$... počet druhů sídlících na ostrově v čase t ,

$N_k(t)$... počet druhů, které ostrov kolonizovaly za čas t ,

$N_v(t)$... počet vymřelých druhů na ostrově za čas t .

Pak je zřejmé, že:

$$N(t) = N_k(t) - N_v(t).$$

K sestavení nejjednoduššího možného matematického modelu uvažovaného procesu, který splňuje podmínky 1–3, je potřeba převést předpoklady na rovnicový tvar. Z předpokladu jedna plyne:

$$N_i = \frac{c}{d}, \quad (4)$$

kde c je kladná konstanta. Počet druhů, které za časový interval Δt kolonizují ostrov je $N_k(t + \Delta t) - N_k(t)$ a z předpokladu dvě vyplývá:

$$N_k(t + \Delta t) - N_k(t) = b \frac{N_i}{N(t) + \beta} \Delta t = \frac{bc}{d} \frac{1}{N(t) + \beta} \Delta t, \quad (5)$$

kde b je kladná konstanta a β nezáporná konstanta. Počet druhů, které na ostrově vymřou za časový interval Δt je $N_v(t + \Delta t) - N_v(t)$ a z předpokladu tři dostaneme

$$N_v(t + \Delta t) - N_v(t) = a \frac{1}{S} N(t) \Delta t, \quad (6)$$

kde a je kladná konstanta. Z rovnic (4), (5) a (6) nyní dostáváme tvar

$$N(t) = N_k(t + \Delta t) - \frac{bc}{d} \frac{1}{N(t) + \beta} \Delta t - N_v(t + \Delta t) + \frac{a}{S} N(t) \Delta t,$$

po úpravě

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{bc}{d} \frac{1}{N(t) + \beta} - \frac{a}{S} N(t).$$

Označením $\alpha = \frac{bc}{d}$, $\gamma = \frac{S}{a}$, kde α a γ jsou kladné konstanty a provedením limitního přechodu $\Delta t \rightarrow 0$, získáváme model vývoje počtu druhů na ostrově (počáteční úlohu)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\alpha}{N + \beta} - \frac{N}{\gamma}.$$

Počáteční podmínka $N(0) = 0$ odpovídá situaci, kdy byl na počátku ostrov neosídlený.

Je-li $\beta > 0$, řešení počáteční úlohy s počáteční podmínkou je v implicitním tvaru

$$N_2^{\beta - N_2} (N_1 - N(t))^{\beta + N_1},$$

kde $N_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} - \beta)$, $N_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} + \beta)$.

Pro stacionární řešení $N(t) = \hat{N}$ počáteční úlohy je \hat{N} řešením algebraické rovnice

$$\frac{\alpha}{\hat{N} + \beta} - \frac{\hat{N}}{\gamma} = 0,$$

kde $N_1, -N_2$ jsou kořeny této rovnice. Zároveň $N_1 > 0, N_2 > 0$, z čehož vyplývá kladné stacionární řešení

$$N(t) = \hat{N} = \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} - \beta). \quad (7)$$

Stacionární řešení je asymptoticky stabilní, jestliže $F(x) > 0$ pro $x \in \langle 0, \hat{N} \rangle$ a

$$F'(\hat{N}) = -\frac{\alpha}{(\hat{N} + \beta)^2} - \frac{1}{\gamma} < 0,$$

kde $F(x) = \frac{\alpha}{x+\beta} - \frac{x}{\gamma}$. Řešení N počáteční úlohy s počáteční podmínkou roste a asymptoticky se přibližuje k hodnotě \hat{N} .

Je-li $\beta = 0$, pak pravá strana počáteční úlohy není definovaná pro $N = 0$, což znamená, že nemůže být uvažována počáteční podmínka $N(0) = 0$. Řešením počáteční úlohy bude Bernoulliova rovnice za podmínky $\lim_{t \rightarrow 0^+} N(t) = 0$, dána výrazem

$$N(t) = \sqrt{\alpha\gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{\gamma}\right)\right)}.$$

Pro toto řešení platí limita $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \sqrt{\alpha\gamma}$.

Počet druhů na ostrově se po určité době ustálí na nějakém dynamickém rovnovážném stavu. Pro $\beta \geq 0$ je tento rovnovážný stav dán výrazem (7) a pro $\beta \gg 0$ je tento rovnovážný stav přibližně roven $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. V obou případech platí, že je tento rovnovážný stav počtu druhů na ostrově tím větší, čím větší je rozloha ostrova a čím menší je vzdálenost od pevniny, a naopak, čím je ostrov menší a čím větší je jeho vzdálenost od pevniny, tím je menší rovnovážný stav druhů [9].

2.4 Obecný logistický růst populace

Základní rovnicí tvaru $\frac{dN}{dt} = N(\varepsilon - \beta N)$ je popsán vývoj velikosti $N = N(t)$ populace v čase t . Řešením této rovnice na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ je $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\varepsilon}{\beta}$, jestliže $\varepsilon > 0, \beta > 0$ a $N(0) > 0$. Nosná kapacita nebo úživnost prostředí představuje velikost populace, kterou je dané prostředí schopno uživit, a značí se $K = \frac{\varepsilon}{\beta}$. Specifickou míru růstu populace, u níž by se

neprojevovala vnitrodruhová konkurence, představuje parametr ε . Základní rovnici lze převést na tvar

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(K - N), \quad \text{nebo} \quad \frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

(8)

Jestli

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \beta \frac{dN}{dt} (K - N) - \beta N \frac{dN}{dt} = \beta(K - 2N) \frac{dN}{dt} = 0,$$

tedy když $N = \frac{1}{2}K$, pak graf řešení rovnice (8) má inflexní bod. V polovině kapacity prostředí nebude inflexní bod, jestliže reálná populace bude mít růstovou křivku. V takovém případě lze rovnici (8) zobecnit a zapsat ve tvaru, kde β, a, b jsou kladné parametry

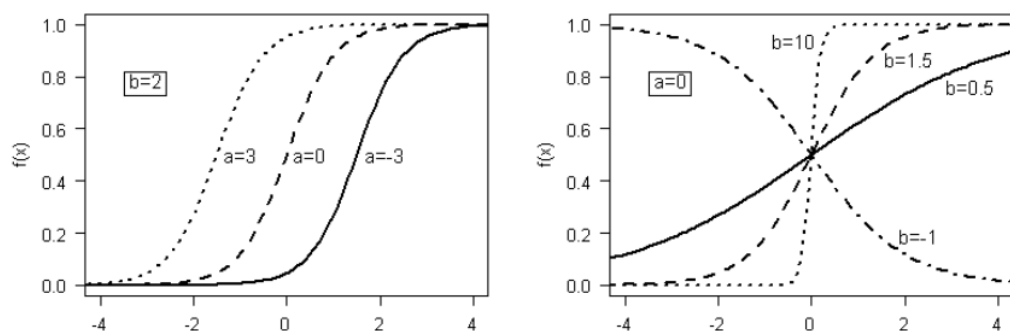
$$\frac{dN}{dt} = \beta N^a (K - N)^b.$$

(9)

Pouze pro $N \in \langle 0, K \rangle$ je obecně definovaná pravá strana rovnice (9). Proto je k této rovnici přidána počáteční podmínka

$$N(0) = N_0 \in \langle 0, K \rangle.$$

Řešení rovnice (8) s počáteční podmínkou (9) s různými hodnotami parametrů a, b (viz. Obrázek 1).



Obrázek 1 – Obecný logistický růst populace

Zdroj: [20]

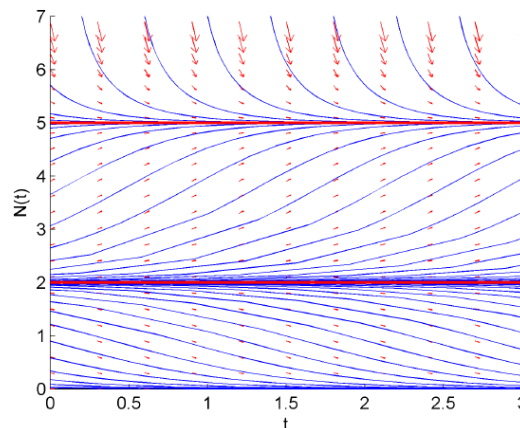
2.5 Dynamika klimaxové populace

Pro tento model se při vývoji populace používá specifická míra růstu $\mu = \mu(N)$. Tu můžeme považovat za kladnou, tedy $\mu > 0$, pokud $N \in \langle \theta, K \rangle$ nebo za zápornou, tedy $\mu < 0$,

pokud $N \in (0, \theta) \cup (K, \infty)$. A model má jedno lokální maximum, což je bod, ve kterém se funkce mění z rostoucí na klesající [10]. Hodnota $\theta > 0$ a ukazuje práh přežití populace, konstanta $K > \theta$ interpretuje nosnou kapacitu prostředí. Funkce splňující tyto podmínky je $\mu(N) = \left(\frac{N}{\theta} - 1\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$. Diferenciální rovnice popisující vývoj populace má tvar

$$\frac{dN}{dt} = N \left(\frac{N}{\theta} - 1\right) \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Najít přesné řešení této rovnice je složité, takže pro zjednodušení použijeme kvalitativní analýzu. Rovnice má tři singulární body $N_1 = 0, N_2 = \theta$ a $N_3 = K$. Funkce $\mu(N)$ je derivací funkce $N(t)$ a platí: funkce $N(t)$ je klesající na intervalu $(0, \theta) \cup (K, \infty)$ a rostoucí na intervalu (θ, K) , kde t zobrazuje čas. Odtud plyne, že stacionární řešení N_1 a N_3 jsou asymptoticky stabilní a stacionární řešení N_2 je nestabilní.



Obrázek 2 – Dynamika klimaxové populace

Zdroj: [14]

Pro různé počáteční populace s parametry $r = 2, \theta = 2$ a $K = 5$ (Obrázek 2). Jestliže je práh přežití populace větší než počáteční populace, tak tato populace vymírá. Pokud je počáteční populace mezi hodnotami prahu přežití populace a nosnou kapacitou prostředí, tak se populace zvětšuje. Pokud je počáteční populace příliš velká, vymírá, dokud se hodnota nedostane k nosné kapacitě prostředí [2].

2.6 Dynamika populace pod predačním tlakem

V tomto modelu se jedná o populaci, se kterou je v prostředí i její predátor neboli konzument. Zároveň není uvažovaná populace hlavním zdrojem obživy pro predátora nebo není jediným zdrojem. Velikost populace v čase t budeme označovat jako $N(t)$. S přítomností dravce se zpomalí vývoj populace. Tuto situaci představuje rovnice

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(K - N) - p(N),$$

kde konstanty $\beta > 0$ a $K > 0$. Funkce p v modelu vyznačuje zpomalení růstu populace následkem činnosti predátorů, lze ji chápat i jako úbytek populace, kterou zničili predátoři za jednotku času. Funkce p má esovitý průběh. Předpokládáme, že:

- funkce p je rostoucí, je-li více kořisti, predátor ji zničí více,
- $p(0) = 0$, jestliže se v prostředí nevyskytuje žádný jedinec populace kořisti, predátor si najde jiný druh obživy,
- $\exists a, a > 0$ takové, že $\lim_{N \rightarrow \infty} p(N) = a$, predátoři loví do své hladiny nasycení nikoliv neomezeně, i když je v prostředí mnoho potenciální kořisti,
- pro $N < b$ (b je prahová hodnota) s růstem N roste p pomalu, pokud je populace kořisti příliš malá, predátor ji nevyhledává a dá přednost alternativnímu zdroji obživy.

Funkce splňující všechny dané předpoklady je $p(N) = \frac{aN^2}{b^2 + N^2}$. Vývoj uvažované populace se bude počítat následovně

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(K - N) - \frac{aN^2}{b^2 + N^2}.$$

Pomocí substituce $u = \frac{N}{b}$, $\tau = \frac{a}{b}t$ a označení $r = \frac{bK\beta}{a}$, $q = \frac{K}{b}$ přepíšeme rovnici na

$$\frac{du}{d\tau} = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

Protože jsou v rovnici obsaženy jen dva bezrozměrné parametry r , q , stává se tato rovnice pro analýzu výhodnější. Kapacita prostředí je úměrná parametru q a specifická míra růstu populace βK je úměrná parametru r [14].

Po označení

$$f(u; r, q) = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

$$f_1(u; r, q) = r \left(1 - \frac{u}{q}\right), \quad f_2(u) = \frac{u}{1 + u^2},$$

jsou kořeny rovnice

$$f_1(u; r, q) = 0$$

singulární body diferenciální rovnice $\frac{du}{d\tau} = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}$. Jedno ze stacionárních řešení je $u \equiv 0$, dalším stacionárním řešením by bylo řešení splňující rovnici

$$r \left(1 - \frac{u}{q}\right) = \frac{u}{1+u^2}.$$

3 MODELY KOEXISTENCE DVOU DRUHŮ

Jedná se o modely, kde uvažujeme dvě různé populace v jednom teritoriu. Označme velikost v čase t první populace $N_1(t)$ a druhé populace $N_2(t)$. Pokud jsou k sobě tyto dvě populace navzájem neutrální, lze jejich vývoj, podle předešlých poznatků, zapisovat rovnicemi

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha_1 N_1)N_1, \quad N_2' = (\varepsilon_2 - \alpha_2 N_2)N_2,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ a $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pokud se ve skutečném prostředí objeví dvě odlišné populace, bývá množství jedné ovlivněno existencí druhé a naopak. Pravděpodobnost, že se potkají dva jedinci různých populací je úměrná tomuto vlivu. A číslo získané vynásobením velikostí jednotlivých populací bude úměrné této pravděpodobnosti. Popis vývoje velikostí dvou vzájemně se ovlivňujících populací lze zapsat pomocí následujícího matematického modelu, soustavou dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha_1 N_1)N_1 + \gamma_1 N_1 N_2,$$

$$N_2' = (\varepsilon_2 - \alpha_2 N_2)N_2 + \gamma_2 N_1 N_2.$$

Znaménko γ_1 určuje vliv druhé populace na první:

- $\gamma_1 > 0$: druhá populace podporuje růst první populace,
- $\gamma_1 < 0$: druhá populace omezuje růst první populace,
- $\gamma_1 = 0$: druhá populace neovlivňuje růst první populace.

Znaménko γ_2 určuje vliv první populace na druhou populaci:

- $\gamma_2 > 0$: první populace podporuje vyvíjení druhé populace,
- $\gamma_2 < 0$: první populace omezuje vývoj druhé populace,
- $\gamma_2 = 0$: první populace neovlivňuje vývoj druhé populace.

Vztahy dvou populací můžeme členit na základě znamének koeficientů následovně:

- ++ mutualismus,
- + 0 komensalismus,
- + - predace,
- - 0 amensalismus,
- - - konkurence,
- 0 0 neutralismus [17].

