UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2023 FILIP KOŽENÝ

UNIVERZITA PARDUBICE

Fakulta ekonomicko-správní

Problém obchodního cestujícího

Bakalářská práce

2023 Filip Kožený

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Filip Kožený**
Osobní číslo:	**E20471**
Studijní program:	**B0413A050008 Ekonomika a management**
Specializace:	**Management podniku**
Téma práce:	**Problém obchodního cestujícího**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Vyložení stěžejních pojmů teorie grafů a představení jádra problému spolu s možnými přístupy k jeho řešení. V praktické části bude předložena analýza konkrétního podniku a popsán efektivní algoritmus řešící daný problém.

Osnova:
- Pojmy teorie grafů související s problematikou obchodního cestujícího.
- Základní charakteristika problému obchodního cestujícího.
- Historie studované problematiky.
- Metody řešení problematiky.
- Analýza problému v konkrétním podniku.

Rozsah pracovní zprávy: **35**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

COOK, William, J. Po stopách obchodního cestujícího: Matematika na hranicích možností. Praha: Dokořán, 2012. ISBN 978-80-7363-412-4
DEMEL, Jiří. Grafy a jejich aplikace. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
JABLONSKÝ, Josef. Operační výzkum: Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3.vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Bc. Jan Štěpánek**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: **1. září 2022**
Termín odevzdání bakalářské práce: **30. dubna 2023**

L.S.

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D. v.r.
děkan

doc. Ing. Michaela Kotková Stříteská, Ph.D. v.r.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2022

Prohlašuji:

Práci s názvem Problém obchodního cestujícího jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše. Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 28.4.2023

Filip Kožený v.r.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval panu Mgr. Bc. Janu Štěpánkovi za všechny rady, které mi při psaní práce poskytl. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a blízkým, kteří mi byli vždy oporou a v mé práci mě po celou dobu podporovali.

ANOTACE

Bakalářská práce je věnována problému obchodního cestujícího. Cílem práce je identifikace hlavní příčiny vzniku tohoto problému a návrh možných řešení, která by zlepšila efektivitu plánování obchodních cest. V teoretické části práce jsou popsány základní pojmy a metody, které jsou s touto problematikou úzce spjaty. V praktické části je provedena analýza podnikových obchodních tras za pomoci jízdních dat a následné zpracování. Výsledky ukazují, že vybrané podniky neefektivně plánují trasy a díky neefektivnímu plánování ztrácí na jízdních nákladech peněžní prostředky.

KLÍČOVÁ SLOVA

Problém obchodního cestujícího, teorie grafů, Hamiltonova kružnice, optimalizace tras

TITLE

Travelling salesman problem

ANNOTATION

The bachelor thesis is dedicated to the problem of a business traveler. The aim of the thesis is to identify the main causes of this problem and propose possible solutions that would improve the efficiency of business travel planning. The theoretical part of the thesis describes basic concepts and methods that are closely related to this issue. In the practical part, an analysis of company business routes is carried out using travel data and subsequent processing. The results show that the selected companies plan their routes inefficiently, and due to ineffective planning, they lose money on travel expenses.

KEYWORDS

Travelling salesman problem, graph theory, Hamiltonian cycles, optimization of travel routes

Obsah

SEZNAM ILUSTRACÍ

SEZNAM ZKRATEK

TSP Travelling salesman problem (Problém obchodního cestujícího)

NP Nedeterministicky polynomiální (Nondeterministic polynomial)

HK Hamiltonovská kružnice

ÚVOD

Problém obchodního cestujícího, známý také pod anglickou zkratkou TSP je jedním z nejvýznamnějších a nejznámějších problémů v oblasti optimalizačních úloh. Jedná se o problém nalezení nejkratší cesty, která prochází všemi zadanými městy a následně vrácením se do výchozího bodu s minimálními náklady. Tento problém má široké využití v průmyslu, logistice, dopravě a mnoha dalších oblastech. Problematika optimalizace trasy je známa v podstatě od nepaměti a byla řešen již pravěkými lovci při lovu a sběru potravy.

První část bakalářské práce je věnována především základním teoretickým znalostem ohledně problematiky teorie grafů a poté také problému obchodního cestujícího. Byl popsán princip, historie a praktické využití problematiky v různých odvětvích.

Svojí náročností se problém obchodního cestujícího řadí mezi úlohy NP-úplné, tedy metody, které nejsou schopny dostat se k výsledku v požadovaném čase. K tomu dochází z důvodu, že s přibývajícím počtem navštívených měst roste složitost úlohy a s tím spojený potřebný čas k výpočtu. K řešení NP-úplných úloh se proto využívají heuristické a metaheuristické algoritmy, které jsou popsány v teoretické části práce.

Smyslem práce je zaměření na úsporu cestovních nákladů u vybraných ekonomických subjektů. Pro práci byly vybrány subjekty, u kterých lze předpokládat, že se zde žádný z těchto principů úspory neaplikuje. Cílem práce je nalézt řešení, jak podnikům ušetřit peníze na cestovních nákladech a s nimi spojenou úsporu času stráveného na obchodních cestách.

Výše zmiňované ekonomické subjekty z energetického odvětví byly popsány ve druhé části práce. Věnují se cestováním mezi zákazníky za účelem dosažení nových kontraktů a udržování dobrých vztahů. Zaměřením práce je analýza jejich tras za pomocí vybraného algoritmu a následné nalezení optimálnějších řešení při jejich obchodní činnosti. Subjektům bude představena potenciální úspora jízdních nákladů při plánování efektivních tras a jejich možné přínosy.

Tato práce může být inspirací nejen pro podniky z energetického odvětví, ale také pro podniky z jiných odvětví, které se v rámci jejich činnosti zabývají cestováním. Přínosem je zlepšení plánování a organizace pracovních cest, což v konečném důsledku vede ke snížení cestovních nákladů a ke zvýšení efektivity a produktivity podniku.

1. TEORIE GRAFŮ

V této kapitole je objasněno, co teorie grafů znamená, jakým způsobem souvisí s danou problematikou problému obchodního cestujícího a jak se uplatňuje při rozhodovací analýze.

Teorie grafů je část matematiky, která zkoumá vlastnosti struktur zvaných grafy. Grafem se v teorii grafů nerozumí grafy elementárních funkcí, jako např. kvadratické či exponenciální funkce nebo funkce sinus. Pojem teorie grafů zahrnuje schéma bodů (uzlů neboli vrcholů), které jsou mezi sebou různě pospojovány spojnicemi (hranami). Těmito grafy lze poté v reálném životě znázornit řadu problémů. V problematice problému obchodního cestujícího to poté mohou být body na mapě, které budou znázorněny tzv. vrcholy a hrany mezi nimi budou ta nejkratší cesta, která je této problematice hledána. Tyto grafy věrohodně zobrazují názorný obraz daných problémů a napomáhají tak k lepšímu představení problematiky. Slovo graf má v reálném životě mnohem více významů. Středoškolská matematika například uvádí, že grafem funkce $y = x^2$ je parabola. Jindy lze grafem znázornit spotřebu elektrické energie. V této práci je termín graf ale označován jako určitý útvar, kterým lze znázornit věrohodný obraz v rovině nebo prostoru. [2]

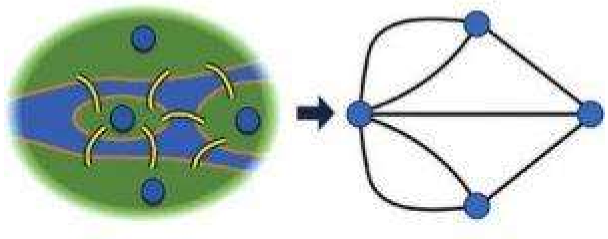
1.1. Historie teorie grafů

Teorie grafů je poměrně mladá matematická disciplína, která spadá pod oblast kombinatoriky a diskrétní matematiku. Jako první úloha, která našla využití teorie grafů, je označována matematická hádanka zvaná Sedm mostů města Královce, kde při hledání řešení v roce 1736 matematik a fyzik Leonhard Euler (1707–1783) využil právě grafu pro zobecnění úlohy. Další známou historickou úlohou je tzv. hra irského šlechtice sira Williama Hamiltona z roku 1856. Nejslavnější je ale Problém čtyř barev, který stále čeká na důkaz svého vyřešení. [2]

1.1.1. Sedm mostů města Královce

Město Královec leží na březích řeky Pregel a dalších dvou ostrovech. V 18.století zde byla vybudována infrastruktura mostů (konkrétně 7 mostů) spojující jednotlivé břehy a ostrovy. Ve městě se diskutovalo o tom, zda je možné projít všech 7 mostů a zároveň přes každý přesně jedenkrát.

