NUMERICKÝ MODEL OCEŇOVÁNÍ EVROPSKÉ KUPNÍ OPCE

Kateřina Seinerová

Univerzita Pardubice, Fakulty ekonomicko-správní, Ústav matematiky

Abstract: *In this paper a mathematical model of European call options prizing is presented. This model is based on reduced Black-Scholes partial differential equation, discretized employing the finite difference method. The results of this model and of the exact solution of Black-Scholes equation are compared.*

Keywords: *Black-Scholes schema, European call options, PDE, Finite Difference Method*

1. Úvod

S finančními deriváty se v České republice obchoduje teprve krátce, ale díky svým vlastnostem slibují široké spektrum využití. Zůstane-li český trh těmto finančním nástrojům otevřen, v příštích letech se budeme pravděpodobně setkávat se stále novými typy derivátů. Vzhledem k tomu, že analytické řešení je známo jen pro některé základní druhy derivátů, je nutno tyto řešit také pomocí numerických metod.

Snahou každého subjektu obchodujícího na finančních trzích by mělo být eliminovat nejistotu a zajistit se proti riziku z ní plynoucího. Na finančních trzích je k dispozici značné množství instrumentů, které slouží k zajištění těchto rizik. V současné době, kdy jsou trhy velice volatilní, banky neustále mění své úrokové sazby, aby příznivě ovlivnily trhy, se setkáváme s čím dál tím větší oblibou finančních derivátů. Pomocí nich se subjekty zajišťují proti nepříznivým a neočekávaným výkyvům úrokových sazeb, cen komodit, kurzů měn a cenných papírů a umožňují subjektům trhu vydělávat i za nepříznivého vývoje. Subjekty také finanční deriváty využívají ke spekulacím, které vedou k jejich dodatečným ziskům, a získávají tak finance k dalším investicím.

2. Základní pojmy

2.1. Opce

Opce jsou burzovní nebo OTC deriváty s právem jednoho partnera, kupujícího opce, na vypořádání obou podkladových nástrojů v jednom okamžiku v budoucnu, tzv. evropská opce, nebo během určitého období, tzv. americká opce. Druhý partner je prodávajícím opce a obdrží od kupujícího opční prémii. Opční prémie je obvykle splatná v okamžiku sjednání opce, ale existují opce, které jsou splatné později, nejčastěji v okamžiku splatnosti opce.

Taková opční prémie je vyšší než hodnota opce v okamžiku jejího sjednání a to o naběhlý úrok odvozený od rizikové úrokové míry v období mezi sjednáním opce a úhradou opční prémie. Každý opční kontrakt obsahuje cenu, za kterou má vlastník právo daný podkladový nástroj koupit a ta se nazývá realizační cena.

2.2. Black-Scholesova rovnice

Vyložme nyní Black-Scholesovu rovnici pro evropskou kupní opci. Jedná se o kontrakt, v kterém majitel opce získává právo koupit akcii v přesně určeném expiračním čase $t=T$ za předem dohodnutou cenu E. Vzhledem k tomu, že se jedná o právo, nikoli povinnost, má toto samo o sobě jistou hodnotu, za kterou je v čase uzavření kontraktu $t=0$ zaplatit tzv. opční prémii V. Pro obě strany, tj. pro vypisovatele opce i pro držitele opce, je zajímavé vědět, jaká je férová hodnota prémie tak, aby ani jedna ze stran nebyla znevýhodněna. Úloha spočívá v nalezení matematické rovnice, která popisuje vztah pro funkci ceny opce V=V(S,t) jako funkce aktuální ceny akcie S a času t. Opční prémie potom představuje hodnotu na počátku uzavírání kontraktu, tj. v čase t=0.

K modelování náhodného vývoje ceny akcie jako funkce času S=S(t) se používá diferenciální rovnice, která reprezentuje geometrický Brownův pohyb dS=μSdt+σdω, kde dS znamená změnu ceny akcie za časový okamžik dt; μ označuje očekávaný výnos nebo trend vývoje akcie; σ je volatilita časového vývoje akcie; znakem dω je označen diferenciál Wienerova procesu. Tato stochastická rovnice může být zapsána i ve tvaru dS/S=μdt+σdω. Odtud je zřejmé, že v časové analýze je podstatnou informací relativní změna dS/S, nikoli absolutní změna ceny aktiva dS. Důvodem je fakt, že hledaný model musí být nezávislý na volbě jednotek. To znamená, že výsledná oceňovací formule musí mít stejný tvar nezávisle na tom, zda je cena vyjádřena v eurech, centech, korunách nebo dolarech.