3.1 Model konkurence mezi dvěma biologickými druhy

Tento model je založen na konkurenci dvou druhů, které se vyskytují ve stejném prostředí, soupeří o potravu, své teritorium apod. Budeme používat označení níže:

N_1 ... velikost populace prvního druhu,

N_2 ... velikost populace druhého druhu,

$\varepsilon_1 > 0$... střední rychlost růstu první populace na jednoho jedince,

$\varepsilon_2 > 0$... střední rychlost růstu druhé populace na jednoho jedince.

Kvůli omezenému množství zdrojů živin (potravu) dochází u rozšířenějších populací ke zpomalení jejich vývoje. Toto zpomalení představují následující funkce $f_1(N_1, N_2)$, $f_2(N_1, N_2)$:

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - f_1(N_1, N_2))N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - f_2(N_1, N_2))N_2.$$

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že $f_i(N_1, N_2) = \alpha_{i1}N_1 + \alpha_{i2}N_2$ ($i = 1, 2$), kde $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2$). Matematický model bude znázorňovat soustava dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2)N_1,$$

$$N_2' = (\varepsilon_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2)N_2.$$

Pro tyto rovnice mají všechny počáteční problémy jediné úplné řešení. Věnovat se budeme řešením v prvním kvadrantu. Pomocí dimenzionální analýzy modelu a substituce dostaneme následující systém dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (1 - N_1 - aN_2)N_1,$$

$$N_2' = (c - bN_1 - N_2)N_2,$$

(10)

kde $a = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$, $b = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$, $c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Tento systém má singulární body $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, c]$, jako další je potřeba najít řešení dvou rovnic

$$N_1 + aN_2 = 1$$

$$bN_1 + N_2 = c.$$

Podle vyčíslení parametrů a , b , c zjistíme, jestli přibude díky těmto rovnicím další singulární bod obsažený v prvním kvadrantu. Nejčastěji se setkáme s případy:

- I. $b < c, ac < 1$,
- II. $b > c, ac > 1$,
- III. $b < c, ac > 1$,
- IV. $b > c, ac < 1$.

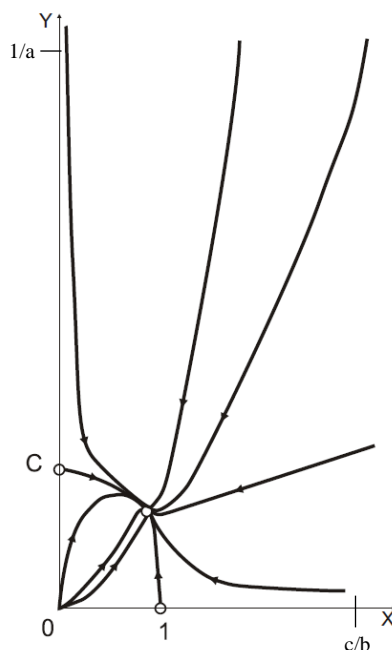
Případ I. je model slabé konkurence a musí platit $ab < ac < 1$. Soustava rovnic (10) má čtyři singulární body obsažené v prvním kvadrantu

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad [0, c], \quad \left[\frac{1-ac}{1-ab}, \frac{c-b}{1-ab} \right].$$

Jacobiho matice soustavy (10) je

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2N_1 - aN_2 & -aN_1 \\ -bN_2 & c - bN_1 - 2N_2 \end{bmatrix}.$$

Výpočtem hodnot Jacobiho matice v singulárních bodech a následným získáním příslušných vlastních čísel zjistíme, že nestabilní uzel je singulární bod $[0, 0]$, sedla jsou singulární body $[1, 0]$ a $[0, c]$ a stabilní uzel je v singulárním bodě $[\bar{N}_1, \bar{N}_2] = [(1-ac)/(1-ab), (c-b)/(1-ab)]$. Po daném čase se velikosti populací ustálí na hodnotách \bar{N}_1, \bar{N}_2 , což vede k přežití obou populací (Obrázek 3).



Obrázek 3 – Model slabé konkurence

Zdroj: [9]

Případ II. je model silné konkurence a musí platit $ab > ac > 1$. Systém (10) má opět čtyři singulární body v prvním kvadrantu

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad [0, c], \quad \left[\frac{1 - ac}{1 - ab}, \frac{c - b}{1 - ab} \right].$$

Výpočet Jacobiho matice a příslušných vlastních čísel bude stejný jako v Případu I., jen některá čísla budou mít opačná znaménka a tím i opačný charakteristický směr. Výpočtem zjistíme, že nestabilní uzel je v singulárním bodě $[0, 0]$, stabilní uzly jsou v bodech $[1, 0]$, $[0, c]$ a sedlo je v singulárním bodě $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$. Při $t \rightarrow \infty$ se musí každá trajektorie procházející bodem v prvním kvadrantu limitně blížit k singulárnímu bodu $[1, 0]$ nebo $[0, c]$. Případ II. povede k vyhynutí jednoho z druhů.

Případ III. je model dominance druhého druhu. Systém (10) má tentokrát jen tři singulární body $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, c]$. V bodě $[0, 0]$ je stabilní uzel, v singulárním bodě $[1, 0]$ je sedlo a v singulárním bodě $[0, c]$ je stabilní uzel. Čtvrtý singulární bod se nachází mimo první kvadrant nebo neexistuje. Při $t \rightarrow \infty$ se všechny trajektorie procházející bodem v prvním kvadrantu limitně přibližují k bodu $[0, c]$. Případ III. povede k přežití druhého druhu, zatímco první druh vymře.

Případ IV. je model dominance prvního druhu. Systém (10) má opět jen tři singulární body v prvním kvadrantu $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, c]$. V singulárním bodě $[0, 0]$ je nestabilní uzel, v bodě

$[1, 0]$ je stabilní uzel a v singulárním bodě $[0, c]$ je sedlo. Při $t \rightarrow \infty$ se všechny trajektorie procházející bodem v prvním kvadrantu limitně přibližují k bodu $[1, 0]$. Příklad IV. vede k přežití prvního druhu a vymření druhu druhého [9].

3.2 Model symbiůzy dvou druhů

Tento model je založen na soužití dvou druhů populací, které si vzájemně pomáhají. To znamená, že výskyt jednoho druhu urychluje vývoj druhého a naopak. Tento druh spolupráce neboli vzájemné podpory nazveme mutualismus. Bude použito následující označení:

N_i ... velikost populace i -tého druhu,

ε_i ... specifická míra růstu i -tého druhu,

kde $i = 1, 2$. Tento model se od předchozího modelu konkurence odlišuje opačnými znaménky koeficientů vzájemného působení, a rovnice mají tvar:

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha_{11}N_1 + \alpha_{12}N_2)N_1,$$

$$N_2' = (\varepsilon_2 + \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2)N_2,$$

po provedení dimenzionální analýzy dostáváme zápis

$$N_1' = (1 - N_1 + aN_2)N_1,$$

$$N_2' = (c + bN_1 - N_2)N_2,$$

(11)

kde jsou všechny parametry kladné a platí

$$a = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}, b = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Koeficienty a, b lze vysvětlit jako relativní sílu mutualismu vzhledem k síle vnitrodruhové konkurence.

Matematický model s pomocnými koeficienty (11) má v prvním kvadrantu singulární body $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, c]$ a pokud je $ab < 1$, dalším bodem bude

$$[\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \left[\frac{1 + ac}{1 - ab}, \frac{b + c}{1 - ab} \right] = \left[1 + a \frac{b + c}{1 - ab}, c + b \frac{1 + ac}{1 - ab} \right].$$

Jacobiho matice stejného modelu bude

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2N_1 + aN_2 & aN_1 \\ bN_2 & c + bN_1 - 2N_2 \end{bmatrix}.$$

Pokud je $ab < 1$, mluvíme o slabém mutualismu. Hodnota Jacobiho matice bude v singulárním bodě $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$

$$J(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1+ac}{1-ab} & a\frac{1+ac}{1-ab} \\ b\frac{b+c}{1-ab} & -\frac{b+c}{1-ab} \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnice této matice je

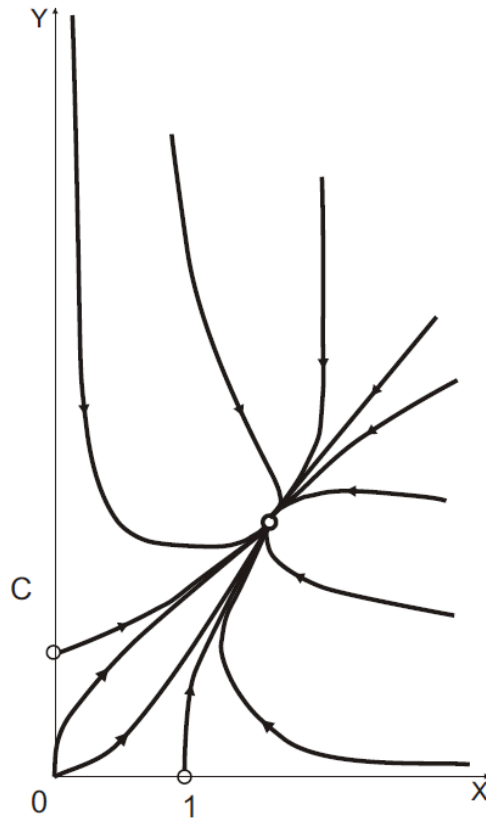
$$\lambda^2 + \frac{1+b+c+ac}{1-ab}\lambda + \frac{(1+ac)(b+c)}{1-ab} = 0,$$

kořeny této rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1+b+c+ac) \mp \sqrt{D}}{2(1-ab)},$$

kde D je diskriminant a je roven $D = (1+b+c+ac)^2 - 4(1+ac)(b+c)(1-ab)$. Vlastní čísla $\lambda_{1,2}$ jsou odlišná, záporná a reálná, singulární bod $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$ se nazývá stabilní uzel. Při $t \rightarrow \infty$ se všechny trajektorie procházející nějakým bodem v prvním kvadrantu limitně blíží k bodu $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$. Obě populace přežijí a jejich velikosti jsou větší, než kdyby byly tyto populace bez vzájemné spolupráce v tomtéž prostředí.

Pokud je $ab \geq 1$, jedná se o silný mutualismus. Jelikož jsou obě pravé strany rovnic (11) kladné, obě složky řešení procházejícího nějakým bodem z množiny \mathbb{R}_+^2 neomezeně rostou a první kvadrant neobsahuje žádný singulární bod. Ale neomezený růst populací není možný kvůli omezeným zdrojům (velikost prostředí, potrava, voda, ...). Po příznivém období pro obě populace dojde ke zhroucení jejich životního prostředí. Viz. Obrázek 4, kde X představuje N_1 a Y představuje N_2 .



Obrázek 4 - Model symbiózy dvou druhů

Zdroj: [9]

3.3 Klasický Lotkúv-Volterrův model dravec-kořist

V tomto modelu se budeme zabývat dvěma populacemi, ve kterých je jeden druh konzumentem druhého druhu. První populaci nazveme úlovkem (kořistí) a druhou konzumentem (dravcem). Použijeme následující označení:

N_1 ... velikost populace kořisti,

N_2 ... velikost populace dravce,

ε_1 ... střední rychlost růstu velikosti populace kořisti,

$-\varepsilon_2$... střední rychlost růstu velikosti populace dravce.

Dravec se živí výhradně kořistí, bez přítomnosti kořisti by populace dravce vymřela a tedy $\varepsilon_2 > 0$. Zároveň má kořist dostatečný zdroj potravy pro přežití, tedy $\varepsilon_1 > 0$. Pro zvýšení ΔN_1 resp. ΔN_2 velikosti populace při přírůstku času Δt , existují konstanty γ_1, γ_2 takové že $\gamma_1 > 0$ a $\gamma_2 > 0$ platí

$$\Delta N_1 = \varepsilon_1 N_1 \Delta t - \gamma_1 N_1 N_2 \Delta t,$$

$$\Delta N_2 = -\varepsilon_2 N_2 \Delta t + \gamma_2 N_1 N_2 \Delta t.$$

Úbytek populace kořisti vlivem konzumování dravcem představuje výraz $\gamma_1 N_1 N_2 \Delta t$. Přírůstek velikosti populace dravce vlivem konzumace kořisti představuje výraz $\gamma_2 N_1 N_2 \Delta t$. Efektivnost přeměny jednotky kořisti na jednotku dravce je podíl γ_1/γ_2 . Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ a podělením přírůstkem Δt dostaneme klasický model Lotkùv-Volterrùv, který má tvar dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1,$$

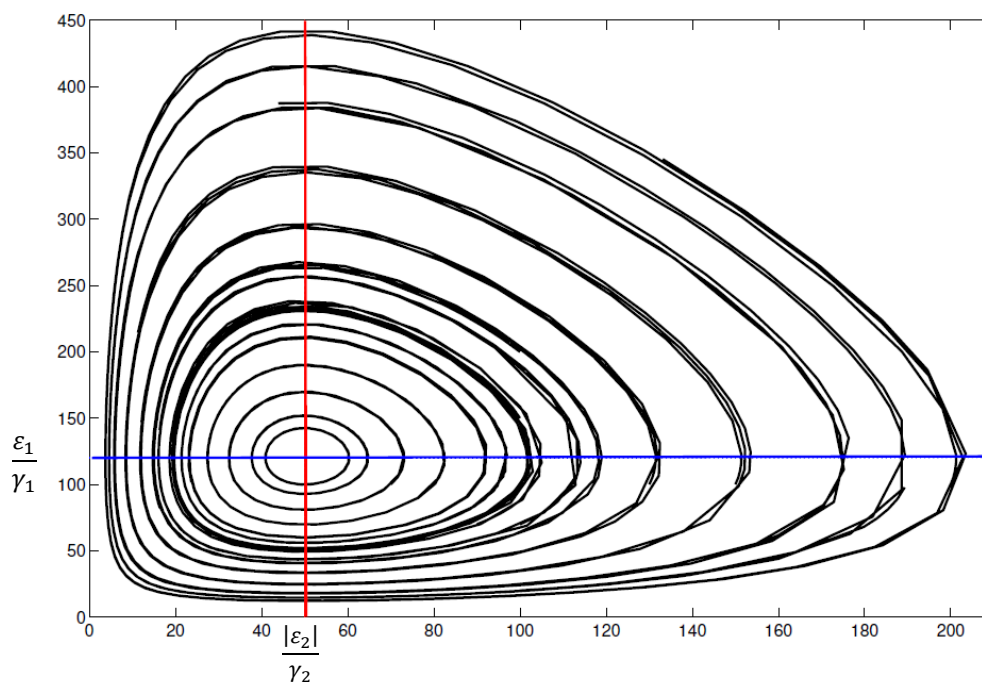
$$N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2.$$

(12)

Každý počáteční systém má pro tento systém rovnic jediné úplné řešení. Tato soustava rovnic (12) má singulární body $[0, 0]$ a $\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right]$. Jacobiho matice systému (12) je

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}.$$

Výpočtem Jacobiho matice, vypočítáním vlastních čísel této matice a následnou integrací zjistíme, že singulární bod $[0, 0]$ je sedlo a singulární bod $\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right]$ je střed rotace. Všechny trajektorie soustavy (12) různé od singulárního bodu $\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right]$ ležící v prvním kvadrantu jsou uzavřené. Z toho vyplývá, že stavy kořisti a dravce se periodicky opakují a kolísají kolem rovnovážných stavů. Rovnovážný stav N_1 pro kořist je ε_2/γ_2 a rovnovážný stav N_2 pro dravce je ε_1/γ_1 (viz. Obrázek 5), [9], [21].