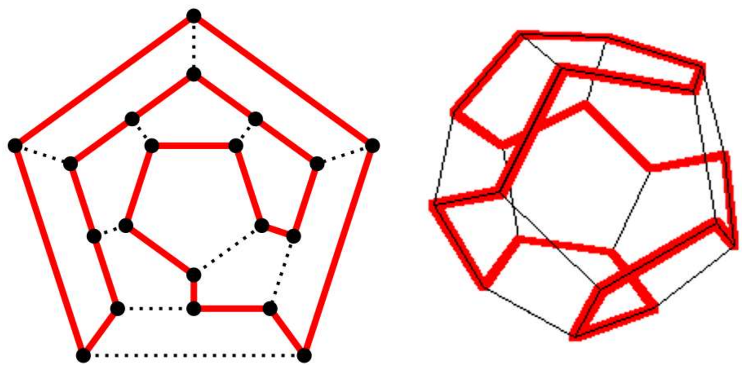
Cílem této úlohy je nalezení trasy mezi všemi sedmi mosty ve městě Královec, kdy stěžejním úkolem je návrat zpět na výchozí místo tak, aby žádný z mostů nebyl navštíven víckrát než jednou. V roce 1736 dokázal známý matematik Leonard Euler, že tato procházka není možná. Úkolem této hry bylo nalezení odpovídajícího grafu pro daný problém, který by znázornil cestu za daných podmínek. Tyto hříčky jsou považovány jako počátek teorie grafů. [4]



Obrázek 1: Plán mostů města Královce

1.1.2.Hamiltonova hra

Hamiltonova hra spočívá v nalezení posloupnosti hran a vrcholů, kde každý vrchol dvanáctistěnu bude navštíven právě jednou a koncový bod bude stejný, jako byl ten počáteční. Příklad Hamiltonovy hry je uveden na obrázku č.2.



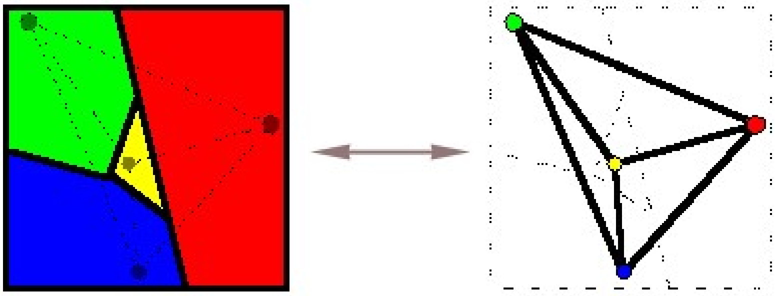
Obrázek 2: Hamiltonova hra

1.1.3. Problém čtyř barev

Nejznámější úlohou teorií grafů je bezpochyby problém čtyř barev. Princip této úlohy spočívá v myšlence, zda stačí pouze čtyři barvy pro zbarvení jakékoliv politické mapy, aniž by žádný ze státu nesousedil se státem stejné barvy.

Tuto mapu na obrázku 3 lze přetransformovat na graf, kdy každá barva představuje jeden vrchol. Mezi vrcholy daných zemí jsou hrany zakresleny právě tehdy, když spolu obě země na mapě sousedí. Pro řešení musí platit, že žádný ze sousedních vrcholů nesmí mít stejnou barvu.

Pro tento problém nikdy nebyl formulován žádný matematický důkaz řešení. [1]



Obrázek 3: Problém čtyř barev

1.2. Základní pojmy – teorie grafů

1.2.1. Množiny

S množinami se lze setkat např. v elementární geometrii, v teorii čísel, v diferenciálním a integrálním počtu, v matematické statistice atd. Množinou se rozumí skupina nebo souhrn nějakých věcí. Jednotlivé věci tvoří tzv. prvky množiny. Každou množinu označujeme velkým písmenem latinské abecedy. Prvky množin se oproti množinám obvykle zapisují malým písmenem latinské abecedy, pokud to situace nevyžaduje jinak. Označení, že je prvek prvkem množiny M, se v tomto případě zapisuje jako: $a \in M$. Jsou zde ale i případy, kdy množina neobsahuje žádný prvek, v tomto případě mluvíme o prázdné množině a označuje se tímto symbolem $\emptyset$. Ve zjednodušeném případě se mohou množiny prvků zapisovat tímto způsobem: (a, b, c). [4]

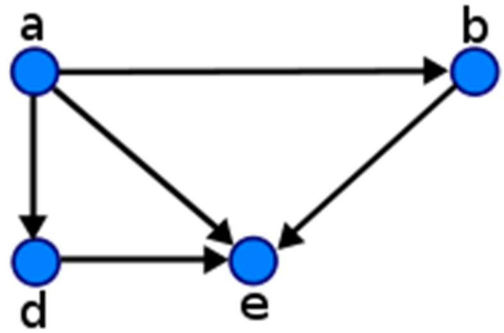
1.2.2. Typy grafů

Tato kapitola se zabývá dvěma základními typy grafů, které se liší zavedením orientace jejich hran. Dle orientace lze hrany v grafu rozlišit na hrany orientované určující směr, kde je možné pohybovat se ve směru od počátečního uzlu ke koncovému uzlu (v grafu bývá označován s šipkou určující směr). Druhým základním typem hrany jsou hrany tzv. neorientované, po kterých se lze pohybovat mezi uzly obousměrně. [4]

1.2.2.1. Orientované grafy

Pod pojmem orientované grafy, někdy také označovány jako digrafy (z anglického directed graphs), si lze představit grafy, na kterých je možné cestovat pouze jednosměrně. Toto je zásadní rozdíl oproti grafu neorientovanému, kde lze cestovat mezi vrcholy z bodu A do bodu B a také zpět. Orientovaný graf se dá dobře demonstrovat na příkladu silniční sítě, kdy orientovaný graf znázorňuje jednosměrnou silnici (lze ji projet pouze pevně daným směrem).

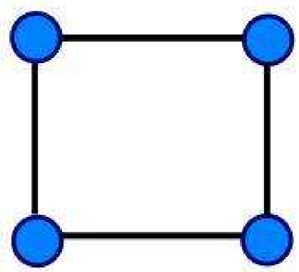
Orientované grafy jsou značeny šipkami (často je používán termín orientované hrany), které znázorňují cestu od počátečního (výchozího) vrcholu, do cílového (koncového) vrcholu. [3][17]



Obrázek 4: Orientovaný graf

1.2.2.2. Neorientované grafy

Jak již bylo uvedeno v podkapitole „Orientované grafy“, neorientované grafy jsou takové grafy, u kterých se nerozlišuje směr cesty. U těchto grafů se nerozlišují počáteční a koncové uzly. Tyto grafy lze znovu přirovnat k silničním sítím, konkrétně se jedná o klasické dvouproudové cesty, které jsou typické pro tvorbu silniční sítě. Po těchto cestách lze jet z bodu A do bodu B a naopak. V praxi jsou využívány v dalších odvětvích dopravy, konkrétně hovoříme například o letecké, vodní, pásové nebo potrubní síti. Tyto grafy jsou poté využívány pro účely nalezení optimálního řešení symetrické úlohy obchodního cestujícího, která se vyznačuje především nalezení co nejkratší a nejspolehlivější cesty. Zároveň je třeba myslet také na cesty s maximální kapacitou přepravy. [17]



Obrázek 5: Neorientovaný graf

Definice 2: Neorientovaný graf je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V, jejíž prvky nazýváme vrcholy, konečnou množinou E, jejíž prvky nazýváme neorientovanými hranami, a zobrazením ε, které nazýváme vztahem incidence a které každé hraně $e \in E$ přiřazuje jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinu vrcholů. Těmto vrcholům říkáme krajní vrcholy hrany e. Lze poté říct, že hrana e je incidentní s těmito vrcholy nebo také že vrcholy spojuje. [4][3]

Někdy může nastat situace, kdy se mezi některou z dvojící uzlů nachází více tzv. paralelních hran. Tyto grafy jsou označovány jako multigrafy. Grafy, které neobsahují paralelní hrany (hrana hij je ve stejném uzlu) se nazývají smyčky. Graf, neobsahující ani paralelní hrany nebo smyčky se nazývají prosté. [5]

1.2.3. Znázornění grafů

Výhodou grafů, ať už orientovaných nebo neorientovaných, je, že je lze znázornit kreslením. Vrcholy se obvykle značí body, které mohou být např. v podobě kroužků. Hrany jsou značeny jako čáry. Ty slouží pro spojování jednotlivých vrcholů. Graf je typický tím, a je třeba si na to dát pozor, že ho lze zakreslit několika možnými způsoby. Pokud si jde vybrat mezi několika jinak zakreslenými grafy, vybírá se ten, u kterého jsou hrany kresleny, pokud možno, přímo a zároveň s co nejméně průsečíky. [17]

Definice 3: Nakreslení grafu definujeme jako dvojici zobrazení ϕ, ψ, z nichž ϕ přiřazuje vrcholům grafu různé body v rovině a ψ přiřazuje každé hraně spojující vrcholy x, y jednoduchou křivku s krajními body $\phi(x), \phi(y)$. Přitom požadujeme, aby žádná křivka $\psi(e)$ neobsahovala žádný z bodů $\phi(x)$ jako svůj vnitřní bod. [4]