Podle známého Itóova lemmatu vyhovuje cena derivátu akcie V(S,t) náhodného procesu S stochastické rovnici

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + mS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}(sS)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + sS\frac{\partial V}{\partial S} dw \, .$$

Cílem investora je zkombinovat jeho portfolio sestávající z akcií, opcí a dluhopisů tak, aby neutralizoval vystavení svého portfolia riziku. Zřejmě jediný rizikový člen v uvedené rovnici je reprezentován stochastickým členem dω Wienerova náhodného procesu. Neutralizování vlivu tohoto stochastického, a tedy rizikového, členu lze výběrem poměru Δ=∂V/∂S. Následným dosazením tohoto výběru do deterministického zbytku rovnice dostaneme Black-Scholesovu parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(sS)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \, .$$

3. Oceňování evropské call opce pomocí explicitního schématu

Pro evropské typy derivátů jsou známy jak exaktní, tak numerické řešení. Použití numerického řešení, má své opodstatnění; aby bylo možné spolehnout se na numerické metody i v případě, kdy není možno použít explicitní výpočet, například pro americké opce a některé typy exotických derivátů, je nutné ověřit výsledky numerického výpočtu pomocí explicitního řešení.

Zavedením transformované funkce u, $V(S,t) = Ee^{-ax-bt}u(x,t)$ kde $a = \frac{r-D}{s^2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{r+D}{2} + \frac{s^2}{8} + \frac{(r-D)^2}{s^2}$ a nezávislých proměnných *x=ln(S/E)*, *τ=T-t* lze Black-Scholesovu parciální rovnici $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(sS)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$ převést na základní tvar parabolické rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{s^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Počáteční podmínka pro transformovanou funkci závisí na terminálovém pay-off diagramu zvoleného typu derivátu. Pro jednoduché call opce je to $u(x,0)= e^{ax} \max(e^{x}-1,0)$.

Parabolickou diferenciální rovnici s okrajovou podmínkou lze řešit pomocí metody sítí (konečných diferencí). V prostoru nezávislých proměnných $(x,t)\in \Re\times(0,T)$ je uvažována síť bodů $x_i=ih$, $i=\dots, -2,-1,0,1,2,\dots$, na časových vrstvách τ_j, $j=0, 1,\dots,m$. Aproximace hledaného řešení v síťovém bodě (x_i, τ_j) je označena jako $u^j_i \approx u(x_i, \tau_j)$. Aproximace jednotlivých prostorových parciálních derivací pomocí centrální prostorové diference mají tvar

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) \approx \frac{u^j_{i+1}-u^j_{i-1}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) \approx \frac{u^j_{i+1}-2u^j_i+u^j_{i-1}}{h^2},$$

aproximace časové derivace pomocí dopředné časové diference $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) \approx \frac{u^{j+1}_i-u^j_i}{k}$.

Po dosazení všech náhrad parciálních derivací v síťovém bodě (x_i, τ_j) má parabolická rovnice tvar $\frac{u^{j+1}_i-u^j_i}{k} = \frac{s^2}{2}\,\frac{u^j_{i+1}-2u^j_i+u^j_{i-1}}{h^2}$.

Hodnotu u^{j+1}_i na nové časové vrstvě můžeme vyjádřit explicitně pomocí hodnot řešení v původní časové vrstvě $u^{j+1}_i = cu^j_{i-1}+(1-2c)u^j_i+cu^j_{i+1}, c=\frac{s^2 k}{2h^2}$. Explicitní schéma je stabilní pouze v případě splnění Courant-Lewy-Fridrichsovy podmínky $0 < c \le 0,5$.

Exaktní řešení Black-Scholesovy rovnice pro výpočet evropské kupní opce lze najít ve tvaru

$$V(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \text{ kde } d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{s^2}{2}\right)(T-t)}{s\sqrt{T-t}} \text{ a } d_2=d_1-s\sqrt{T-t}\,.$$

Pro příklad evropské kupní opce byly vypočítány výsledky numerického schématu pro koeficienty E=60, r=0.04, σ=0.29, T=0.3, výsledek vidíme na Obr. 1. Pro koeficienty E=50, r=0.05, σ=0.2, T=0.5 najdeme řešení na Obr. 2. a výsledek výpočtu s koeficienty E=50, r=0.01, σ=0.2, T=1 si lze prohlédnout na Obr. 3. Všechny numerické výpočty byly porovnány s přesným řešením Black-Scholesovy rovnice, které je na obrázcích znázorněno hvězdičkami.

4. Závěr

Cílem modelu bylo ověření podobnosti řešení rovnice pro evropskou kupní opci s různými vstupními daty. Protože se vhodnost použitého numerického modelu potvrdila, můžeme předpokládat, že ho bude možno použít i pro další typy finančních derivátů, u kterých neznáme analytické řešení, což bude obsahem dalším práce.

Použité zdroje:

[1] JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty.* 1. vydání. Praha: Grada, 2002.

[2] ŠEVČOVIČ D., STEHLÍKOVÁ B., MIKULA K. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. 1. vydání. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009. 200 s. ISBN 978-80-227-3014-3.

Kontaktní adresa:

Ing. Kateřina Seinerová
Ústav matematiky
Fakulta ekonomicko-správní
Univerzita Pardubice
Studentská 84
532 10
Email: katerina.seinerova@upce.cz