Obrázek 5 - Klasický Lotka-Volter model dravec a kořisti – různé počáteční hodnoty

Zdroj: [14]

3.4 Model dravec-kořisti s vnitrodruhovou konkurencí kořisti

Kdyby se v tomto modelu nevyskytoval dravec, společenství kořisti by mohlo neomezeně růst. To však není reálné z důvodu omezené kapacity prostředí (prostředí, potravy; v ekonomii pak například kapacita trhu, atd). Proto do klasického modelu přibude nový člen, který omezuje vývoj kořisti. Bude použito následující označení

N_1 ... velikost populace kořisti,

N_2 ... velikost populace dravce,

ε_1 ... specifická míra růstu populace kořisti,

$-\varepsilon_2$... specifická míra růstu populace dravce izolovaného od kořisti,

α ... míra vnitrodruhové konkurence kořisti, $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{K}$, kde K představuje nosnou kapacitu prostředí,

γ_1 ... specifická míra ničení populace kořisti dravcem,

γ_2 ... $\gamma_2 = \kappa\gamma_1$, kde κ je efektivnost přeměny zničené kořisti na populaci dravce.

Budeme předpokládat, že $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \gamma_1$ a $\gamma_2 > 0$. Pokud bude splněn tento předpoklad budeme používat následující model

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2)N_1,$$

$$N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2.$$

(13)

Pro tento systém diferenciálních rovnic má každý počáteční problém jediné úplné řešení. Soustava (13) má dva singulární body $[0, 0]$ a $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$. A dalším singulárním bodem v případě platnosti nerovnosti $\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$ je

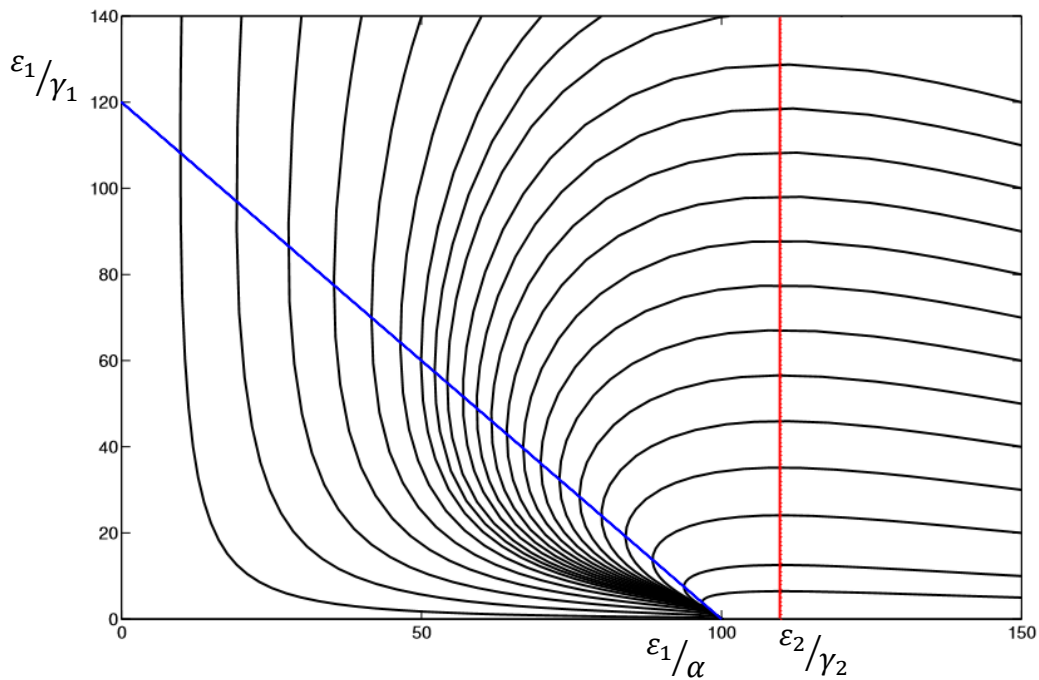
$$[N_1^*, N_2^*] = \left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right].$$

Jacobiho matice má tvar

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}.$$

Pomocí výpočtu vlastních čísel matice zjistíme, že singulární bod $[0, 0]$ je sedlo. Pro následné počítání mohou nastat dvě různé situace.

Případ $\gamma_2 \varepsilon_1 < \alpha \varepsilon_2$: jelikož vlastní čísla Jacobiho matice jsou záporná, singulární bod $[\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0]$ je stabilní. Pro $t \rightarrow \infty$ se v prvním kvadrantu přibližují všechny výsledky limitně k bodu $[\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0]$. Z čehož vyplývá, že populace kořisti se ustálí na hodnotě ε_1/α , což se rovná kapacitě prostředí a populace dravce vyhyne (Obrázek 6).



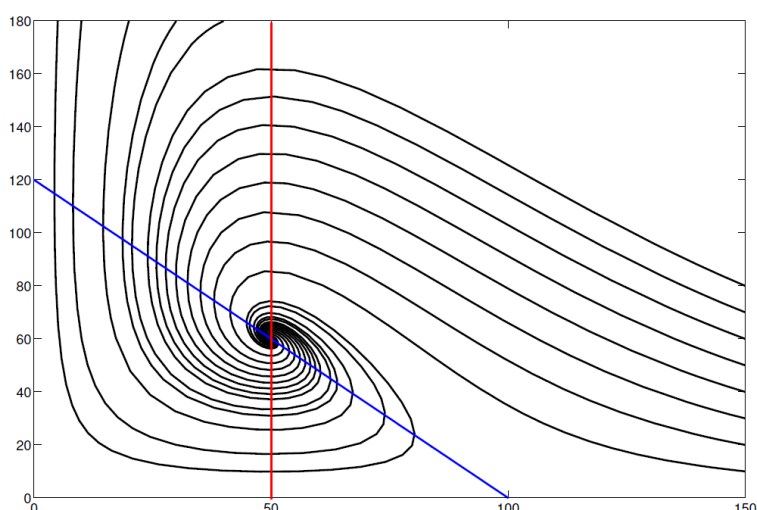
Obrázek 6 - Model s vnitrodruhovou konkurencí kořisti – vyhynutí dravce, $\varepsilon_2 = 2,2$

Zdroj: [14]

Případ $\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$: jelikož vlastní čísla Jacobiho matice mají hodnotu, kdy jedno číslo je záporné a druhé kladné, singulární bod $\left[\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right]$ je sedlo. Výpočtem Jacobiho matice zjistíme, že singulární bod $[N_1^*, N_2^*]$ je stabilní. Při výpočtu vlastních čísel pomocí charakteristické rovnice můžou nastat dvě situace. První je, když $D \geq 0$, v tomto případě má rovnice dva záporné kořeny. Ve druhém případě může nastat moment kdy $D < 0$ a musí se k výpočtu použít komplexní čísla. Úpravami rovnice diskriminantu, pokud místo nerovnosti použijeme rovná se, dostaneme jeden kladný kořen charakteristické rovnice

$$\hat{\alpha} = 2\gamma_2 \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} - 1 \right),$$

- singulární bod $[N_1^*, N_2^*]$ je stabilním ohniskem pokud $\alpha \in (0, \hat{\alpha})$, viz. Obrázek 7,
- singulární bod $[N_1^*, N_2^*]$ je stabilním uzlem pokud $\alpha \geq \hat{\alpha}$.



Obrázek 7 - Stacionární bod je ohnisko, v tomto případě $-\varepsilon_2 = 1$

Zdroj: [14]

Závěrem tohoto modelu je ustálení hodnoty populace dravce na N_2^* a populace kořisti na hodnotě N_1^* . Pokud $\alpha < \hat{\alpha}$ jedná se o případ slabé vnitrodruhové konkurence kořisti, a populace dojdou ke svému ustálení pomocí tlumených oscilací. Pokud $\alpha \geq \hat{\alpha}$ jde o případ, kdy mluvíme o silné vnitrodruhové konkurenci kořisti, a populace dospěje ke svému ustálení s maximálně konečným počtem zakolísání kolem bodu ustálení $[N_1^*, N_2^*]$ [9], [18].

3.5 Model dravec-kořist Gauseho typu

Tento typ modelu patří mezi realističtější modely popisující společenstvo dravec-kořist (lze také označit jako KONZUMENT-PRODUCENT nebo z Číny například panda-bambus). Označení počtu jedinců:

- $N_1 = N_1(t)$... velikost populace kořisti,
- $N_2 = N_2(t)$... velikost populace dravce.

Předpoklady:

1. Pokles nebo nárůst osamocené populace kořisti je úměrný velikosti této populace. Populace kořisti má v čase t jedinců N_1 a v čase $t + \Delta t$ jich bude mít $N_1 + \mu_1 N_1 \Delta t$. Zároveň je specifická míra růstu μ_1 závislá jen na velikosti dané populaci, $\mu_1 = \mu_1(N_1)$.
2. Za jednotku času zahubí (sní) jeden dravec V jedinců kořisti a za čas Δt dravec zabije $V\Delta t$ jedinců kořisti. Velikost úlovku závisí na počtu dravců. Dravci mohou na lovu spolupracovat nebo si konkurovat a vzájemně se od kořisti odhánět. Úbytek kořisti závisí i na jejím množství. Když je jedinců kořisti více, mohou se útoku ubránit vzájemnou spoluprací. Pokud je jedinců kořisti méně, dravcům může déle trvat je najít, $V = V(N_1, N_2)$.
3. Hlavním nebo jediným zdrojem výživy dravce je populace kořisti. Proto dravci zanikají v prostředí, kde nežijí jedinci z populace kořisti. Další hypotézou je, že toto úmrtí má konstantní rychlost $\varepsilon_2 > 0$. Když má populace dravce v čase t jedinců N_2 , v čase $t + \Delta t$ jich bude mít $N_2 - \varepsilon_2 N_2 \Delta t$.
4. Mají-li dravci dostatek kořisti, mohou se rozmnožovat (přibývají dravci). Jeden dravec má za jednotku času t právě μ_2 potomků, tzn. $\mu_2 N_2 \Delta t$ nových jedinců se narodí za čas Δt . Specifická míra porodnosti dravce μ_2 je závislá na množství snědené kořisti, tedy $\mu_2 = \mu_2(V)$.

Z těchto předpokladů vyplývají následující rovnice:

$$N_1(t + \Delta t) = N_1(t) + \mu_1(N_1(t))N_1(t)\Delta t - V(N_1(t), N_2(t))N_2(t)\Delta t,$$

$$N_2(t + \Delta t) = N_2(t) - \varepsilon_2 N_2(t)\Delta t + \mu_2 V(N_1(t), N_2(t))N_2(t)\Delta t.$$

Dále lze předpokládat, že funkce N_1 a N_2 jsou diferencovatelné a funkce μ_1, μ_2 a V jsou spojité. Z předchozích rovnic dostaneme limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ třídu modelů

$$N_1' = \mu_1(N_1)N_1 - V(N_1, N_2)N_2,$$

$$N_2' = [-\varepsilon_2 + \mu_2(V(N_1, N_2))]N_2.$$

Ze seskupení modelů dostaneme vymezením funkcí μ_1, μ_2 a V konkrétní modely. První hypotézou je, že se izolovaná populace kořisti vyvíjí podle Verhulstova modelu. Druhou hypotézou jsou dravci, kteří si vzájemně na lovu nepřekážejí, ale ani nespolupracují. Podíl vývoje dravce je přímo úměrný počtu snědené kořisti. A za uvedených předpokladů lze zjednodušit modely na tvar:

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1)N_1 - V(N_1)N_2,$$

$$N_2' = [-\varepsilon_2 + \kappa V(N_1)]N_2.$$

(14)

Nyní je potřeba klasifikovat funkci V , která se nazývá funkcionální odezva, funkční odpověď predátora nebo trofická funkce. Za model typu (14) lze považovat klasický i modifikovaný Lotkúv-Volterrův model s funkcionální odezvou $V(N_1) = \gamma_1 N_1$. V tento moment však není V nijak ohraničená, a tak tato funkce není realistická. V reálném světě jeden dravec zahubí pouze určitý objem kořisti i při jejím neomezeném množství. Takto vymezené množství kořisti nazveme hladinou nasycení. Předpokladem bude spojitost funkcionální odezvy a funkce V musí splňovat podmínky: pokud není žádná kořist k dispozici, dravci nic nezahubí ($V(0) = 0$). Pokud je kořisti nadbytek, zahubí dravec maximálně S jedinců kořisti za jednotku času ($\lim_{N_1 \rightarrow \infty} V(N_1) = S$). Poslední podmínkou je, že pokud se množství dostupné kořisti zvýší, tak dravci jí nezahubí méně (funkce V je neklesající). Lze rozlišit čtyři typy funkcionální odezvy, které splňují tyto uvedené podmínky.

Typ I. se zabývá případem, kdy objem zahubené kořisti je přímo úměrný množství dostupné kořisti, pokud je kořisti méně, než představuje hladinu nasycení dravce. Počet snědené kořisti odpovídá hladině nasycení dravce, jestliže je kořisti nadbytek. Funkcionální odezvu, kde a je kladná konstanta, je možné znázornit ve tvaru

$$V(x) = \begin{cases} ax, & x < S/a \\ S, & x \geq S/a. \end{cases}$$

Typ II. jedná se o konkávně rostoucí diferencovatelnou funkci, která se asymptoticky blíží k hladině nasycení. Stručně řečeno je hladkou aproximací funkcionální odezvy funkce typu I. K vyhlazení funkce dochází, pokud dravec nevidí rozdíl mezi nasycením a skoro nasycením. Funkcionální odezvu (trofickou funkci), kde a je kladná konstanta a $k \in (0, 1)$, lze například zapsat ve tvaru

$$V(x) = S \frac{ax^k}{ax^k + 1}.$$

Typ III. je rostoucí funkce. Grafem je esovitá hladká křivka blížící se asymptoticky k hladině nasycení. Jde o hladkou aproximaci funkce typu IV (viz dále). K vyhlazení křivky může dojít výskytem skrýše kořisti a zároveň dostupností jiných zdrojů potravy dravce. Funkcionální odezvu, kde a je kladná konstanta a $k > 1$, lze znázornit například ve tvaru

$$V(x) = S \left(1 - e^{-ax^k}\right).$$

Typ IV. lze použít ve dvou různých případech, které mohou nastat. Je charakteristický pro živočichy schopné složitějšího chování, například obratlovce. Zprvce může prostředí obsahovat nějaké skrýše pro kořist, tato kořist se stává pro dravce nedostupná, tím pádem loví dravci pouze neukrytou kořist, která je přímo úměrná jejich počtu. Nebo zadruhé dravci kořist neloví, když je jí málo. Začnou kořist lovit až když je její množství větší než daná prahová hodnota. Takováto situace nastává tehdy, pokud pro dravce není kořist z uvažované populace jediným zdrojem obživy. Tento jev nazveme přeskokem preferencí dravce neboli konzumenta. Funkcionální odezvu, kde a, b jsou kladné konstanty, lze vyjádřit následovně [9], [19].