Definice 4: Rovinné nakreslení je takové nakreslení grafu, že libovolné dvě křivky přiřazené různým hranám grafu mají společné nejvýše své krajní body, to jsou body přiřazené vrcholům grafu. Rovinný graf je takový graf, ke kterému existuje rovinné nakreslení. [4]

1.2.4. Ohodnocený graf

Často se v praxi stává, že samostatné grafy k adekvátnímu popisu problematiky nestačí. Z tohoto důvodu byla zavedena terminologie nazývající se „hodnocení grafu“, jejímž účelem je dokonale popsat danou situaci. Hodnocení grafu se užívá v situacích, kdy je třeba znát například délku jednotlivých hran mezi jejich vrcholy. To si lze dokonale představit na příkladu problému obchodního cestujícího, kdy se pro naplánování co nejkratší a nejekonomičtější jízdy mohou k jednotlivým hranám připsat číselné údaje konkretizující danou trasu. Může to být například vzdálenost v km, doba trvání jízdy nebo náklady na danou trasu. Pokud jsou hrany grafu takto popsány, hovoří se o ohodnoceném grafu nebo též síti. [4]

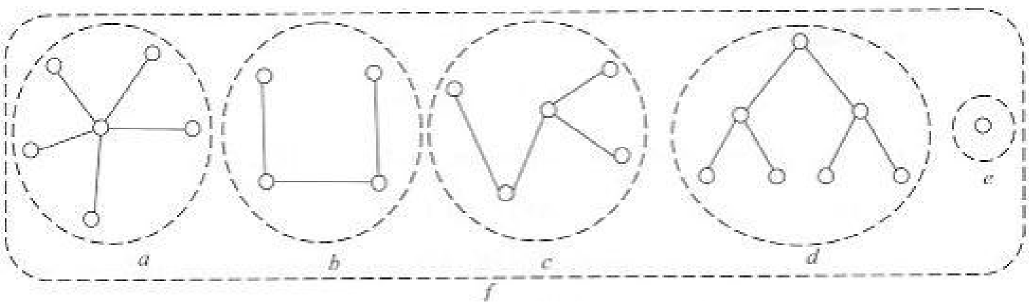
1.2.5. Stromy

V teorii grafů je pojem strom definován jako souvislý graf neobsahující žádnou kružnici. O souvislém grafu lze hovořit právě tehdy, když každé jeho dva vrcholy jsou vzájemně propojeny neorientovanou hranou. Pokud je graf takzvaně „nesouvislý“, nejedná se o strom, nýbrž o les, jehož komponentami jsou již zmiňované stromy, jak z názvu vyplývá. Pojmenování strom vychází z estetického hlediska grafu, kdy spojení bodů mezi vrcholy tohoto grafu znázorňuje obraz podobný siluetě stromu.

Stromy lze rozdělit do několika podskupin, které se mezi sebou liší jednak z estetického, ale také z hlediska vlastností. Jako příklad se dí uvést strom typu „hvězda“ nebo strom typu „had“.

Je vhodné také zmínit základní a zároveň nejpodstatnější vlastnosti stromů. Pro libovolný strom $T = (V, X)$ platí:

- Každá dvojice vrcholů $u, v \in V, u \neq v$ existuje v T pouze jedna cesta, která je spojuje,
- $Q = p - 1$, kde $q = | X |$ $a\, p = | V |$,
- Každá hrana stromu je mostem,
- Každý vrchol, jehož stupeň je vyšší nebo roven 2 se nazývá artikulací



Obrázek 6: Příklad stromů

Stromy jsou nejčastěji využívány v oblasti informatiky, kde slouží k ukládání typicky číselných dat jako datová struktura. [4][3]

1.2.6. Kostra grafu

Kostrou grafu se rozumí libovolný podgraf (vzniká odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu), který svými hranami spojuje všechny vrcholy původního grafu a zároveň neobsahuje kružnici → jedná se o strom.

Definice: Nechť $G = (V, X)$ je graf $T = (W, Y) \mid W = V, Y \subset X$, který je stromem. [3]

Každý souvislý neorientovaný graf obsahuje minimálně jednu kostru. U grafů s n vrcholy má každá kostra $n-1$ hran.

1.2.7.Minimální kostra grafu

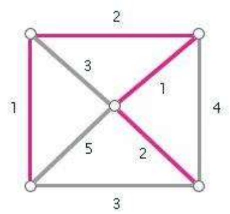
V teorii grafů je třeba také řešit hledání minimální a maximální kostry ohodnoceného grafu. Tato práce se bude zajímat především nalezení kostry minimální. Úloha nalezení minimální kostry spočívá v popisu spojení veškerých vrcholů grafu co možná nejlevněji, tzn. spojení hranami s co nejnižší váhou ohodnocení. Jednoduché a příkladné vysvětlení lze uvést na situaci z praxe, kdy úkolem je propojit n počet míst s co možná nejnižšími náklady a zároveň musíme dodržet předem danou strukturu propojení bodů (např. rodinných domů). Takto lze problémy demonstrovat na příkladu připojování odběrných míst elektrickým vedením, vodovodním potrubím a tak dále. Jako další jde uvést příklad nalezení minimální kostry na ohodnoceném grafu reálnými čísly, konkrétně cenami. Minimální kostrou je poté právě ten graf, který má nejmenší součet cenového ohodnocení hran.

K řešení úloh nalezení minimální kostry je používáno mnoho algoritmů. Jedná se např. o Hladový (Kruskalův), Borůvkův nebo Jarníkův algoritmus.

1.2.8. Hladový algoritmus

Tento algoritmus pracuje na principu spojování hran s nejmenším ohodnocením, dokud tyto hrany nespojí vrcholy celého grafu. Díky jeho jednoduchosti je možné ho používat i bez pomocí výpočetní techniky. Hladový algoritmus, též známý jako Kruskalův, pochází z roku 1956.

Princip tohoto algoritmu spočívá v uspořádání hran dle jejich ohodnocení do neklesajícího pořadí od nejnižší hodnoty po nejvyšší. Hrany jsou postupně probírány a přidávány tak, aby v grafu nevznikla kružnice. Pozor je třeba si dát, pokud následující nejkratší hrana způsobí vznik kružnice. Pokud tento jev nastane, je třeba



Obrázek 7: Cesta grafem pomocí Hladového algoritmu

vybrat další hranu. Takto postupně lze přidávat jednotlivé hrany, dokud se nepospojují všechny body v grafu. Názorně lze tento postup demonstrovat na obrázku č.7.

Tento algoritmus je často využíván při řešení nejrůznějších optimalizačních úloh, nezaručuje ale optimální řešení. Jsou i příklady, kdy se při hledání nejkratší „hladové cesty“ tento algoritmus zmýlil. [3][4]

1.2.9. Jarníkův-Primův algoritmus

V roce 1930 byl popsán českým matematikem Vojtěchem Jarníkem a nezávisle na něm byl popsán téměř o 30 let později (1957) také Robertem Clay Primem.

Postup tohoto algoritmu spočívá v počátečním výběru pevně daného vrcholu v a následného výběru hran. Hrana je volena jako komponenta A vždy ta, která obsahuje vrchol v. [3]

1.2.10. Eulerovské tahy

Další problematiku, kterou je potřeba nastínit a zajistit tak snazší pochopení zadaného tématu, jsou Eulerovské tahy. Jak už z názvu vyplývá, tímto tématem se zabýval proslulý matematik Leonhard Euler. S Eulerovskými tahy se lze setkat již v podkapitole „7 mostů města Královce“. Proslulá je také úloha čínského pošťáka nebo optimalizace jízdy kropícího vozu, jejichž společným úkolem je projet všechny ulice ve městě s co nejmenším úsilím a náklady. S Eulerovskými tahy se člověk setkává již v útlém věku, aniž by o tom měl tušení. Může se jednat například o známé kreslení domečku nebo různých zvířat jedním tahem.

Pod pojmem Eulerovské tahy si lze vybavit jednoduchý graf sestrojený za pomocí jednoho tahu, aniž by se jedním vrcholem prošlo ne víckrát než jednou. Eulerovské tahy lze členit na orientované, neorientované a uzavřené, neuzavřené. Konečný graf, sestrojený jedním tahem, se nazývá Eulerův graf. Posloupnost hran je nazývána Eulerovskými tahy.

Definice: V neorientovaném souvislém grafu G je Eulerovým tahem uzavřený tah, který po každé hraně grafu projde pouze jednou, tzn. obsahuje každou hranu grafu. [20]

V kontextu s Eulerovskými tahy je třeba rozhodnout, zda v grafu existuje řešení pro eulerovský tah, tzn. zda lze graf nakreslit jedním tahem. Dále je třeba najít nejmenší počet tahů pro pokrytí zadaného grafu. V souvislosti s pokrytím jednotlivých hran je třeba najít správný sled cest, jež jsou ohodnoceny kladnými čísly, a najít právě ten nejkratší.