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < b/a \\ ax - b, & b/a \leq x \leq (S + b)/a. \\ S, & x > (S + b)/a \end{cases}$$

3.6 Koexistence dvou konkurujících si populací zprostředkovaná dravcem

V tomto modelu bude společenstvo tvořeno třemi populacemi. První dvě populace jsou kořist. Tyto populace si navzájem konkurují v oblasti omezenosti prostředí a zdrojů, a současně obě představují obživu pro populaci dravce, tedy populaci třetí. Pro lepší orientaci bude uveden příklad: představme si populaci zeber a antilop, které soupeří o území, vodu, obživu a úkryt; na druhé straně si představme lva, který se danými populacemi živí. Bude použito následující označení pro $i, j = 1, 2$, za předpokladu, že všechny uvedené konstanty jsou kladné:

$N_i = N_i(t)$... velikost i -té populace kořisti v čase t ,

$M = M(t)$... velikost populace dravce v čase t ,

ε_i ... míra růstu malé a izolované i -té populace kořisti,

$-\varepsilon_3$... míra růstu populace dravce za nepřítomnosti kořisti,

α_{ii} ... míra vnitrodruhové konkurence i -té populace kořisti,

$\alpha_{ij}, i \neq j$... míra mezidruhové konkurence mezi i -tou a j -tou populací kořisti,
 N_1, N_2 ... velikosti populací kořisti jedna a dvě,
 $\varphi_i(N_1, N_2)$... jednotkové množství kořisti z i -té populace za jednotku času, kterou zlikviduje populace dravce.

Dalším předpokladem bude velikost přírůstku populace dravce k její okamžité velikosti a času, která je přímo úměrná velikosti zlikvidované populace kořisti a zároveň je přírůstek populace kořisti přičten k tomuto přírůstku. Na základě tohoto předpokladu bude mít model uvažovaného společenstva tvar systému tří diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
 N_1' &= N_1(\varepsilon_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2) - M\varphi_1(N_1, N_2), \\
 N_2' &= N_2(\varepsilon_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2) - M\varphi_2(N_1, N_2), \\
 M' &= M(-\varepsilon_3 + k_1\varphi_1(N_1, N_2) + k_2\varphi_2(N_1, N_2)).
 \end{aligned}$$

Dále budeme předpokládat, že dravec zahubí tím více i -té populace kořisti, čím více je jí přítomno, pokud není přítomna j -tá populace kořisti. Samozřejmě i v tomto modelu může dravec zničit jen omezené množství kořisti i při její neomezené velikosti, toto množství se rovná hladině nasycení dravce. Jestliže je součástí společenstva i j -tá populace kořisti, je hladina nasycení dravce i -tou kořistí menší, protože se dravec živí i touto populací. A čím více je dravci k dispozici j -tá kořist, tím méně konzumuje i -tou kořist, platí to i obráceně. Za těchto předpokladů je nejjednodušší podoba funkce φ_i s kladnými konstantami p_i, q_j, γ_i zobrazena následovně:

$$\varphi_i(N_1, N_2) = \frac{\gamma_i}{(p_i + N_i)(q_j + N_j)} N_i, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Když není přítomna j -tá populace kořisti, je hladina nasycení dravce i -tou populací kořisti

$$\frac{\gamma_i}{q_j} = \lim_{N_i \rightarrow \infty} \varphi_i(N_1, N_2).$$

Pokud označíme $\kappa_i = k_i\gamma_i$, můžeme model uvažovaného společenstva zaznamenat ve tvaru [9]:

$$\begin{aligned}
 N_1' &= N_1(\varepsilon_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2) - \frac{\gamma_1 N_1 M}{(p_1 + N_1)(q_2 + N_2)}, \\
 N_2' &= N_2(\varepsilon_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2) - \frac{\gamma_2 N_2 M}{(p_2 + N_2)(q_1 + N_1)},
 \end{aligned}$$

$$M' = M \left(-\varepsilon_3 + \frac{\kappa_1 N_1}{(p_1 + N_1)(q_2 + N_2)} + \frac{\kappa_2 N_2}{(p_2 + N_2)(q_1 + N_1)} \right).$$

3.7 Modely chování – vývoj vzorců chování

V této podkapitole bude vysvětleno modelování dynamiky konfliktů jedinců, kteří si konkurují v boji o zdroje (voda, potrava, území, místo na slunci; v ekonomii pak suroviny, dodavatelé apod.).

Příklad: V jedné zoologické zahradě provedl H. Kummer pokus s pozorováním pavíánů [12]. Zavřel dva samce do jednoho výběhu. Nutno podotknout, že samci se dřív neznali. Samce A nechal ve výběhu na volno, měl volný pohyb a samce B zavřel do menší klece. Samec B pozoroval chování druhého samce a nijak do něj nezasahoval. Pak Kummer do výběhu přidal samici, která se se samci nikdy dřív nepoznala. Během pár minut se samec A začal chovat jako její „vlastník“. Následně byl vypuštěn z klece samec B, který se vyhnul jakémukoli styku se samcem A i samicí. Toto chování mohlo být vysvětleno dvěma způsoby, za prvé si mohl samec B připadat slabší, a tak neriskoval konflikt se samcem A. Anebo za druhé respektoval „vlastnická práva“ druhého samce. Poté Kummer pokus opakoval obráceně. Samce na dva týdny oddělil a následně je dal do výběhu, kde samec B se mohl volně pohybovat a samec A byl v menší kleci. Tentokrát si samici přisvojil samec B a samec A tyto „vlastnická práva“ respektoval. Dokázal tím, že správný předpoklad bylo druhé vysvětlení.

3.7.1 Obecný model soupeření

Bude předpokládáno, že každý jedinec z uvažované populace projevuje právě jeden z k možných vzorců chování v určitém čase. Zároveň není vyloučena možnost různého chování stejného jedince v různých časech. To znamená, že tentýž jedinec může v různých časech použít různé vzorce chování. Počet jedinců v populaci, kteří používají i -tý vzorec chování v čase t , má označení $n_i = n_i(t)$. Pak počet jedinců populace v čase t bude

$$N = N(t) = \sum_{i=1}^k n_i(t)$$

a frekvence výskytu i -tého vzorce chování v čase t bude

$$x_i = x_i(t) = \frac{n_i}{N}.$$

Dále budeme předpokládat, že funkce $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ jsou diferencovatelné a platí

$$\sum_{i=1}^k x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i = 1.$$

Označení:

- a_{ij} ... zdatnost (průměrný počet potomků za časovou jednotku) jedince používajícího i -tý vzorec chování, který se střetl s jedincem používajícím j -tý vzorec chování, koeficienty a_{ij} jsou konstantní,
- x_{ij} ... pravděpodobnost střetu konkrétního jedince používajícího i -tý vzorec s nějakým jedincem používajícím j -tý vzorec,
- c_i ... průměrný počet potomků (na časovou jednotku) jedince používajícího i -tý vzorec chování,
- $n_i c_i$... počet potomků (na časovou jednotku) všech jedinců používajících i -tý vzorec chování,
- m ... mortalita (průměrný počet jedinců uhynulých za jednotku času) uvažované populace.

Pak platí

$$c_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j$$

Budeme-li uvažovat krátký časový interval Δt bude po úpravě

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + n_i(t)c_i(t)\Delta t - mn_i(t)\Delta t = N(t)x_i(t) \left[1 - m \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j(t) \right) \Delta t \right]$$

a

$$N(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^k n_i(t + \Delta t) = N(t) \left[1 - \left(m - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i(t) a_{ij} x_j(t) \right) \Delta t \right].$$

Označením

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

získáme $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i(t) a_{ij} x_j(t) = \mathbf{x}^T(t) A \mathbf{x}(t)$ a tedy

$$N(t + \Delta t) = N(t)[1 - (m - \mathbf{x}^T(t)A\mathbf{x}(t))\Delta t].$$

Dostaneme

$$x_i(t + \Delta t) = \frac{n_i(t + \Delta t)}{N(t + \Delta t)}$$

a následným dosazením a úpravou získáme

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} = x_i(t) \frac{\sum_{j=1}^k a_{ij}x_j(t) - \mathbf{x}^T(t)A\mathbf{x}(t)}{1 - (m - \mathbf{x}^T(t)A\mathbf{x}(t))\Delta t}.$$

Pomocí limitního přechodu $\Delta t \rightarrow 0$ obdržíme systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$x_i'(t) = x_i(t) \left(\sum_{j=1}^k a_{ij}x_j(t) - \mathbf{x}^T(t)A\mathbf{x}(t) \right),$$

(15)

kde $i = 1, 2, \dots, k$. Má-li systém (15) asymptoticky stabilní stacionární řešení $\mathbf{x}(t) \equiv \hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k]^T$ na množině $S^k = \{[x_1, x_2, \dots, x_k]^T \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1\}$, lze $\hat{\mathbf{x}}$ považovat za ustálené rozložení vzorců chování. Frekvence jednotlivých vzorců chování zůstávají v populaci konstantní, jestliže se nemění koeficienty matice A (vnější podmínky). Když by se frekvence vzorců chování změnila a tato změna by nebyla příliš velká, po čase by se frekvence jednotlivých vzorců chování v populaci vrátila ke stavu $\hat{\mathbf{x}}$. K tomuto může dojít v případě, že se v důsledku například mutace budou někteří potomci chovat jinak než jejich rodiče. Proto takovému rozložení vzorců chování $\hat{\mathbf{x}}$ říkáme evolučně stabilní strategie.

Pro snadnější nalezení stacionárního řešení systému (15), lze zjednodušit jeho pravou stranu. Platí

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^k x_i(t) - 1) = -\mathbf{x}^T(t)A\mathbf{x}(t).$$

Integrací této rovnosti v mezích od 0 do t a úpravou získáme

$$\sum_{i=1}^k x_i(t) - 1 = \left(\sum_{i=1}^k x_i(0) - 1 \right) \exp\left(\int_t^0 \mathbf{x}^T(s)A\mathbf{x}(s) ds \right).$$

Z čehož vyplývá, že pro všechna $t \geq 0$, plyne z rovnosti $\sum_{i=1}^k x_i(0) = 1$ platnost rovnosti

$$\sum_{i=1}^k x_i(t) = 1.$$

Toto poukazuje na to, že S^k je invariantní množina systému (15). Tento poznatek umožňuje zredukovat dimenzi systému o jedna. Při následujícím výpočtu bude pro zkrácený zápis použito Kroneckerovo delta (matematická funkce dvou proměnných), kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \\ 0 & \text{je-li } i \neq j. \end{cases}$$

Ze vztahu $x_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x_j$ plyne

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}x_j + -\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k a_{ij}x_j - \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^k x_l a_{lj}x_j,$$

následnými úpravami dostaneme

$$\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\delta_{il} - x_l) [(a_{lj} - a_{lk} - a_{kj} + a_{kk})x_j + a_{lk} - a_{kk}].$$

Označení pro $i, j = 1, 2, \dots, k-1$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ik} - a_{kj} + a_{kk}, \quad b_i = a_{kk} - a_{ik},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{(k-1)1} & \cdots & \tilde{a}_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{i(k-1)} \end{bmatrix},$$

kde \mathbf{e}_i je i -tý prvek standardní báze vektorového prostoru \mathbb{R}^{k-1} . Z předchozího výpočtu vyplývá, že systém (15) lze zredukovat na

$$x'_i = x_i(\mathbf{e}_i - \mathbf{x})^T (\tilde{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

(16)

pro všechna $i = 1, 2, \dots, k-1$. V uvažované populaci je systém (16) modelem vývoje frekvence výskytu prvního až $(k-1)$ -tého vzorce chování. Řešení tohoto systému pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$, která splňují následující nerovnost jsou relevantní

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i(t) \leq 1.$$

(17)

Invariantní množinou systému (16) je množina

$$R^{k-1} = \left\{ [x_1, x_2, \dots, x_{k-1}] \in \mathbb{R}^{k-1} : \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leq 1 \right\}.$$

Proto každé řešení systému (16) splňující podmínku $\sum_{i=1}^{k-1} x_i(0) \leq 1$ splňuje i nerovnost (17). Z tvaru systému (16) je také vidět, že pokud se v populaci nějaký vzorec chování nevyskytoval na začátku, nemůže se v ní objevit (každá podmnožina množiny R^{k-1} je jeho invariantní množinou). Tento systém má k stacionárních řešení v množině R^{k-1}

$$\mathbf{x}(t) \equiv \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, \dots, k-1, \quad \mathbf{x}(t) \equiv \hat{\mathbf{x}}_k = [0, 0, \dots, 0].$$

Pokud v množině R^{k-1} existuje řešení $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*]$ soustavy lineárních algebraických rovnic $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak stacionárním řešením systému (16) je také $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^*$ [9].

3.7.2 Model soupeření „jestřábů“ a „holubic“

Budou uvažovány dva druhy chování, jiný druh se v populaci nevyskytuje. Jedinec, který používá první druh chování, se nazývá „jestřáb“. Při tomto chování jedinec bojuje o zdroje a ustoupí pouze po prohraném boji. Jedinec, který používá druhý druh chování, se nazývá „holubice“. Při tomto chování jedinec o zdroje nebojuje. Spotřebovává je pouze, pokud jeho protivník ustoupí. Označení:

c ... zdatnost jedince nespotebovávajícího zdroj,

$V > 0$... užitek ze spotřebovaného zdroje neboli přírůstek zdatnosti,

$D > 0$... náklady na boj neboli úbytek zdatnosti,

x ... frekvence „jestřábů“ v populaci.

Předpokládá se, že všichni jedinci používající první druh chování „jestřáb“, jsou stejně silní. To znamená, že při střetu dvou „jestřábů“ bude pravděpodobnost spotřebování zdroje obou jedinců stejná a rovna 0,5. Při setkání dvou holubic je pravděpodobnost spotřebování pro kteroukoliv z nich také stejná, protože kterákoli z nich může ustoupit a přenechat zdroj druhé. Při setkání „jestřába“ s „holubicí“ zdroj spotřebovuje „jestřáb“. Tedy

$$a_{11} = c + \frac{V-D}{2}, \quad a_{12} = c + V, \quad a_{21} = c, \quad a_{22} = c + \frac{V}{2},$$

$$\tilde{a}_{11} = c + \frac{V-D}{2} - (c+V) - c + c + \frac{V}{2} = -\frac{D}{2},$$

$$b_1 = c + \frac{V}{2} - (c+V) = -\frac{V}{2}.$$

Model (16) je nyní ve tvaru

$$x' = x(1 - x) \left(-\frac{D}{2}x + \frac{V}{2} \right).$$

(18)

Stacionární řešení rovnice (18) jsou:

- $x(t) \equiv 0$... v populaci jsou pouze „holubice“,
- $x(t) \equiv 1$... v populaci se vyskytují pouze „jestřábi“,
- $x(t) \equiv V/D$, jelikož $x \in \langle 0, 1 \rangle$, má toto řešení význam pouze pokud $V < D$.