Eulerův tah je hojně využíván v některých heuristických algoritmech. Princip těchto algoritmů spočívá v nalezení Eulerova tahu, který je poté přetransformován na Hamiltonův cyklus. Tento cyklus je dále využíván pro nalezení řešení problematiky úloh obchodního cestujícího. [20]

1.2.11. Hamiltonovské kružnice

Formulace Hamiltonovské kružnice z 19.století náleží irskému matematikovi R.W. Hamiltonovi a britskému matematikovi T. Kirkmanovi. Matematické úlohy byly formulovány ale až ve třicátých letech 20. století. Základní problematikou HK je nalezení nejkratší možné trasy na seznamu míst v geografickém prostoru. Tato trasa začíná a končí v totožném bodě a zahrnuje veškeré body (lze si je představit jako města) ze seznamu. Základní podmínka HK spočívá v tom, že každý bod lze navštívit právě jednou a ne víckrát. Dále je znám také graf semi hamiltonovský, ten se od klasického Hamiltonovského grafu liší tím, že zde existuje cesta procházející každým uzlem grafu. Z teorie HK poté vychází řešení problému obchodního cestujícího.

Definice: Hamiltonovská cesta v grafu G je taková cesta, která obsahuje všechny vrcholy grafu G. [3]

1.2.12. Stupeň vrcholu

Vychází z počtu hran incidujících s vrcholem (uzlem). Následně lze rozlišovat vrcholy se sudým nebo lichým stupněm. Vrchol, se kterým inciduje sudý počet hran je vrchol sudý a naopak vrchol, se kterým inciduje lichý počet hran je vrchol lichý. Stupeň vrcholu lze hodnotit také podle počtu spojených hran daným vrcholem, potom se rozlišují vrcholy se stupněm 1, 2, atd. [20]

2. PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO

Problém obchodního cestujícího je diskrétní optimalizační problém, který za pomoci matických úloh hledá nejkratší možnou trasu mezi všemi uzly na ohodnoceném grafu. Z této formulace lze usoudit, že se jedná o optimalizační úlohu, jejíž úkolem je nalezení uzavření optimální trasy mezi všemi vrcholy (městy, odběrnými místy atd.). Zjednodušeně lze říct, že podstatou úlohy je navštívení obchodního cestujícího n míst takovým způsobem, aby každé místo bylo navštíveno právě jednou a následně se vrátil zpět do výchozího bodu. Z tohoto důvodu se úloha obchodního cestujícího nazývá jako okružní problém.

Formulace problému se dá obecně interpretovat jako zadání několika měst a vzdálenostmi mezi nimi. Úkolem obchodního cestujícího je projit těmito městy a následně se vrátit do výchozího města s minimálními výdaji na cestu a zároveň navštívit každé město právě jednou. Formálně se jedná o nalezení nejkratší HK v úplném ohodnoceném grafu. Problém obchodního cestujícího je z odborného hlediska řazen mezi distribuční úlohy, které se řadí mezi speciální úlohy lineárního programování. [9]

Obchodní cestující (někdy také obchodní zástupce) je zaměstnancem podniku, jehož úkolem je prodej zboží či služeb. Náplní jeho práce je cestování mezi stávajícími či potenciálními zákazníky a následná péče o ně. Při jeho cestách využívá dopravních prostředků (většinou automobilu), díky kterým může navštěvovat jednotlivé stanovené cíle. Dnešní typ obchodního cestujícího je také vybavený zařízením GPS, které obsahuje výpočtový modul pro řešení malých úloh (cca kolem 10 měst). Mapový software také obsahuje data o podrobných trasách, díky kterým může GPS odhadnout cestovní čas a naplánovat tak optimální trasu.

Tento problém je ve skutečnosti jednou z mála úloh, která dokázala vzbudit tolik pozornosti. Důvodem může být snadná formulace tohoto problému, ale zároveň velmi obtížná řešitelnost. TSP proto patří do tzv. třídy kombinatorických optimalizačních problémů známých jako NP-úplné. Lze tvrdit, že TSP je klasifikován jako NP-hard, protože nemá rychlé řešení a složitost výpočtu problému se s přibývajícími body stupňuje. [7]

2.1. Historie problému obchodního cestujícího

První setkání s problémem obchodního cestujícího je mnohem dříve, než se tímto tématem začala zabývat skupina matematiků. První úlohy řešili již jeskynní lovci plánováním optimálních tras při lovu a sběru lesních plodin. V posledních stoletích úloha ale získala na mnohem větší důležitosti.

Další základy této problematiky lze spatřit v Anglii, konkrétně u skupiny právníků. V Oxfordském slovníku existuje v angličtině slovo “circuit”, které se používalo již v 15. století a v překladu znamená obvod. Tento obvod, nebo také okrsek, měli na starost právníci, kteří po něm museli cestovat a spravovat si své oblasti. Později se objevily v USA obvodní soudy. Jeden z takových cestujících byl také mladý Abraham Lincoln, který pracoval pro Osmý soudní obvod ve státě Illinois a cestoval po čtrnácti místních soudních dvorech, které měl na starost. Kromě právníků v 18. a 19. století hojně cestovali také kazatelé, kteří při svých cestách ušli až na 5 000 mil a navštívili řadu měst. [6]

Základy pro budoucí zkoumání problematiky z matematického hlediska vytvořili matematici Švýcar Leonhard Euler (1707, Basilej - 1783, Petrohrad) a irský sir William Rowan Hamilton (1805–1865, Dublin). Autorem nejdůležitějších článků zkoumané tématiky je první zmíněný Leonhard Euler, který je v této práci uveden již jako autora vyřešené úlohy Sedmi mostů města Královce. Právě ona úloha je považována jako základ pro výzkum této problematiky. [6]

Po Eulerovi se k řešení problému vrátil v 19. století německý fyzik Gustav Kirchhoff 1824, Konigsberg - 1887, Berlín), který je znám Kirchhoffovy zákony v elektrotechnickém odvětví. Tyto zákony se týkají především toku elektrického proudu a napětí v uzavřených elektrických obvodech.

V roce 1856 vytvořil irský matematik Hamilton hru zvanou “Icosian game”. Hra spočívala v pospojování všech vrcholů pravidelného dvanáctistěnu tak, aby byly splněny podmínky TSP, tedy každý vrchol navštívit pouze jednou a vytvořit tak HK. [9]

Co se týče obecné formulace problému obchodního cestujícího, tou se ve 30. letech zabýval převážně Karl Menger. Tento matematik zveřejnil tzv. problém poštovního doručovatele, jehož cílem je nalézt nejkratší trasu spojující všechny uzly grafu. Oproti Hamlitonově hře Icosian game zohledňuje vzdálenost, kdežto Icosian Game je zaměřena pouze na nalezení trasy.

Dalšími následovníky výzkumu byli především P. CH. Mahalanobis, Hassler Whitney a Merrill Flood. Mahalanobisovi je v Indii přezdíváno otec statistiky i díky zásluze založení

Indického statistického ústavu. Tento Indický vědec zkoumal nalezení vhodné cesty mezi sběrnými místy juty v Indii.

V 50. letech minulého století byly představeny Georgem Dantzingem, což problému nabylo na popularitě. Delbert Ray Fulkerson a S. M. Johnson ze společnosti RAND Corporation prohlásili problém obchodního cestujícího za celočíselný lineární problém a v roce 1954 zveřejnili popis metody řezných nadrovin, čímž se podařilo vyřešit tehdejší úlohu o 49 městech. Velkou postavou té doby byla také známá matematička Julia Robinsonová, v jednu dobu zaměstnána u RAND Co.

Dodnes není úplně jisté, kdo za názvem problému obchodního cestujícího (v originále traveling salesman problem) stojí. Dle knihy J. W. Cooka [6] toto pojmenování užila ve své formulaci řešení úlohy TSP Julia Robinsonová, ale první pravděpodobně nebyla. Dá se předpokládat, že první, kdo tento problém pojmenoval byl Hassler Whitney. [6]

2.2. Aplikace TSP v reálném životě

Problém obchodního cestujícího je v reálném životě hojně využívaná a praktická záležitost a nachází zastoupení v celém spektru obchodu, logistice, výrobě a dalších odvětvích průmyslu, obchodu i služeb. Díky aplikaci této problematiky lze v rámci podnikových nákladů ušetřit velké množství finančních prostředků. Závisí ale samozřejmě na mnoha aspektech podniku, ať už se hovoří o aspektech jako jsou velikost podniku nebo způsob výroby a přepravy produktu.

2.2.1. Aplikace v rámci logistiky a dopravy

TSP může být pro logistiku jeden z nejsilnějších nástrojů pro ušetření času a financí. Správná příprava a plánování tras dokáže zajistit podniku konkurenční výhodu. Díky algoritmům, pro řešení úlohy problému obchodního cestujícího, lze přípravu a plánování trasy povznést na vyšší level a najít tak ideální variantu trasy. Vyzdvihnout se může například “last mile delivery”. Last mile delivery (v češtině také “Logistika poslední míle”) spočívá v zrychlování, lepším plánováním a hledání nových, efektivnějších cest. Tato disciplína momentálně hlásí velký vzestup. Jedním z důvodů tohoto vzestup je bezesporu pandemie Covid-19, která se podílela na rozšíření internetového nakupování a logistiky celkově. [8]

V rámci logistiky lze rozlišovat způsoby přepravy zboží a zásilek a tím také vymezit používání TSP v konkrétních oblastech.

1. Doručování zásilek
2. Plánování tras pro vozidla
3. Plánování tras pro letadla
4. Plánování tras pro lodě

2.2.2. Výroba

V rámci výroby je TSP užitečné především pro optimalizaci výrobních procesů, jako je například plánování tras robotů nebo dopravníkových pásů v továrně, plánování montážních linek nebo pro optimalizaci výroby částí strojů. Díky správnému aplikování problematiky v rámci výroby lze minimalizovat čas potřebný k výrobě produktu a současně ušetřit na nákladech.

2.2.3. Obchod

Stěžejním zaměřením praktické části této bakalářské práce je především řešení TSP v rámci obchodu. Zde se může mluvit o plánování tras obchodních cestujících ke svým zákazníkům, dodavatelům, partnerům nebo za účely marketingových kampaní pro minimalizaci nákladů a času stráveném na cestách. To umožňuje větší množství potenciálních návštěv za den. Užitečná by mohla být i v rámci prezidentské kampaně, kdy kandidáti cestují po městech v jednotlivých krajích.

2.2.4. Cestování a turistika

Problematika obchodního cestujícího se nevztahuje pouze na podnikové aktivity a její široké využití umožňuje usnadnění cesty také například turistům. Turistům je nápomoci při plánování jejich cest tak, aby navštívili co nejvíce měst v co nejkratším čase. Může být využita například při cestování v rámci celé Evropy, kdy se turista pokouší navštívit co nejvíce měst v co nejkratším čase. Pro turisty jsou veřejně dostupné webové aplikace, kde si lze za pomoci TSP naplánovat ideální trasu. Mezi nejpopulárnější aplikace patří například Google Maps, Triplt, Roadtrippers nebo MyRoute-app. Využití ale nachází i třeba při plánování tras cyklistů, kteří za den chtějí procestovat co nejvíce míst.

2.2.5. Výzkum a věda

V rámci vědy a výzkumu je TSP stále aktivním výzkumným tématem. Tato disciplína se soustředí především na vývoj nových metod a algoritmů.

3. METODA ŘEŠENÍ PROBLEMATIKY

Při řešení problematiky TSP lze nalézt různé metody řešení, které se dělí do tří skupin: exaktní, heuristické a metaheuristické metody. Liší se především výpočetní náročností, rychlostí a kvalitou výsledného řešení. Exaktní metody jsou vhodné pro výpočet úloh s malým počtem vrcholů. S postupným růstem uzlů a složitosti úlohy je tak potřeba využít jiné metody řešení. Alternativu lze nalézt ve zmíněných heuristických a metaheuristických metodách.

Problém obchodního cestujícího spadá do kategorie NP-úplných úloh, a tak pro nalezení optimálního řešení neexistuje efektivní algoritmus. Pokud řešíme úlohy TSP, řešením vždy nemusí být řešení optimální. Spíše ho lze nazvat dostačujícím (suboptimální).

Pokud se hovoří o řešení za pomoci heuristických a metaheuristických metod, je vhodné zmínit, že ani tyto metody nemusí dát vyhovující řešení. Největší výhodou těchto metod je především výpočetní čas, který je oproti exaktní metodě mnohem kratší, pokud porovnáváme složitosti úloh.

Vývoj heuristických metod, které v překladu znamenají hledání nebo objevování metody pokus a omyl, postupem času pokročil a vznikly již zmíněné metaheuristické metody. Tyto algoritmy většinou při řešení úloh zaručují lepší výsledky. [9][19]

3.1. Exaktní metody (optimalizační)

Díky exaktním metodám jsme vždy schopni nalézt nějaké optimální řešení. Výjimka tohoto tvrzení může nastat ve chvíli, kdy takové řešení neexistuje. Tato metoda je vhodná pro jednodušší úlohy menšího rozsahu, typicky úlohy s 10–15 uzly. Pro větší a obtížnější úlohy jsou exaktní metody nevhodné díky své časové náročnosti. Je třeba zmínit, že s nárůstem počtu míst v úloze stoupá také složitost výpočtu, a proto je pro složitější úlohy potřeba využít jiné algoritmy.

Pod exaktní metody spadá metoda větvení a mezí a její variace (metoda větvení a řezu, metoda větvení a oceňování, metoda řezu a oceňování, metoda větvení), dále se dá mluvit o metodách z kategorie lineárního programování a metoda hrubé síly. V této práci bude popsána metoda Branch and bound neboli metoda větvení a mezí. [14][19]

3.1.1. Branch and bound (metoda větvení a mezí)

Tato metoda je využívána pro řešení úloh celočíselného a smíšeného celočíselného programování a spočívá v hledání do šířky ve stromu řešení, který je postupně tvořen. Metoda se snaží nejprve odřezat neperspektivní větve, u kterých není předpoklad optimálního řešení ve stromu. Tím se také sníží složitost algoritmu. Snahou je odříznout takových větví co nejvíce, zároveň ale nesmí být odříznuta větev obsahující optimální řešení úlohy. Problémem metody je jeho výpočetní složitost a časová náročnost, stejně jako u všech dalších optimalizačních metod. Složitost a časová náročnost vypočtení metody navíc exponenciálně roste s růstem rozsahu úlohy. [14]

3.2. Heuristické metody

Vzhledem k tomu, že většina optimalizačních úloh patří do skupin NP-obtížné nebo NP-úplné, optimální algoritmy nemusí v reálném čase poskytovat optimální řešení pro úlohy rozsáhlejšího charakteru. V praxi se proto za účelem nalezení lepšího řešení využívají heuristické metody. Tato metoda nám dává přípustné řešení s tím, že hodnota účelové funkce nemusí být optimálním řešením.

Heuristické metody lze rozdělit do dvou základních skupin. První skupina se nazývá heuristiky, které tvoří řešení. Do té druhy skupiny se řadí heuristiky, které řešení zlepšují. Princip první skupiny spočívá v tvoření nebo hledání optimální trasy z výchozího místa, tzn. od začátku. Sem se řadí například metoda nejbližšího souseda, metoda vkládací, metoda založenou na algoritmech minimální kostry nebo metoda výhodnosti čísel. V této skupině algoritmů lze zmínit také Hladový algoritmus, který je velmi podobný algoritmu hledání minimální kostry grafu. Do druhé zmiňované skupiny spadá například metody 2-opt.

Ve většině případů jsou heuristické metody formulovány pro daný typ úloh. Jsou ale i obecné heuristické postupy, které lze aplikovat na obecný optimalizační problém. Tyto metody jsou nazývány metaheuristické. Podrobnosti o této metodě se nachází v kapitole 3.3. [9]

3.2.1. Metoda nejbližšího souseda

Jednou z nejjednodušších heuristik je metoda nejbližšího souseda. Princip této metody nakonec vyplývá také z názvu algoritmu. Základem je hladový algoritmus, který tvoří HK tak, že v každém kroku algoritmus vybere dva nejbližší vrcholy a ty se spojí. Tento krok se opakuje tak dlouho, dokud nejsou všechny vrcholy obsaženy ve výsledném grafu. Konec nastává ve chvíli, kdy se cesta grafem uzavře.

Pro úspěšné nalezení optimálního řešení je třeba dbát dvou základních podmínek:

- po přidání hrany nesmí vzniknout kružnice
- jeden vrchol obsahuje pouze dvě hrany (vstupní a výstupní)

Výhodou této metody je především její rychlost a jednoduchost. Jak již vychází ale z jejího principu, ne vždy dokáže dát optimální výsledky především kvůli tomu, že se je v závěru třeba vrátit zpět do výchozího bodu, a to pouze jednou cestou. Problém spočívá v tom, že ve výpočtu není uvažována délka poslední hrany. Tento algoritmus lze opakovat pro různé výchozí body, kdy je následně vybrána cesta s nejmenší celkovou délkou. [6][15]

3.2.2. Vkládací metoda

Tato metoda funguje na principu stanovení počátečního cyklu s malou podskupinou vrcholů, na kterou se nabalují další požadované vrcholy. Počáteční cyklus se skládá minimálně ze tří vrcholů, které jsou do cyklu vloženy tak, aby tvořily co možná nejkratší možnou cestu mezi body. V dalším kroku se mohou vrcholy vkládat do již existujícího cyklu čtyřmi způsoby.

Prvním způsobem přibírání vrcholů do cyklu je nejbližší vkládání. U této varianty jde o nalezení vrcholu s co nejkratší vzdálenosti od daného bodu. Druhým způsobem je pravý opak způsobu prvního. Jedná se o takzvané nejvzdálenější vkládání, při kterém dochází k hledání vrcholu s co nejvzdálenější cestou od vrcholu cyklu. Dalšími variantami možného vkládání vrcholů je vkládání nejlevnější a náhodné. Nejlevnější vkládání spočívá v prodloužení délky cyklu vrcholem tak, aby bylo co nejmenší. Náhodné vkládání vrcholů pravděpodobně není třeba vysvětlovat. Jde o náhodný výběr vrcholu, který se následně zařadí na nejlepší pozici.