Pravou stranu rovnice (18) označme $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)(Dx-V)$, pak její derivace bude

$$f'(x) = \frac{3}{2}Dx^2 - (V+D)x + \frac{V}{2},$$

tedy

$$f'(0) = \frac{V}{2}, \quad f'(1) = \frac{D-V}{2}, \quad f'\left(\frac{V}{D}\right) = \frac{V(V-D)}{2D}.$$

Z toho plyne, že první stacionární řešení $x(t) \equiv 0$ je nestabilní. Pokud je $D < V$, je stacionární řešení $x(t) \equiv 1$ asymptoticky stabilní. Pokud je $V < D$, je stacionární řešení $x(t) \equiv V/D$ asymptoticky stabilní a $x(t) \equiv 1$ je nestabilní.

Závěrem je, že v populaci převládnu „jestřábi“, je-li užitek ze zdrojů větší než náklady na boj o zdroje ($D < V$). Poměr frekvencí výskytu „jestřábů“ a „holubic“ v populaci se ustálí na hodnotě $V/(D-V)$, pokud jsou náklady na boj větší než užitek ze zdrojů ($V < D$). Podíl „holubic“ v populaci roste s rostoucími náklady na boj [9].

4 MOŽNOSTI VYUŽITÍ DYNAMICKÝCH POPULAČNÍCH MODELŮ V EKONOMII

V této kapitole bude ukázáno několik druhů využití populačních modelů v ekonomii. Jako první bude ukázán příklad modelu růstu populace živých organismů a jeho využití v ekonomice s pyramidovým systémem (například multilevel marketing). Následně bude převeden model konkurence dvou druhů do ekonomického prostředí. Další využití bude vysvětleno na modelu symbiózy dvou druhů, kde budou popsány podniky, které vyrábí vzájemné komplementy. Na závěr této kapitoly bude zobrazeno využití modelu dravec-kořist.

4.1 Využití modelu růstu populace živých organismů

Jako příklad jsem si vybrala využití modelu v multilevel marketingu s pyramidovým systémem. Budou ukázány dvě možné situace, které mohou nastat za použití Malthusova modelu. Budeme předpokládat, že specifická míra růstu není konstantní, ale závisí na množství dostupných potenciálních spolupracovníků.

Příklad 1

Využití Malthusova modelu v multilevel marketingu. Úspěšnost nově najatých spolupracovníků bude 25 % (specifická míra růstu), přičemž budeme předpokládat, že ne každý spolupracovník bude úspěšný a zůstane u této práce. Nárůst spolupracovníků můžeme modelovat diferenciální rovnicí ve tvaru $x'(t) = 0,25x(t)$. Za jednotku času bude narůstat úbytek spolupracovníků o jedna. Jednotka času bude v našem případě jeden měsíc a na začátku pokusu se domluví 14 kamarádů, že začnou spolupracovat. Množství spolupracovníků v čase vyjádříme diferenciální rovnicí:

$$x' = 0,25x - 1t.$$

Na začátku máme 14 kamarádů, počáteční podmínka je tedy $x(0) = 14$. A zajímá nás, kdy bude množství spolupracovníků dosahovat maxima. Homogenní úloha má tvar $x' = 0,25x$ a její obecné řešení je ve tvaru $x(t) = ce^{0,25t}$. Řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $x(t) = c(t)e^{0,25t}$ a po dosazení do rovnice výše získáme

$$c'(t)e^{0,25t} + 0,25c(t)e^{0,25t} = 0,25c(t)e^{0,25t} - t,$$

odtud jednoduchou úpravou dostaneme

$$c'(t) = -te^{-0,25t}.$$

Výpočet provedeme integrací pravé strany $-te^{-0,25t}$, k čemuž budeme potřebovat metodu per partes $\int fg' = fg - \int f'g$. Při volbě

$$f = -t, \quad f' = -1, \quad g' = e^{-0,25t}, \quad g = \frac{e^{-0,25t}}{-0,25}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \int -te^{-0,25t} &= -t \frac{e^{-0,25t}}{-0,25} - \int -1 \frac{e^{-0,25t}}{-0,25} = 4te^{-0,25t} - 4 \int e^{-0,25t} = \\ &= 4te^{-0,25t} - 4 \frac{e^{-0,25t}}{-0,25} + k = 4te^{-0,25t} + 16e^{-0,25t} + k. \end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy

$$x(t) = 16 + 4t + ke^{0,25t}.$$

V čase $t = 0$ je $x(0) = 16 + k = 14$, což znamená, že $k = -2$. Řešení Cauchyovy úlohy pak bude

$$x(t) = 16 + 4t - 2e^{0,25t}.$$

Teď budeme potřebovat vypočítat první a druhou derivaci $x(t)$

$$x'(t) = 4 - 0,5e^{0,25t}, \quad x'' = -0,125e^{0,25t}$$

Jelikož je $x''(t) < 0$ pro každé t a funkce je konkávní, maximum bude dosahovat hodnoty, kdy $x'(t) = 4 - 0,5e^{0,25t} = 0$. Řešením rovnice

$$4 - 0,5e^{0,25t} = 0$$

dostaneme

$$t = \frac{\ln(8)}{0,25}$$

$$t_{max} = 8,3178.$$

Dosazením t_{max} do Cauchyovy úlohy dostaneme maximální počet spolupracovníků

$$x(8,3178) \cong 32.$$

Maximální počet spolupracovníků dostaneme po zhruba 8,3 měsíce a bude to přibližně 32 spolupracovníků, poté bude jejich počet opět klesat.

Příklad 2

Pokud bychom udělali pesimističtější odhad a zvolili za specifickou míru růstu pouze 10 %, míru úbytku za jednotku času 3 a počáteční podmínku ponechali 14 spolupracovníků, $x(0) = 14$, pak by množství spolupracovníků v čase bylo vyjádřeno diferenciální rovnicí

$$x' = 0,1x - 3t.$$

Homogenní úloha má tvar $x' = 0,1x$ a její obecné řešení je ve tvaru $x(t) = ce^{0,1t}$. Řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $x(t) = c(t)e^{0,1t}$, což můžeme přepsat na tvar

$$c'(t)e^{0,1t} + 0,1c(t)e^{0,1t} = 0,1c(t)e^{0,1t} - 3t,$$

odtud jednoduchou úpravou dostaneme

$$c'(t) = -3te^{-0,1t}.$$

Výpočet provedeme obdobně jako u příkladu 1, integrací pravé strany $-3te^{-0,1t}$, k čemuž budeme potřebovat metodu per partes $\int fg' = fg - \int f'g$. Označení:

$$f = -3t, \quad f' = -3, \quad g' = e^{-0,1t}, \quad g = \frac{e^{-0,1t}}{-0,1}.$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int -3te^{-0,1t} &= -3t \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} - \int -3 \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} = 30te^{-0,1t} - 30 \int e^{-0,1t} = \\ &= 30te^{-0,1t} - 30 \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} + k = 30te^{-0,1t} + 300e^{-0,1t} + k. \end{aligned}$$

Z čehož vyplývá, že obecné řešení je

$$x(t) = 300 + 30t + ke^{0,1t}.$$

Pomocí počáteční podmínky spočítáme konstantu k , tedy $x(0) = 300 + k = 14$, což znamená, že $k = -286$. Řešení Cauchyovy úlohy pak bude

$$x(t) = 300 + 30t - 286e^{0,1t}.$$

Teď budeme potřebovat vypočítat první a druhou derivaci $x(t)$

$$x'(t) = 30 - 28,6e^{0,1t}, \quad x'' = -2,86e^{0,1t}$$

Jelikož je $x''(t) < 0$ pro všechna t a funkce je konkávní, maximum bude dosahovat hodnoty, kdy $x'(t) = 30 - 28,6e^{0,1t} = 0$ a. Řešením rovnice

$$30 - 28,6e^{0,1t} = 0$$

dostaneme

$$t = \frac{\ln(30) - \ln(28,6)}{0,1}$$

$$t_{max} = 0,4779.$$

Dosažením t_{max} do Cauchyovy úlohy dostaneme maximální počet spolupracovníků.

$$x(0,4779) \cong 14,3.$$

Maximálního počtu spolupracovníků s pesimistickým odhadem dosáhneme po necelém půl měsíce od začátku, ovšem jejich počet nepřesáhne číslo 14, se kterým začínáme.

Závěr: V multilevel marketingu můžeme dosahovat krátkodobě zisku, ale z dlouhodobého hlediska tento typ podnikání není dle mého názoru příliš výnosný. K velkým ziskům bychom museli mít velké procento úspěchu při hledání nových spolupracovníků a malou míru úbytku v podobě pracovníků, kteří z podnikání odejdou.

U proměnné x se předpokládá spojitost a diferencovatelnost, což v uváděných příkladech není splněno. U početnějších populací by bylo možno tento předpoklad bez vážnějších důsledků ignorovat, ovšem i u těch méně početných lze získat poměrně přesné výsledky.

4.2 Využití modelu konkurence dvou druhů

Pro využití modelu konkurence využijeme dva podniky, které působí ve stejném prostředí, soupeří spolu o území, zdroje (v našem případě dodavatele), o své zákazníky apod. Označíme N_1 velikost prvního podniku, ε_1 střední rychlost růstu prvního podniku na jednoho zaměstnance, N_2 velikost druhého podniku a ε_2 střední rychlost růstu druhého podniku na jednoho zaměstnance. Vlivem omezenosti zdrojů (dodavatelů) může docházet u větších podniků ke zpomalení jejich růstu. Při výpočtu budeme dále potřebovat: α_{11} představuje maximální rychlost růstu prvního podniku neboli potenciál podniku, α_{22} pak obdobně bude maximální rychlost růstu druhého z podniků. α_{12} znázorňuje intenzitu konkurenčního tlaku druhého podniku na první, kterou můžeme vypočítat pomocí síly konkurenčního tlaku druhé populace na první a úživnosti prostředí pro druhý podnik $\alpha_{12} = a_{12}K_2$. Pak α_{21} vyjadřuje intenzitu konkurenčního tlaku prvního podniku na druhý, který lze vyjádřit pomocí síly konkurenčního tlaku první populace na druhou a úživnosti prostředí pro první podnik, tedy

$\alpha_{21} = a_{21}K_1$. Pro výpočet použijeme matematický model založený na systému dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (1 - N_1 - aN_2)N_1,$$

$$N_2' = (c - bN_1 - N_2)N_2,$$

kde $a = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$, $b = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$, $c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Stejně jako u modelu konkurence mezi dvěma biologickými druhy rozlišujeme i tady silnou konkurenci, slabou konkurenci a dominanci jednoho z druhů.

Jako ukázkou využijeme dva podniky, které vyrábí vzájemné substituty. To jsou výrobky, které za sebe lze vzájemně vyměnit, aniž by změnily svůj potenciál, například rohlíky a housky, čaj a káva nebo Kofola a Pepsi a další. Pro náš příklad použijeme pekařství, kdy jeden podnik bude vyrábět rohlíky a druhý housky. První podnik bude mít 250 zaměstnanců, střední rychlost růstu 0,15, maximální rychlost růstu 0,35 a intenzitu konkurenčního tlaku, kterou na podnik vyvíjí druhý z podniků 2. Druhý podnik bude mít 200 zaměstnanců, střední rychlost růstu 0,3, maximální rychlost růstu 0,35 a intenzitu konkurenčního tlaku vyvíjeného prvním podnikem 2,8. Tedy

$$N_1 = 250, \quad N_2 = 200,$$

$$\varepsilon_1 = 0,15, \quad \varepsilon_2 = 0,3,$$

$$\alpha_{11} = 0,35, \quad \alpha_{22} = 0,4,$$

$$\alpha_{12} = 2, \quad \alpha_{21} = 2,8.$$

Nyní dopočítáme parametry a , b a c

$$a = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{2}{0,4} = 5,$$

$$b = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \frac{2,8}{0,35} = 8,$$

$$c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{0,3}{0,15} = 2.$$

Pomocí těchto hodnot parametrů následně zjistíme, o který ze čtyř případů se jedná v našem příkladu. Protože $b > c$, může jít o případ II., model silné konkurence nebo model IV., který značí dominanci prvního podniku. Vzhledem k tomu, že $ac > 1$, jedná se o druhý z případů, a tedy model silné konkurence. V tomto modelu musí dále platit nerovnost $ab > ac > 1$, což je

$40 > 10 > 1$. Vidíme, že vztah platí, a tedy máme v tomto případě čtyři singulární body v prvním kvadrantu

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad [0, c], \quad \left[\frac{1-ac}{1-ab}, \frac{c-b}{1-ab} \right].$$

Po dosazení získáme body

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad [0, 2], \quad \left[\frac{3}{13}, \frac{2}{13} \right].$$

Jacobiho matice je

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2N_1 - aN_2 & -aN_1 \\ -bN_2 & c - bN_1 - 2N_2 \end{bmatrix}.$$

Hodnoty matice v singulárních bodech $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, c]$ a jejich příslušná vlastní čísla budou

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1 > 0, \quad \lambda_2 = 2 > 0,$$

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & c-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = -6 < 0,$$

$$J(0,c) = \begin{bmatrix} 1-ac & 0 \\ -bc & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -16 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -9 < 0, \quad \lambda_2 = -2 < 0.$$

V singulárním bodě $[\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \left[\frac{1-ac}{1-ab}, \frac{c-b}{1-ab} \right]$ bude hodnota Jacobiho matice

$$J(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = \begin{bmatrix} \frac{ac-1}{1-ab} & -a \frac{1-ac}{1-ab} \\ -b \frac{c-b}{1-ab} & \frac{b-c}{1-ab} \end{bmatrix}$$

a následná charakteristická rovnice bude mít tvar

$$\lambda^2 - \frac{ac-1+b-c}{1-ab} \lambda + \frac{(1-ac)(c-b)}{1-ab} = 0.$$

Po dosazení parametrů a úpravě získáme rovnici

$$39\lambda^2 + 15\lambda - 54 = 0$$

kvadratická rovnice se vypočítá pomocí vzorce

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

kde D je diskriminant a $D = b^2 - 4ac$. Nyní dopočítáme diskriminant D

$$D = 15^2 - 4 \cdot 39 \cdot (-54) = 225 + 8\,424 = 8\,649.$$

$D > 0$, takže můžeme pokračovat dosazením do vzorce na výpočet kvadratické rovnice

$$\lambda_1 = \frac{-15 + \sqrt{8\,649}}{2 \cdot 39} = \frac{-15 + 93}{78} = 1 > 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{-15 - \sqrt{8\,649}}{2 \cdot 39} = \frac{-15 - 93}{78} = -\frac{54}{39} < 0.$$

Z těchto výpočtů vyplývá, že singulární bod $[0, 0]$ je nestabilní uzel, singulární body $[1, 0]$ a $[0, 2]$ jsou stabilní uzly a singulární bod $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$ je sedlo.