Pokud během hledání cesty dojde ke shodě ve výběru vrcholu, volí se libovolně. V důsledku ale tato rozhodnutí mohou vést k několika dalším možným variantám řešení, a tak je z hlediska kvality výsledného výpočtu výhodnější spočítání všech možných alternativ a z nich určení té nejkratší. Tento důsledek metody vede ke zvýšení časové náročnosti výpočtu.

Cyklus připojování bodů se zastaví až ve chvíli, kdy jsou vyčerpány všechny zadané body a tím se vytvoří Hamiltonovský cyklus. [8][9]

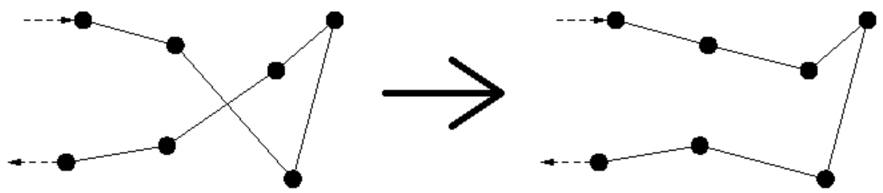
3.2.3. Metoda výhodnostních čísel

Lze ji nazvat také jako Clarkeovo – Wrightovu metodu, díky svým návrhářům. Poprvé byla zmíněna v roce 1946 a její rozdíl, oproti ostatním heuristikám, spočívá nikoliv v matici vzdáleností, ale matici takzvaných výhodnostních čísel. Základem je stanovení výhodnostních čísel ve spojení mezi dvěma uzly, které představuje míru výhodnosti spojení. Lze také říct, že se metoda zabývá výhodností vytvoření jednoho cyklu namísto dvou. [14]

3.2.4. Metoda 2.opt

Tato heuristika slouží, jak už bylo popsáno kapitole "Heuristické metody", ke zlepšování libovolných, již existujících, řešení úloh TSP. Princip této metody není složitý a spočívá ve vyjmutí dvou hran Hamiltonova cyklu bez společného uzlu a nahrazení jich dvěma jinými hranami s lepším ohodnocením tak, aby vznikl Hamiltonův cyklus s lepším ohodnocením. Změna délky cesty se počítá jako Δc. Podmínkou úspěšnosti metody je $\Delta c > 0$, pokud $\Delta c = < 0 \rightarrow$ změna není optimální, cesta se prodloužila. Příklad využití metody je znázorněn na obrázku č.8.

Metoda 2opt lze nazvat také jako metoda n-opt, kdy 2 v názvu metody označuje vyjmutí dvou hran z cesty. Dle šíře optimalizace heuristiky je n počet nahrazených hran v Hamiltonově cyklu. [9]



Obrázek 8: Funkce metody 2opt

3.3. Metaheuristické metody

Tato poslední skupina metod pro řešení problematiky problému obchodního cestujícího nezaručuje, stejně jako předešlé exaktní a heuristické metody, optimální výsledek řešeného problému. Metaheuristiky jsou, oproti heuristickým metodám, obecné algoritmy, které byly speciálně vytvořené pro řešení obtížných úloh a lze je použít na jakoukoliv úlohu. Mezi metaheuristické metody se řadí metoda tabu search, metoda optimalizace mravenčí kolonie a také genetická metoda. [10]

3.3.1. Genetický algoritmus

Hledání cesty lze přirovnat k živému organismu, který se v průběhu času mění. Na základě této myšlenky také stojí název genetických algoritmů, se kterou přišel v roce 1975 ve své knize John Holland. Holland se myšlenkou TSP nikterak nezabýval, jeho myšlenky se ale postupně k probírané problematice dostaly.

Algoritmus vychází z myšlenky, že přežít a reprodukovat se mohou pouze silnější jedinci a ti nejsilnější mají možnost žít déle a mít větší počet potomků než ti slabí. Pokud se navíc vhodně zkombinují vlastnosti rodičů, budou mít potomci lepší vlastnosti než oba rodiče. Po několika opakováních těchto procesů se vyvine silná populace s vysokým ohodnocením. Tato populace tvoří optimální řešení problému. Může se ale stát, že řešení nebude optimální a nejsilnější jedinec z celé populace bude představovat pouhé lokální minimum. Tento faktor je třeba zohledňovat z toho důvodu, že stejně, jako je tomu například i v přírodě, evoluční proces vzniká a vyvíjí se také ze série náhodností, které ne vždy musí být příznivé. [6][10][9]

3.3.2. Optimalizace mravenčí kolonie

Mravenčí kolonie, stejně jako genetický algoritmus, vychází z evoluce přírody. Lze si tuto metodu představit na reálné situaci, kterou asi většina domácností zná. Základem je způsob hledání potravy mravenců, kteří při hledání potravy využívá kolektivního chování. Mravenci při hledání potravy zanechávají na cestě biologickou stopu ve formě feromonů (chemický signál produkovaný jedním organismem za účelem ovlivnění chování jedinců stejného druhu). Čím větší zásoby potravy mravenec najde, tím je větší pravděpodobnost, že se na dané místo znovu vrátí a tím za sebou znovu zanechá stopu feromonů, čímž zesílí prvotní biologickou stopu. Čím silnější biologická stopa je, tím větší je pravděpodobnost, že se po této cestě vydá za potravou více mravenců. Ti poté tvoří dlouhé a obousměrné kolonie, které každý ve svém životě už určitě někdy viděl. Po určité době se mravencům podaří svoji trasu optimalizovat a neudržovaná, původní, delší trasa díky vlastnostem feromonů zaniká.

Pro řešení úloh TSP se optimalizace mravenčí kolonie využívá tím způsobem, že se na začátku stanoví nějaký počet takzvaných mravenců, kteří představují v podstatě mravence totožné těm, kteří se nachází v přírodě. Tito mravenci jsou umístěni ve vrcholech a my jim dovolíme se libovolně pohybovat mezi nimi tak, aby dodržovali základní podmínky TSP. Mravenec, který vrcholy projde s nejkratší vzdáleností za sebou zanechá stopu, kterou lze přirovnat ke stopě feromonů v přírodě. Stezku s nejsilnější stopou budou následně preferovat také ostatní mravenci, kteří se díky opakování dané cesty budou snažit najít další, kratší způsoby dané cesty. Proces mravenců se opakuje tak dlouho, dokud není nalezena nejkratší cesta mezi vrcholy. [6]

3.3.3. Tabu prohledávání (Tabu Search)

Spočívá v prohledávání přípustných řešení. U heuristických metod dochází k uváznutí v lokálním optimu. Tento problém lze řešit pomocí tabu prohledávání. Vždy u tohoto algoritmu existuje seznam nazývaný tabu. V tomto seznamu jsou uloženy veškeré řešení, ke kterým se algoritmus již nesmí vracet, jelikož už byla použita. Kapacita tabu seznamu je ale omezená, a tak se nejstarší varianty na seznamu postupně za seznamu umazávají. [16]

3.3.4. Simulované žíhání

Metoda simulovaného žíhání vychází z článku autorů Scotta Kirkpatricka, Daniela Gelatta a Maria Vecchiho, kteří se snažili popsat nalezení cesty mezi 400 městy. Pojem simulované žíhání dle autorů vychází ze statistické mechaniky, kde žíhání představuje proces zahřátí materiálu a následné ochlazení za účelem získání základního stavu minimální energie neboli pro získání takových vlastností obráběných kovů, které jsou pro nás užitečné. Fyzikální princip je založen na vzniku velkých krystalů s menšími defekty při zahřátí na vysokou teplotu. Tyto atomy se uvolňují ze svých počátečních pozic a náhodně kmitají mezi stavy s vyšší energií. Při chlazení dochází ke zpomalování kmitů a tím více se atomy drží na na pozicích s nízkými energiemi.

Simulované žíhání je tedy postupné zlepšování řešeného problému pomocí náhodných změn. Úkolem algoritmu je nalezení globální optimum (nejlepší řešení v celém zadaném prostoru). Jednotlivá řešení jsou poté srovnávána na základě ohodnocení, kdy se algoritmus snaží docílit minimální hodnoty tohoto hodnocení.

Je to zobecnění horolezeckého algoritmu s tím, že u simulovaného žíhání může metoda přijmout s určitou pravděpodobností i takovou sousední cestu, která je horší než ta současná. Tato pravděpodobnost se s pokračováním algoritmu snižuje. [6]

Přednosti tohoto algoritmu spočívají ve schopnosti vyhýbání se lokálním optimům a v nacházení globálních optimum, schopnost řešit velké a složité úlohy. Algoritmus však může být pomalý a pro velké problémy náročný na výpočetní výkon.

4. CESTUJÍCÍ U VYBRANÝCH SUBJEKTŮ

V této části bakalářské práce bude představen problém podniku EASY POWER s.r.o. a podnikatele Ondřeje Vondry při jejich obchodních cestách. Snahou praktické části práce je nalézt pro subjekty optimální plánování tras pro obchodního cestujícího. Pojem optimální trasa znamená trasa s co nejnižším ekonomickým zatížením. Snahou bude minimalizace nákladů na cesty a nalezení nedostatků v plánování tras založených na datech GPS. Na minimalizaci nákladů ale působí spousta dalších faktorů, které nelze ovlivnit. Jako faktory, ovlivňující výši nákladů za ujetou trasu, je možné označit například typ automobilu (natural, diesel), průměrná spotřeba vozidla, převýšení na trase nebo dopravní situace (semafory, zácpy).

4.1. Implementace evolučního algoritmu

Pro optimalizaci naplánované trasy je možné využít evoluční algoritmus, který by v tomto případě mohl být optimální variantou zvoleného algoritmu. V MS Excel je dostupný doplněk solver, který dokáže optimální trasu naplánovat skrze evoluční neboli genetický algoritmus. Pro názorný příklad budou využita stejná data, jako v příkladě č.1.

Výhodou tohoto algoritmu je velice snadná a levná implementace do kteréhokoliv okružního problému. Pokud se dodrží kroky, které jsou popsány v následujících odstavcích, dokáže se vytvořit matici vzdáleností. Tyto vzdálenosti jsou vyhledávány pomocí aplikace Google Maps.

Pro správné použití evolučního algoritmu v programu MS Excel je zapotřebí využít správných vzorců a konfigurací řešitele. Každá chyba v konfiguraci příkladu může znamenat nefunkčnost metody nebo zkreslení výsledků.

Postup

1. Vytvoření matice vzájemných vzdáleností bodů
2. Sestavení vzorce z matice vzdáleností $(= INDEX\ (MATICE\ HODNOT; “Z“ + 1; “Do“ + 1))$ a vložení do sloupce “Vzdálenost”.
3. V každém řádků ve sloupci „Z“ musí být odkaz na předchozí hodnotu ve sloupci „DO“. Například v buňce „A3“ bude příkaz: = „B2“
4. Přidání doplňku „Solver“ do MS Excel.
5. V záložce “Data” využít doplňku “Řešitel”.
6. Účelová funkce bude “SUMA” všech vzdáleností.
7. V řádku “Hledat” využít “MIN” pro nalezení nejkratší trasy.
8. Proměnné modelu jsou hodnoty ve sloupci “Do”, kromě poslední proměnné, protože ta musí být pro návrat do výchozího bodu znovu 0, stejně jako tomu bude u startovního bodu v prvním řádku sloupce „Z“.
9. Je zapotřebí přidat omezující podmínku, kde “Levá strana” jsou hodnoty ve sloupci “Do” (znovu bez poslední proměnné 0), na “Pravé straně” bude “Vše různé” a jako operand rovnice použijme “různé”.
10. Ve výběru metody řešení je volen “Evoluční algoritmus”. V možnostech je potřeba označení možnosti “Použít automatické měřítko”.
11. “Řešit”.

	A	B	C
1	Z	DO	Vzdálenost
2	0		0
3	0		0
4	0		0
5	0		0
6	0		0
7	0	0	0
8		Celkem	0

Obrázek 9: Tabulka TSP solveru

Na obrázku č.9 je znázorněna tabulka, do které bude MS Excel zapisovat optimální trasu. Takto by měla vypadat před využitím zmíněného solveru v popisu postupu. Po správném použití solveru Excel nějakou dobu vypočítává optimální řešení a následně tabulku vyplní jako je na obrázku č.10.

		Zahradní	Benešova	Lorecká	Na Vyšehr	5. května	Močovice
		0	1	2	3	4	5
Zahradní	0	0	19	19	24,6	23,8	11,5
Benešova	1	19	0	0,8	25,8	8,3	10,3
Lorecká	2	19	0,8	0	26,6	8,3	10,3
Na Vyšehr	3	24,6	25,8	26,6	0	33,6	26,4
5. května	4	23,8	8,3	8,3	33,6	0	9,9
Močovice	5	11,5	10,3	10,3	26,4	9,9	0

Z	DO	Vzdálenost
0	3	24,6
3	2	26,6
2	1	0,8
1	4	8,3
4	5	9,9
5	0	11,5
	Celkem	81,7

Obrázek 10: Znázornění aplikace algoritmu na příkladu č.1

Výhodou implementace tohoto algoritmu do MS Excel je také přehlednost. Na první pohled je zřejmé, jaká trasa by pro obchodního cestujícího byla ta správná. Každé číslo má své označení adresy.

4.2. Analýza společnosti EASY POWER s.r.o.

Společnost EASY POWER s.r.o. byla založena 21.3.2008 zápisem do OR u Městského soudu v Praze. Sídlo společnosti se nachází v Kutné Hoře na adrese Talafusova 974. V tuto chvíli zaměstnává 4 zaměstnance.

Společnost se zabývá dodávkami elektrické energie a plynu ke koncovým zákazníkům. Kromě toho se v posledních letech zaměřila na výstavbu lokálních distribučních soustav a podporuje developerské projekty skrze dodávky energie do odběrných míst i jejich částečným financováním.

Za tímto účelem je v podniku zaměstnán takzvaný obchodní zástupce, který se skrze naplánované schůzky snaží získat nové zákazníky a přivést tak do podniku další zisk z jeho služeb. Na svých cestách je obchodnímu zástupci poskytnut služební automobil. Plánování tras probíhá skrze mobilní aplikaci Waze za účelem nalezení co nejrychlejší trasy.

Cílem této práce je nalezení nikoliv té nejrychlejší trasy, protože pro podnik není rychlost cestování mezi zákazníky primární, ale té nejkratší. Trasa by měla být v nejlepším případě ekonomicky výhodnější. Společnost EASY POWER s.r.o. se nikdy dopravní optimalizací nezabývala a obchodní zástupci, včetně jednatelů společnosti, využívali pro své cesty různé navigační systémy. Zde se dá hovořit o již zmíněné aplikaci Waze, Google Maps nebo zabudované navigaci v služebním automobilu. Nutno dodat, že jednotlivá služební auta jsou využívána i pro soukromé účely. Soukromé cesty jsem z hodnocených příkladů odfiltroval a v těchto případech se jedná čistě o služební cesty obchodního cestujícího.

Společnost využívá služeb společnosti GlobalSec s.r.o. Jednotlivé cesty služebních automobilů jsou monitorovány pomocí zabudované komunikační jednotky. Tato jednotka je skrytě nainstalována ve voze a v okamžiku aktivace začne jednotka v reálném čase zaznamenávat pohyb a polohu vozidla. Komunikace probíhá na základě spojení s GPS satelity. Díky spolupráci se společností GlobalSec jsou veškeré trasy podrobně zaznamenávány do pamětní jednotky, kde se zpracovávají a ukládají.

Obchodní cestující využívá osobní automobil značky Volkswagen Golf VII generace vyrobené roku 2017. Automobil disponuje dieselovým motorem 1.6 TDI s výkonem 85 kW (115 koní). Průměrná spotřeba mimo město je uváděna jako 3.8–3.9 l / 100 km, ve městě 4.6–4.7 l /100 km. Na analyzovaných cestách se vzhledem ke struktuře tras, které se odehrávají zčásti ve městech a z části mimo města, budeme orientovat pomocí kombinované spotřeby, která udává průměr těchto dvou veličin. Průměrná kombinovaná spotřeba vozidla se dle výrobce pohybuje okolo 4.1–4.2 l / 100 km. Objem palivové nádrže vozidla je 50 l.

Pokud jde o cenu paliva, obchodní cestující při svých cestách nemá preferovanou benzinovou stanici, a tak bude pro výpočet použit průměr ceny ve Středočeském kraji. Pro únor 2023 je průměrná cena dieselového paliva, dle serveru [11], uvedena jako 36,74 Kč. U ceny paliva se dá také zmínit amortizace vozidla. Amortizace udává míru opotřebení daného předmětu. Tento fakt je třeba do ceny cesty zahrnout z toho důvodu, že vůz používáním ztrácí na své hodnotě. Opotřebení automobilu je fyzické i morální (ovlivněné technickým pokrokem v odvětví), tzn automobil na hodnotě ztrácí i ve chvíli, kdy používán není. Amortizace pro rok 2023 je stanovena na 5,20 Kč na ujetý km.