Závěr: Jedná se o silnou konkurenci mezi podniky. Lze očekávat zkrachování neboli skončení činnosti jednoho z podniků. Úživnost prostředí není stabilní pro oba podniky zároveň, uživí pouze jeden z nich. Který podnik nakonec vyhraje konkurenční boj a zůstane, to záleží na mnoha dalších faktorech, například na dodavatelích, jejich cenách a kvalitě, na kvalitě samotného výrobku podniku, na odběratelích tedy zákaznících, jak budou spokojeni s jednotlivými podniky s ohledem na cenu a kvalitu produktu, a v neposlední řadě i na tom kolik zákazníků má rádo housky a kolik zákazníků má rádo rohlíky. Velikost podniku zde byla vyjádřena počtem zaměstnanců, ale bylo by možné použít i jiné ukazatele, např. hospodářský výsledek, roční obrat apod.

4.3 Využití modelu symbiózy dvou druhů

Předpokladem pro využití symbiózy bude soužití dvou podniků, které se vzájemně podporují. Přítomnost jednoho podniku na trhu urychluje růst podniku druhého. Podniky vyrábí vzájemné komplementy, to jsou výrobky, které se navzájem doplňují. Můžeme mezi ně zařadit například výrobce DVD přehrávačů a výrobce DVD filmů, výrobce herních konzolí a výrobce her do těchto konzolí, tenisovou raketu a míčky nebo výrobce tiskáren a výrobce papíru, výrobce postelí a matrací apod. Označíme N_1 velikost prvního podniku, N_2 velikost druhého podniku, ε_1 specifickou míru růstu prvního podniku a ε_2 specifickou míru růstu druhého z podniků. Při výpočtu budeme dále potřebovat: α_{11} představuje maximální rychlost růstu prvního podniku neboli potenciál podniku, α_{22} pak obdobně bude maximální rychlost růstu druhého z podniků. α_{12} znázorňuje intenzitu podpory druhého podniku vzhledem k prvnímu podniku neboli relativní sílu mutualismu (soužití). Pak α_{21} vyjadřuje intenzitu podpory prvního podniku vzhledem k druhému podniku neboli relativní sílu mutualismu. Pro výpočet použijeme matematický model založený na systému dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (1 - N_1 + aN_2)N_1,$$

$$N_2' = (c + bN_1 - N_2)N_2,$$

kde $a = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$, $b = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$, $c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Můžeme si všimnout, že máme obdobný model jako u využití konkurence, pouze jsme upravili znaménka. Existují dva typy mutualismu: slabý a silný.

Pro tento příklad použijeme podniky, které vyrábí vzájemné komplementy. Podniky se nacházejí samozřejmě ve stejném prostředí. První podnik bude vyrábět tiskárny, jeho velikost bude činit 200 zaměstnanců, jeho specifická míra růstu ε_1 bude 0,35, maximální rychlost růstu pak dosahuje hodnoty 0,45 a relativní síla mutualismu činí 0,6. Druhý podnik bude vyrábět papír, jeho velikost bude činit 300 zaměstnanců, jeho specifická míra růstu ε_2 bude 0,4, maximální rychlost růstu pak dosahuje hodnoty 0,55 a relativní síla mutualismu činí 0,4. Všimněte si, že tiskárna papír potřebuje, bez něj nemůže fungovat, proto zvýšený prodej výrobků jednoho podniku znamená zvýšený prodej a tím i zisk pro druhý podnik. Jelikož papír má vícero využití a může se prodávat i bez potřeby tiskárny jeho síla mutualismu je nižší než síla podniku, který vyrábí tiskárny. Tedy

$$\begin{aligned} N_1 &= 200, & N_2 &= 300, \\ \varepsilon_1 &= 0,35, & \varepsilon_2 &= 0,4, \\ \alpha_{11} &= 0,45, & \alpha_{22} &= 0,55, \\ \alpha_{12} &= 0,6, & \alpha_{21} &= 0,4. \end{aligned}$$

Nyní dopočítáme parametry a , b a c

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{0,6}{0,55} = \frac{12}{11}, \\ b &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \frac{0,4}{0,45} = \frac{8}{9}, \\ c &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{0,4}{0,35} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

Pomocí těchto hodnot nyní zjistíme, o jaký typ mutualismu se jedná. Jelikož $ab = \frac{12}{11} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{33} < 1$ jedná se o typ slabého mutualismu. V tomto případě máme v prvním kvadrantu čtyři singulární body

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad [0, c], \quad [\overline{N}_1, \overline{N}_2],$$

$$\text{kde } [\overline{N}_1, \overline{N}_2] = \left[\frac{1+ac}{1-ab}, \frac{b+c}{1-ab} \right].$$

Po dosazení získáme následující body

$$[0, 0], \quad [1, 0], \quad \left[0, \frac{8}{7}\right], \quad \left[\frac{519}{7}, \frac{1408}{21}\right].$$

Jacobiho matice je

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2N_1 + aN_2 & aN_1 \\ bN_2 & c + bN_1 - 2N_2 \end{bmatrix}.$$

Hodnoty matice v singulárních bodech $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, c]$ a jejich příslušná vlastní čísla budou

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1 > 0, \quad \lambda_2 = \frac{8}{7} > 0,$$

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{12}{11} \\ 0 & \frac{128}{63} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = \frac{128}{63} > 0,$$

$$J(0,c) = \begin{bmatrix} 1+ac & 0 \\ -bc & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{173}{77} & 0 \\ -\frac{64}{63} & -\frac{8}{7} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{173}{77} > 0, \quad \lambda_2 = -\frac{8}{7} < 0.$$

V singulárním bodě $[\overline{N}_1, \overline{N}_2]$ bude hodnota Jacobiho matice

$$J(\overline{N}_1, \overline{N}_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1+ac}{1-ab} & a\frac{1+ac}{1-ab} \\ \frac{b+c}{1-ab} & -\frac{b+c}{1-ab} \end{bmatrix}$$

a následná charakteristická rovnice bude mít tvar

$$\lambda^2 + \frac{1+b+c+ac}{1-ab}\lambda + \frac{(1+ac)(b+c)}{1-ab} = 0.$$

Po dosazení parametrů dostaneme

$$\lambda^2 + \frac{1 + \frac{8}{9} + \frac{8}{7} + \frac{12}{11} \cdot \frac{8}{7}}{1 - \frac{12}{11} \cdot \frac{8}{9}} \lambda + \frac{\left(1 + \frac{12}{11} \cdot \frac{8}{7}\right) \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{7}\right)}{1 - \frac{12}{11} \cdot \frac{8}{9}} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2965}{21}\lambda + \frac{22144}{147} = 0$$

a pro zjednodušení vynásobíme rovnici 147 a získáme

$$147\lambda^2 + 20755\lambda + 22144 = 0.$$

Opět jako v předchozím příkladu vypočítáme kvadratickou rovnici pomocí diskriminantu a ten se rovná

$$D = 20\,755^2 - 4 \cdot 147 \cdot 22\,144 = 417\,749\,353.$$

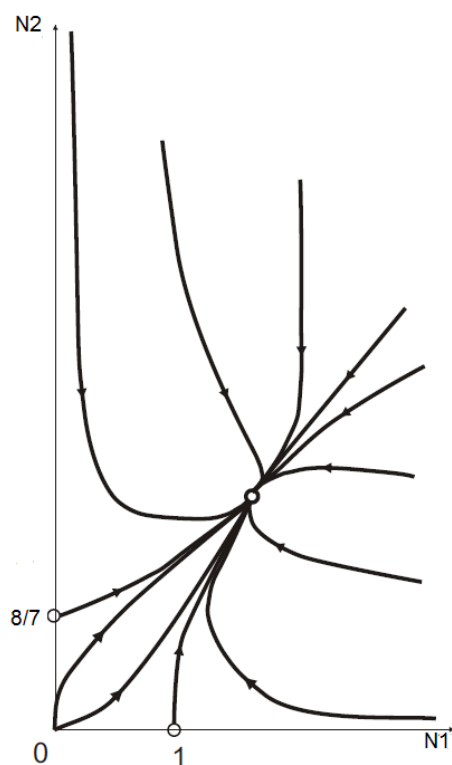
$D > 0$, takže můžeme dosadit do vzorce na výpočet kvadratické rovnice

$$\lambda_1 = \frac{-20\,755 + \sqrt{417\,749\,353}}{2 \cdot 147} \cong -1,075 < 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{-20\,755 - \sqrt{417\,749\,353}}{2 \cdot 147} \cong -140,115 < 0.$$

Z těchto výpočtů vyplývá, že singulární bod $[0, 0]$ je nestabilní uzel, singulární body $[1, 0]$ a $\left[0, \frac{8}{7}\right]$ jsou sedla a singulární bod $[\bar{N}_1, \bar{N}_2]$ je stabilní uzel, protože jsou vlastní čísla reálná, různá a záporná.

Závěr: Jedná se o model symbiózy dvou druhů typu slabého mutualismu (obr. 8). Oba podniky přežijí a budou prosperovat. Jejich hodnoty se ustálí na hodnotách, které jsou větší, než kdyby byly podniky osamoceny v tomtéž prostředí, bez využití symbiózy. Kdyby k soužití neboli vzájemné výpomoci mezi podniky nedocházelo, podniky by také prosperovaly a uživily by se, ovšem jejich hodnoty by nedosahovaly takových výsledků jako při využití spolupráce a měly by pomalejší tempo růstu. Podle mého názoru se tato spolupráce vyplatí a je dobré si ji udržet. Velikost podniku zde byla vyjádřena počtem zaměstnanců, ale bylo by možné použít jiné ukazatele i v tomto modelu.



Obrázek 8 - Využití modelu symbiózy

Zdroj: Vlastní zpracování

4.4 Využití modelu společenstva dravec-kořist

Tento model má v ekonomii poměrně široké využití. Dá se využít například aplikací Goodwinova modelu při nezaměstnanosti, kdy N_1 by byla míra zaměstnanosti v procentech a N_2 podíl mezd na celkovém produktu [7]. Těmito hodnotami se zde však zabývat nebudeme.

Pro výpočet využijeme matematický model znázorňující systém dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1,$$

$$N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2.$$

Stejně využití může mít model i při výpočtech, kdy N_1 bude průměrná roční míra inflace v procentech a N_2 meziroční růst/pokles reálné mzdy neboli index reálných mezd. Tyto hodnoty si můžeme najít a budeme s nimi nyní pracovat. Při využití modelu si musíme nejprve dopočítat parametry ε_1 , ε_2 , γ_1 a γ_2 . V následující tabulce lze vidět hodnoty průměrné roční inflace v procentech a meziročního růstu/poklesu reálné mzdy v letech 2012 až 2021.

Rok	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Průměrná roční míra inflace v %	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5	2,1	2,8	3,2	3,8
Meziroční růst/pokles reálné mzdy v %	-0,8	-1,5	2,5	2,9	3,7	4,2	5,9	5	1,4	1

Tabulka 1 - Míra inflace a průměrné reálné mzdy

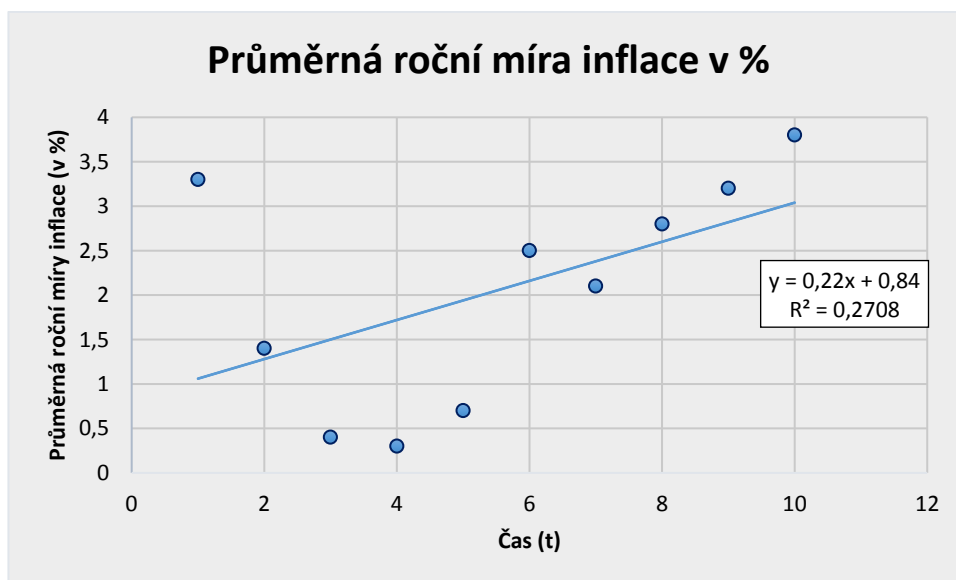
Zdroj: Vlastní zpracování podle [3]

Nejprve si vypočítáme parametry ε_1 a γ_1 . Tyto parametry získáme pomocí lineární aproximace dat průměrné roční míry inflace v čase t , viz následující tabulka a graf.

Čas t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Průměrná roční míra inflace v %	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5	2,1	2,8	3,2	3,8

Tabulka 2 - Průměrná roční míra inflace

Zdroj: Vlastní zpracování podle [3]



Graf 1 - Průměrná roční míra inflace

Zdroj: vlastní zpracování

Lineární trend má rovnici $y = 0,22x + 0,84$ a z Graf 1 můžeme vyčíst první dva potřebné parametry, tedy:

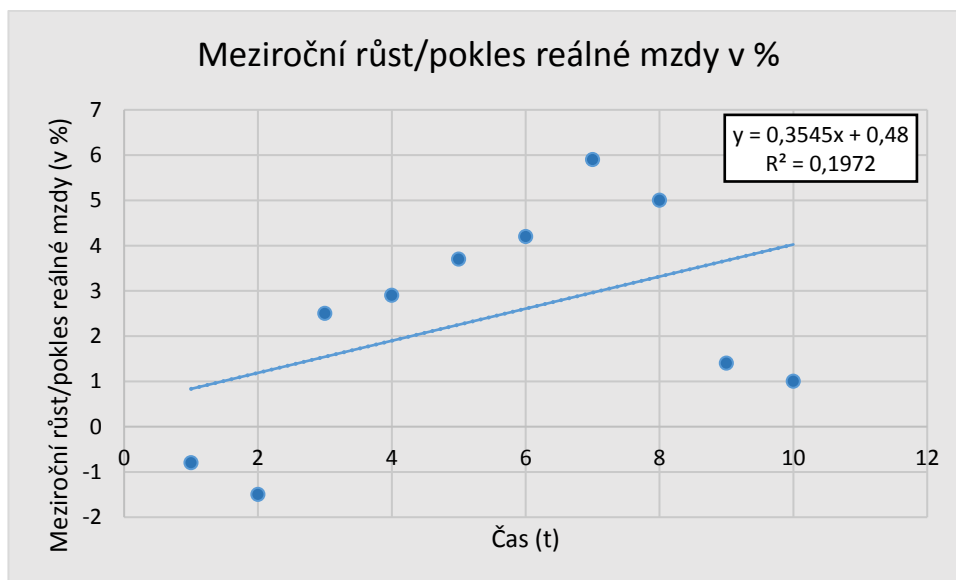
$$\varepsilon_1 = 0,84, \quad \gamma_1 = 0,22.$$

Nyní je potřeba dopočítat zbývající dva parametry ε_2 a γ_2 . Opět je získáme pomocí lineární aproximace dat meziročního růstu/poklesu reálné mzdy v čase t . Hodnoty můžeme vidět v následující tabulce a grafu.

Čas t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meziroční růst/pokles reálné mzdy v %	-0,8	-1,5	2,5	2,9	3,7	4,2	5,9	5	1,4	1

Tabulka 3 - Meziroční růst/pokles reálné mzdy

Zdroj: vlastní zpracování podle [3]



Graf 2 - Mezinárodní růst/pokles reálné mzdy

Zdroj: Vlastní zpracování

Znovu jsem využila pro aproximaci lineární trend, který má rovnici $y = 0,3545x + 0,48$. Tím jsme získali další dva potřebné parametry, tedy:

$$\varepsilon_2 = 0,48, \quad \gamma_2 = 0,3545.$$

A v tuto chvíli už můžeme sestavit systém diferenciálních rovnic, který bude mít tvar

$$N_1' = (0,84 - 0,22N_2)N_1,$$

$$N_2' = (-0,48 + 0,3545N_1)N_2.$$

Tento systém má dva singulární body

$$[0, 0], \left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right].$$

Po dosazení zjistíme, že těmito body jsou

$$[0, 0], \left[\frac{960}{709}, \frac{42}{11} \right].$$

Jacobiho matice bude rovna

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}$$

a výpočet vlastních čísel bude

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 & 0 \\ 0 & -0,48 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0,84 > 0, \quad \lambda_2 = -0,48 < 0,$$

z čehož vyplývá, že singulární bod $[0, 0]$ je sedlo. Výpočet vlastních čísel pro bod $\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right]$ bude rozepsán níže

$$J\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix} = (0 - \lambda)(0 - \lambda) - \left(-\frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = \lambda^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Vlastní čísla v tomto případě nabývají komplexních hodnot

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

a tedy

$$\lambda_1 = i \sqrt{0,84 \cdot 0,48} = \frac{6\sqrt{7}}{25} i, \quad \lambda_2 = -i \sqrt{0,84 \cdot 0,48} = -\frac{6\sqrt{7}}{25} i.$$

Z čehož vyplývá, že singulární bod $\left[\frac{960}{709}, \frac{42}{11}\right]$ je střed, ohnisko nebo obecný bod rotace. Podle důkazu ([9], s. 71) lze říct, že tento bod je střed.

Dále si spočítáme rovnovážné stavy obou hodnot N_1 a N_2 . Rovnovážný stav pro N_1 označíme N_{1R} a obdobně rovnovážný stav pro N_2 označíme N_{2R} , tedy

$$N_{1R} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \frac{960}{709}, \quad N_{2R} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{42}{11}.$$

Závěr: Hodnoty průměrné roční míry inflace a meziročního růstu/poklesu reálné mzdy se periodicky opakují, přičemž kolísají kolem svých rovnovážných stavů. Hodnota N_1 kolísá kolem $\frac{960}{709}$ a hodnota N_2 kolísá kolem $\frac{42}{11}$.

Kdyby se prováděla regulace inflace, například změnou úrokové míry (snížení úrokové míry inflaci zvyšuje a obdobně zvýšení úrokové míry inflaci snižuje), snížením hodnoty ε_1 , pak by míra inflace kolísala okolo stejného rovnovážného bodu, jako v našem případě $\frac{960}{709}$, ale rovnovážná hodnota meziročního růstu/poklesu reálné mzdy by kolísala kolem menší hodnoty $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, v našem případě kolem menší hodnoty než $\frac{42}{11}$.

Pokud bychom prováděli regulaci pomocí zvýšení hodnoty ε_2 , k tomu může dojít například změnou míry zdanění mzdy (snížení míry zdanění vede k nárůstu reálné mzdy a obdobně zvýšení zdanění vede k poklesu reálné mzdy), pak by stav míry inflace kolísal kolem vyšší hodnoty $\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, než v našem případě, zatímco rovnovážná hodnota, okolo které kolísá meziroční růst/pokles reálné mzdy, by zůstala stejná jako v našem případě.

Na tomto modelu využití jsme mohli pozorovat dynamiku vztahu dravec-kořist, u které jsou však ve značné míře uplatněny i jiné vlivy. Obecně pak platí, že dynamické modely v ekonomii podávají jen velmi zjednodušený obraz skutečnosti. Velikost podniku zde byla vyjádřena počtem zaměstnanců, ale bylo by možné použít i jiné ukazatele.

5 PŘÍKLAD APLIKACE VYBRANÉHO MODELU V OBLASTI EKONOMIE

Jako příklad aplikace v oblasti ekonomie jsem si vybrala model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti. Model aplikuji na trh práce, kde N_1 bude míra zaměstnanosti a N_2 bude míra hrubých národních úspor. Míru zaměstnanosti lze chápat jako podíl zaměstnaných osob ku osobám zaměstnaným i nezaměstnaným. Míru hrubých národních úspor lze chápat jako hrubé národní úspory podělené hrubým disponibilní důchodem (suma, kterou lidé mají po zaplacení daní a běžných výdajů). Dále budeme potřebovat konstantu K , které v našem případě představuje volnou kapacitu trhu práce. Hodnota K v prosinci 2021 činila 343 148 volných míst [13]. V modelu budeme zkoumat hodnoty za posledních patnáct let, tedy roky 2007 až 2021. A k tomuto modelu budeme dále potřebovat parametr α , který udává míru vnitrodruhové konkurence, v našem případě je to míra vnitřní konkurence mezi zaměstnanými o volná pracovní místa. Pro výpočet využijeme matematický model znázorňující systém dvou diferenciálních rovnic

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2)N_1,$$

$$N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2.$$

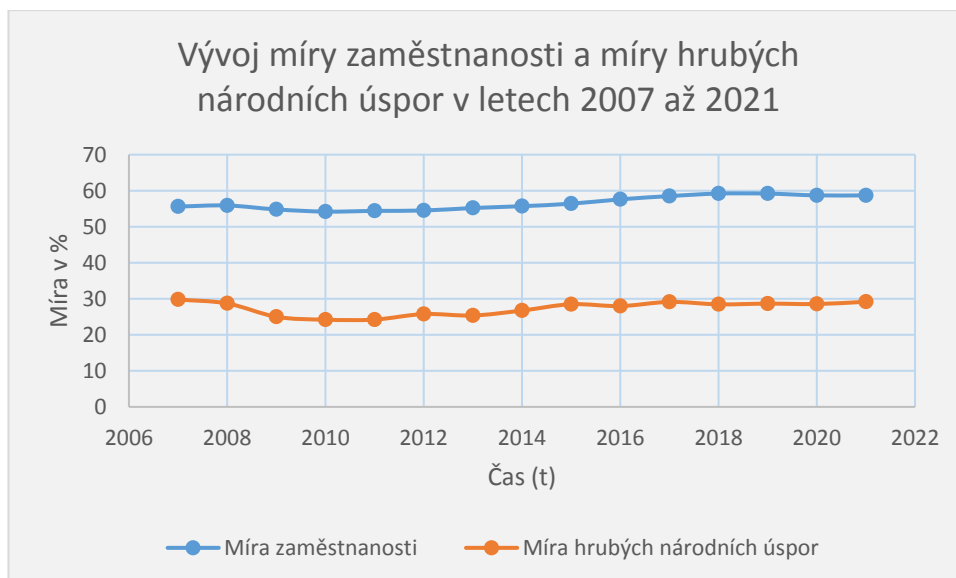
V následující tabulce můžeme vidět vstupní data potřebná k výpočtu [2], [3].

Rok	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Míra zaměstnanosti	55,6	55,9	54,8	54,2	54,4	54,5	55,2	55,7	56,4	57,6	58,5	59,2	59,2	58,7	58,7
Míra hrubých národních úspor	29,8	28,7	25,0	24,2	24,2	25,8	25,4	26,7	28,5	28,0	29,1	28,5	28,7	28,5	29,2

Tabulka 4 - Míra zaměstnanosti a míra hrubých národních úspor v letech 2007-2021

Zdroj: Vlastní zpracování podle [2], [3]

Vývoj míry zaměstnanosti a míry hrubých národních úspor můžeme vidět na následujícím grafu.



Graf 3 - Vývoj míry zaměstnanosti a míry hrubých národních úspor v letech 2007 až 2021

Zdroj: Vlastní zpracování

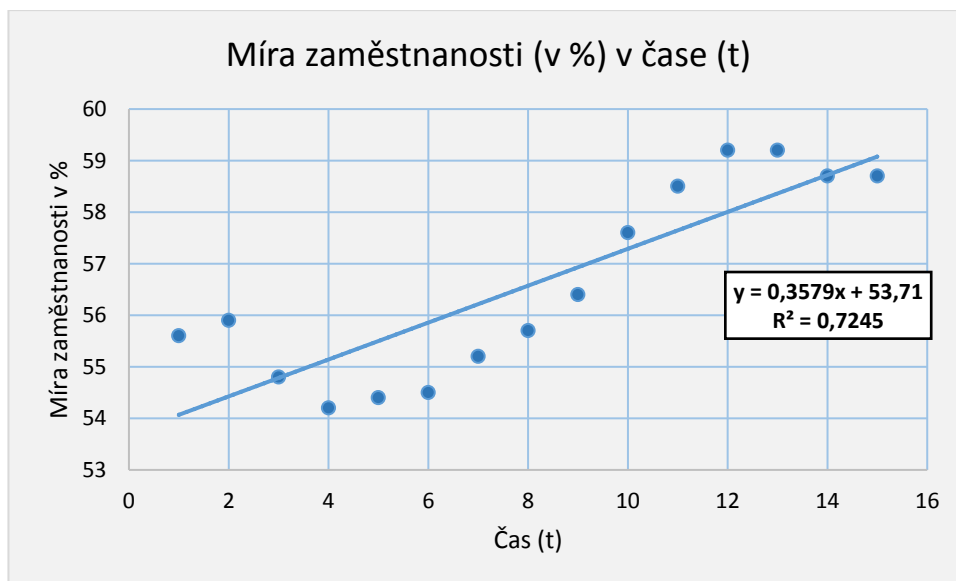
Nejprve potřebujeme získat parametry ε_1 a γ_1 . Toho docílíme lineární aproximací hodnot míry nezaměstnanosti v čase t , hodnoty pro aproximaci můžeme vidět v následující tabulce

Čas (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Míra zaměstnanosti	55,6	55,9	54,8	54,2	54,4	54,5	55,2	55,7	56,4	57,6	58,5	59,2	59,2	58,7	58,7

Tabulka 5 - Míra zaměstnanosti v čase (t)

Zdroj: Vlastní zpracování podle [2]

Nyní provedeme aproximaci dat míry zaměstnanosti lineárním trendem, který můžeme vidět v grafu níže. Lineární trend má rovnici $y = 0,3579x + 53,71$. a z této rovnice zjistíme potřebné parametry k dalším výpočtům.



Graf 4 - Míra zaměstnanosti v čase (t)

Zdroj: Vlastní zpracování

Naše potřebné parametry tedy jsou

$$\varepsilon_1 = 53,71, \quad \gamma_1 = 0,3579.$$

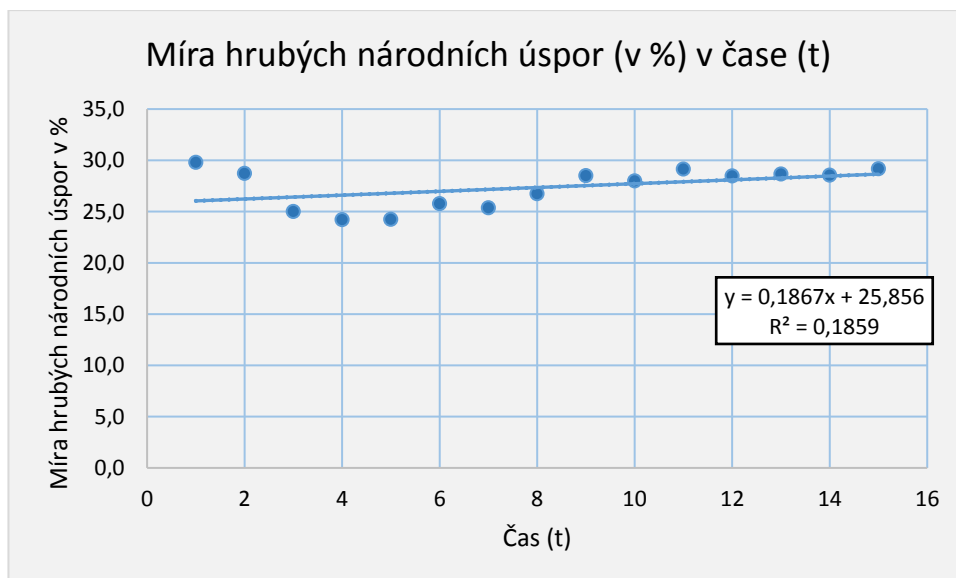
Následně potřebujeme získat další dva parametry, tentokrát je dostaneme lineární aproximací hodnot míry hrubých národních investic v čase t . Data můžeme vidět v tabulce níže

Čas (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Míra hrubých národních úspor	29,8	28,7	25,0	24,2	24,2	25,8	25,4	26,7	28,5	28,0	29,1	28,5	28,7	28,5	29,2

Tabulka 6 - Míra hrubých národních úspor v čase (t)

Zdroj: Vlastní zpracování podle [3]

Z těchto dat vytvoříme opět graf, který proložíme lineárním trendem a dostaneme rovnici lineárního trendu $y = 0,1867x + 25,856$. Z této rovnice získáme další dva potřebné parametry.



Graf 5 - Míra hrubých národních úspor v čase (t)

Zdroj: Vlastní zpracování

Potřebné parametry získané k dalšímu výpočtu jsou

$$\varepsilon_2 = 25,856, \quad \gamma_2 = 0,1867.$$

Nyní musíme dopočítat parametr α

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{K} = \frac{53,71}{343\,148} \cong 0,000\,156\,521.$$

Využívaný systém dvou diferenciálních rovnic pro tento výpočet má singulární body

$$[0, 0], \quad \left[\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0 \right].$$

Následně potřebujeme posoudit nerovnost $\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$ pro případ existence dalšího singulárního bodu.

$$\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$$

$$0,1867 \cdot 53,71 > 0,000\,156\,521 \cdot 25,856$$

$$10,0277 > 0,004\,047$$

Tato nerovnost platí, což znamená, že existuje další singulární bod

$$[N_1^*, N_2^*] = \left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right] = [138,49, 150,01].$$

Výpočet vlastních čísel

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,71 & 0 \\ 0 & -25,856 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 53,71 > 0, \quad \lambda_2 = -25,856 < 0,$$

$$J\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\alpha} \\ 0 & \frac{\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53,71 & -122\,812,98 \\ 0 & 64\,040,03 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -53,71 < 0, \quad \lambda_2 = 64\,040,03 > 0,$$

z čehož vyplývá, že bod $[0,0]$ je sedlo a bod $\left[\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right]$ je také sedlo. Jacobiho matice pro bod $[N_1^*, N_2^*]$ bude mít tvar

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}$$

a její charakteristická rovnice bude

$$\lambda^2 + \frac{\alpha \varepsilon_2}{\gamma_2} \lambda + \frac{\varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)}{\gamma_2} = 0$$

po vynásobení γ_2 , získáme upravený tvar kvadratické rovnice

$$\gamma_2 \lambda^2 + \alpha \varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2) = 0$$

a jejími kořeny budou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \varepsilon_2 \pm \sqrt{D}}{2\gamma_2},$$

kde $D = \alpha^2 \varepsilon_2^2 - 4\gamma_2 \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)$. Nyní dosadíme do vzorce a vypočítáme diskriminant, $D = -193,5485$. Jelikož je $D < 0$ vlastní čísla matice jsou komplexně sdružená a singulární bod $[N_1^*, N_2^*]$ je stabilní. Jestliže v nerovnosti $D < 0$ vyměníme znaménko nerovnosti za rovná se takto

$$\alpha^2 \varepsilon_2^2 - 4\gamma_2 \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2) = 0,$$

bude mít tato rovnice jeden kladný kořen a to

$$\hat{\alpha} = 2\gamma_2 \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} - 1 \right).$$

Výsledný kořen rovnice je $\hat{\alpha} \cong 0,2816$. Jelikož $\alpha \in (0, \hat{\alpha})$, tedy $0,000\,156\,521 \in (0, 0,2816)$ je singulární bod $[N_1^*, N_2^*]$ stabilním ohniskem.

Závěr: Jelikož $\alpha < \hat{\alpha}$ jedná se v našem případě o slabou vnitrodruhovou konkurenci zaměstnaných na trhu práce. To je zapříčiněno vysokým počtem volných pracovních míst, zaměstnaní si můžou s velkou pravděpodobností najít novou, případně i lepší práci. V ideálním případě by se hodnota míry zaměstnanosti ustálila tlumenou oscilací na hodnotě N_1^* , což je 138,4896. To ale v reálném světě není možné. Hodnota míry hrubých národních úspor by se ustálila na hodnotě N_2^* , což je 150,0093. V reálném světě se uplatňují vlivy, které model nebere v úvahu. Jeho zpřesňování by přesáhlo rámec této práce.

ZÁVĚR

V úvodu této diplomové práce byla vysvětlena základní teorie. Vzhledem k tématu byla do základní teorie zahrnuta tvorba matematického modelu a teorie diferenciálních rovnic prvního řádu. Poté jsme si vysvětlili, co jsou to autonomní systémy, kde jsme se zabývali systémy na přímce i v rovině. V závěru první kapitoly byl vysvětlen pojem stability.

Další část byla věnována jednoduchým populačním modelům, mezi které patří v první řadě růstový model. O něco realističtější je model růstu populace živých organismů, ve kterém jsme si představili Malthusův model a Verhulstovu neboli logistickou rovnici. Následovalo vysvětlení rovnovážného modelu počtu druhů na ostrově, kterému se také říká Macarturův model. V tomto modelu nám přibyly proměnné jako rozloha ostrova, vzdálenost ostrova od pevniny nebo intenzita migrace. Poté jsme se už přesunuli k dynamickým modelům jedné populace, mezi které na začátek patří obecný logistický růst populace. Pak přišla na řadu dynamika klimaxové populace, kterou vystihuje specifická míra růstu. V závěru této kapitoly byla vysvětlena dynamika populace pod predačním tlakem.

Ve třetí části této práce jsme se začali zabývat modely koexistence dvou druhů. Na úvod jsme si vysvětlili, jaké druhy vztahů mohou existovat mezi dvěma populacemi, a pak už jsme se zabývali konkrétními modely. První přišel na řadu model konkurence mezi dvěma biologickými druhy, který se vyznačuje soupeřením dvou druhů o potravu, teritorium atd. Ukázali jsme, že existují tři typy konkurence, a to konkurence slabá, silná a dominance jednoho z druhů. Následně byly vysvětleny všechny čtyři případy, které mohou nastat (slabá konkurence, silná konkurence, dominance prvního druhu a dominance druhého druhu). Jako druhým jsme se zabývali modelem symbiózy dvou druhů, který je specifický soužitím dvou druhů, ze kterého mají obě populace prospěch. Poté jsme si vysvětlili klasický Lotkúv-Volterrův model dravec-kořist, u něhož se předpokládá živení jednoho druhu druhým. Následoval model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti; tento model se liší od klasického modelu přidáním konstanty označující míru vnitrodruhové konkurence, která se vypočítá pomocí konstanty specifické míry růstu populace kořisti a nosné kapacity prostředí. Ukázali jsme, že mohou nastat dvě situace se silnou nebo slabou vnitrodruhovou konkurencí kořisti. Pak jsme se zabývali modelem Gauseho typu, který patří mezi realističtější modely. V tomto modelu jsme se zabývali čtyřmi možnými situacemi, které mohou nastat. Následně byl ukázán model koexistence dvou konkurujících si populací s dravcem. Jedná se o model se třemi proměnnými, jako příklady byly uvedeny antilopy, zebry versus lev. Na závěr této kapitoly

jsme si ukázali modely chování, přesněji vývoj vzorců chování. A vysvětlili jsme si obecný model soupeření a model soupeření „jestřábů“ a „holubic“.

Ve čtvrté kapitole jsme se přesunuli k praktickým poznatkům a možným využitím dynamických populačních modelů v ekonomii. Nejprve jsme si ukázali využití Malthusovského modelu při multilevel marketingu. V prvním příkladu jsme zvolili optimistický předpoklad 25 % úspěšnosti nově najatých spolupracovníků a zároveň jsme předpokládali nárůst úbytku spolupracovníků o jedna za jednotku času (v našem případě jeden měsíc). Začínali jsme na 14 spolupracovnících a zjistili jsme, že maximální počet spolupracovníků dostaneme po 8,3 měsících a jejich počet bude 32. Následně bude jejich počet klesat. Ve druhém příkladu jsme předpokládali specifickou míru růstu pouze v hodnotě 10 % a míru úbytku o tři za jednotku času. Opět jsme začínali na hodnotě 14 spolupracovníků a dospěli jsme k závěru, že maximálního počtu spolupracovníků dosáhneme po zhruba dvou týdnech, ovšem množství spolupracovníků bude stále 14 (nelze počítat jen část spolupracovníka, proto zaokrouhlujeme na celá čísla). Závěrem tohoto příkladu bylo, že v multilevel marketingu lze krátkodobě dosahovat zisku, ale z dlouhodobého hlediska je tento typ podnikání neefektivní.

Dále jsme ukázali možnost využití modelu konkurence dvou druhů. Jednalo se o model popisující působení dvou podniků, které si vzájemně konkurují, ve stejném prostředí. Jednalo se o podniky vyrábějící vzájemné substituty (rohlíky a housky). Závěrem zkoumání a výpočtů tohoto modelu jsme dospěli k tomu, že se jedná o silnou konkurenci mezi podniky. A lze očekávat skončení činnosti jednoho z podniků, užitnost prostředí není stabilní pro oba podniky zároveň. Ale oba podniky mají stejnou šanci na přežití, záleží to na mnoha faktorech jako například na dodavatelích, jejich cenách a kvalitě dodavatele, na kvalitě samotného výrobku, na odběratelích tedy zákaznících apod.

Poté přišlo na řadu využití modelu symbiózy dvou druhů, ve kterém jsme zvolili podniky vyrábějící vzájemné komplementy. Jeden podnik vyráběl tiskárny a druhý papír. Po matematických výpočtech jsme dospěli k závěru, že se jedná o typ slabého mutualismu neboli slabý typ spolupráce/soužití. Dozvěděli jsme se o přežití a prosperitě obou podniků do budoucna. Závěrem modelu bylo ustálení rovnovážných hodnot na úrovních vyšších pro oba podniky, než kdyby ke spolupráci nedocházelo a podniky by byly v stejném prostředí. Dle mého názoru se spolupráce těmto podnikům vyplatí.

Jako další jsme si ukázali využití modelu dravec-kořist, kde jsme si za proměnné zvolili průměrnou roční míru inflace a meziroční růst/pokles reálné mzdy (neboli index reálných mezd)

v letech 2012 až 2021. Pomocí lineární aproximace jsme dopočítali potřebné parametry modelu. Výsledkem byly periodicky se opakující hodnoty, přičemž obě kolísají kolem svých rovnovážných stavů. Rovnovážná hodnota průměrné roční míry inflace vyšla $\frac{960}{709}$ a rovnovážná hodnota meziročního růstu/poklesu reálné mzdy byla vypočítána $\frac{42}{11}$. Kdyby se prováděla regulace inflace například snížením úrokové míry, která snižuje inflaci, pak by míra inflace kolísala okolo stejného rovnovážného bodu, jako v našem případě $\frac{960}{709}$, ale rovnovážná hodnota meziročního růstu/poklesu reálné mzdy by kolísala kolem menší hodnoty než $\frac{42}{11}$. A kdybychom prováděli regulaci pomocí zvýšení hodnoty ε_2 , k tomu může dojít například snížením míry zdanění mzdy, která zapříčiní nárůst reálné mzdy, pak by stav míry inflace kolísala kolem vyšší hodnoty než $\frac{960}{709}$, zatímco rovnovážná hodnota okolo, které kolísá meziroční růst/pokles reálné mzdy by zůstala stejná jako v našem případě.

V poslední kapitole této diplomové práce byl ukázán příklad aplikace vybraného modelu v oblasti ekonomie. Jako ukázkou jsem si zvolila model dravec-kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti, kde jsem použila hodnoty míry zaměstnanosti a hodnoty míry hrubých národních úspor v letech 2007 až 2021. Opět jsem prováděla lineární aproximaci dat pro zjištění potřebných parametrů k výpočtu. Jako hodnotu K jsem zvolila volnou kapacitu trhu práce, tzn. kolik volných pracovních míst je na trhu práce k dispozici. Pomocí výpočtů jsme zjistili, že se jedná o slabou vnitrodruhovou konkurenci zaměstnaných. To může být zapříčiněno vysokým počtem volných pracovních míst; zaměstnaní si můžou s velkou pravděpodobností najít novou práci, případně i lepší práci. V ideálním případě by se hodnota míry zaměstnanosti ustálila tlumenou oscilací na hodnotě N_1^* , což je 138,4896, a hodnota míry hrubých národních úspor by se ustálila na hodnotě N_2^* , což je 150,0093. Toto docílení v reálném světě ale není možné. Proto byla navržena možná doporučení pro další postup.

Dynamické populační modely byly původně navrženy pro popis jevů v oblasti biologie, avšak později se ukázala i možnost jejich aplikace v ekonomii. Ve své práci jsem ukázala, že skutečně existuje řada možností jejich uplatnění při řešení ekonomických problémů, byť je třeba brát v úvahu to, že model vždy dává jen zjednodušený obraz reálného světa.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] **BACAĚR, N.** *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. London : Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-0-85729-114-1.
- [2] **Český statistický úřad.** *Zaměstnanost*. [Online] [Citace: 22. 11 2022.] Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/zamestnanost_nezamestnanost_prace.
- [3] **Český statistický úřad.** *Makroekonomické ukazatele*. [Online] [Citace: 22. 11 22.] Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/hmu_cr.
- [4] **FENCL, Martin.** *Populační modely v biologii a epidemiologii*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, 2014.
- [5] **GANDOLFO, G.** *Economic Dynamics: Study Edition*. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-62760-X.
- [6] **GURICOVÁ, Karolína.** *Matematické modely v biologii*. Brno : Masarykova univerzita, Přírodovědecká univerzita, 2014.
- [7] **HLAVÁČOVÁ, Klára.** *Model dravec-kořist a jeho aplikace při popisu tržního chování ekonomických subjektů*. Pardubice : Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2021.
- [8] **HOFMANOVÁ, Monika.** *Dynamické modely v ekonomii*. Hradec Králové : Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, 2015.
- [9] **KALAS, Josef, POSPÍŠIL, Zdeněk.** *Spojité modely v biologii*. 1.vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2626-X.
- [10] **KHANA ACADEMY.** *Lokální maximum*. [Online] [Citace: 22. 11 22.] Dostupné z: <https://cs.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-analytic-app/dc-first-derivative-test/a/relative-minima-and-maxima-review?fbclid=IwAR1619iYHgOIhsjHESXr4nf7bi2txR3i10xD0BGogkI5jem9NLvv8KCsYw>.
- [11] **KŘIVÝ, Ivan.** *Modely v populační biologii a ekologii*. Ostrava : Ostravská univerzita v Ostravě, 1991. 80-7042-047-2.
- [12] **KUMMER, H.** *Primates Societies*. Chicago, Aldine Atherton, Inc., 1971.
- [13] **KURZY.** *Nezaměstnanost*. [Online] [Citace: 22. 11 22.] Dostupné z: <https://www.kurzy.cz/makroekonomika/nezamestnanost/?G=4&A=3&page=2>.
- [14] **KÜHNOVÁ, Jitka.** *Modely dravec-kořist a jejich počítačová simulace*. Brno : Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2007.
- [15] **PŘIBYLOVÁ, L.** *Nelineární dynamika*. Brno : Masarykova univerzita, 2020.

- [16] **RAJCHARD Josef, KINDLMANN Pavel, BALOUNOVÁ Zuzana.** *Ekologie II.* České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2002. 80-7232-190-0.
- [17] **SMÍTALOVÁ, Kristína a Štefan ŠUJAN.** *Dynamické modely biologických spoločenstiev.* Bratislava : Veda, 1989. ISBN 80-224-0033-5.
- [18] **SMÍTALOVÁ, Kritína a kolektiv.** *Matematika pre nematematické smery.* Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislavě, 1991. 80-223-0196-5.
- [19] **TU, Pierre N. V.** *Introductory Optimization Dynamics: Optimal Control with Econ. and Management Applications.* 2nd, Rev. and Enl. Ed. Berlin : Springer, 1991. ISBN 0-387-54462-3.
- [20] **ZLÁMAL, Filip.** *Logistická regrese v R.* Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2013.
- [21] **ZUBOVÁ, Kateřina.** *Lotkûv-Volterrûv model a jeho zobecnění.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016.