Stanovení nákladů na 1 ujetý km s průměrnou spotřebou 4,2 l / 100 km, průměrnou cenou paliva 36,66 Kč a amortizací 5,20 Kč:

$$4.2 \cdot 36{,}74 = 154{,}31 \text{ Kč} / 100 \text{ km}$$

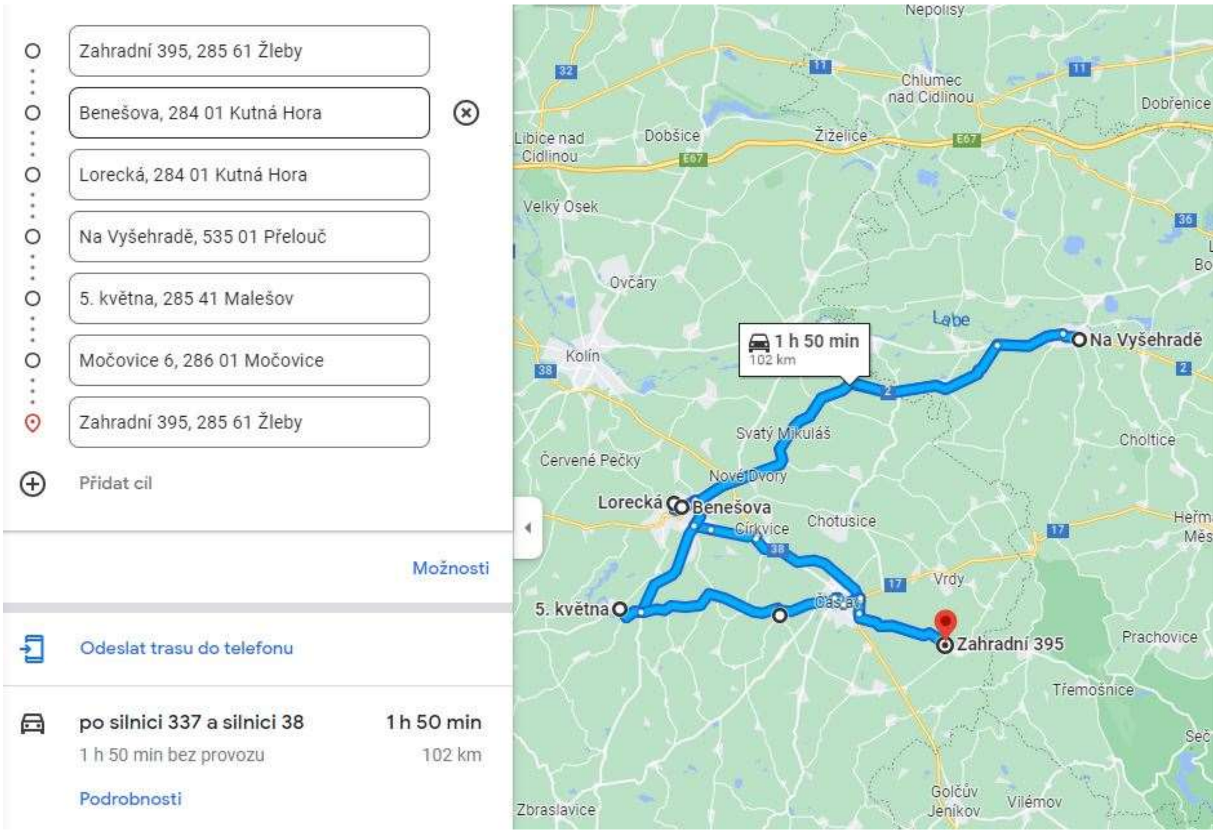
$$154{,}31 / 100 = 1{,}54 \text{ Kč} / 1 \text{ km}$$

$$1{,}54 + 5{,}20 = 6{,}74 \text{ Kč} / 1 \text{ km}$$

4.2.1. Příklad č.1

4.2.1.1. Představení problému

Obchodní cestující si naplánoval na den 27.2.2023 čtyři schůzky s potenciálními zákazníky. První schůzku si dohodl na adrese Lorecká, Kutná Hora. Druhá schůzka bude probíhat na adrese Na Vyšehradě, Přelouč, poté pojede na schůzku na adresu 5. května, Malešov



Obrázek 11: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps

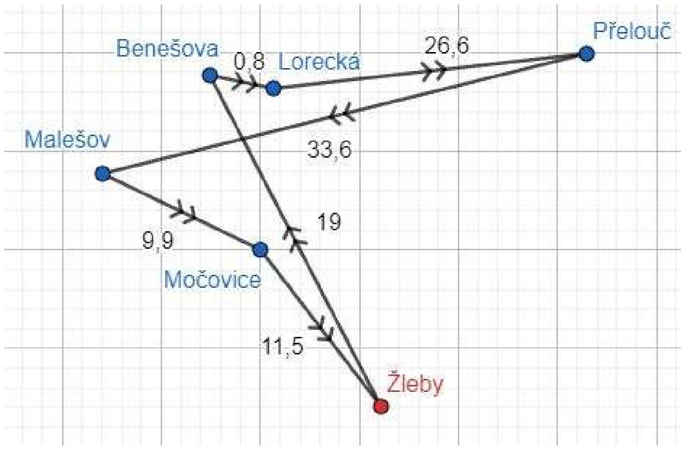
a poslední schůzka se uskuteční na adrese Močovice 6. První jeho zastávka ale bude v kanceláři společnosti na adrese Benešova, v Kutné Hoře z důvodu pravidelné pondělní porady. Je nutné také dodat, že obchodní cestující bydlí na adrese Zahradní 395, Žleby a z tohoto místa bude vždy vyjíždět a zároveň zde končit.

Pokud se jednotlivá místa schůzek vloží do aplikace Google Maps postupně tak, jako jsou schůzky naplánované, vygeneruje se následující trasa. Celková doba, kterou obchodní zástupce stráví v automobilu na cestě, jsou necelé 2 hodiny a urazí při ní 102 km. Již dle zobrazeného grafu na obrázku č.11 lze usoudit, že taková cesta optimální rozhodně není jak z hlediska časového, tak i ekonomického.

Datum	Začáte	Popis	Konec	Popis	Doba	Služeb.	Souk	Prům.	Max.
27.02.2023	07:37	Zahradní 395, Žleby, CZ	07:56	Benešova, Kutná Hora, CZ	00:19:00	18,88	0	72km/h	104km/h
27.02.2023	10:48	Benešova, Kutná Hora, CZ	10:51	Lorecká, Kutná Hora, CZ	00:03:25	0,79	0	67km/h	85km/h
27.02.2023	12:14	Lorecká, Kutná Hora, CZ	12:42	Na Vyšehradě 926, Přelouč, CZ	00:28:16	27,01	0	33km/h	53km/h
27.02.2023	14:14	Na Vyšehradě 926, Přelouč, CZ	14:49	5. května, Malešov, CZ	00:34:49	33,64	0	78km/h	105km/h
27.02.2023	15:20	5. května, Malešov, CZ	15:31	Močovice, Močovice, CZ	00:11:32	9,98	0	63km/h	92km/h
27.02.2023	15:58	Močovice, Močovice, CZ	16:10	Zahradní 395, Žleby, CZ	00:12:39	11,53	0	66km/h	87km/h

Obrázek 12: Jízdní data č.1

Na obrázku č.12 je znázorněna trasa obchodního cestujícího v danou pracovní dobu, očištěna o jízdy za osobními účely. Z těchto dat lze vydedukovat, že obchodní cestující dle zabudovaného softwaru od společnosti GlobalSec urazil celkem 101,8 km. Tato hodnota téměř přesně sedí s výstupní hodnotou z aplikace Google Maps a tak se dá usoudit, že jsou tato data věrohodná. Přibližně se shoduje i doba strávená za volantem, která je až na jednotky minut stejná.



Obrázek 13: Graf jízdy

Trasa, naplánovaná v aplikaci Google Maps, se dá představit také jako graf. Graf je znázorněn pouze za účelem grafické interpretace a díky tomu i lepší orientace v mapě. Graf byl sestaven v internetové matematické aplikaci GeoGebra.

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$102 \cdot 6{,}74 = 687{,}48 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$687{,}48 \cdot 4 \cdot 12 = 32\,999{,}04 \text{ Kč}$$

Tento postoj je velmi teoretický, protože obchodní cestující většinou plánuje časy schůzek dle potřeb zákazníků. Společnost si zakládá na co možná největší vstřícnosti a co nejlepší péči o zákazníka, a tak se snaží s termínem schůzky primárně vyjít vstříc. Příjmy společnosti z poskytovaných služeb jsou navíc dostatečně vysoké na to, aby pokryly neefektivní cestování.

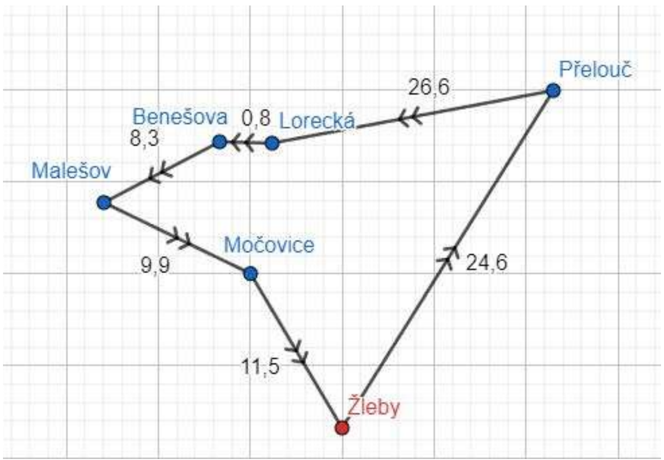
4.2.1.2. Řešení

Jak již bylo uvedeno, pro účely optimalizace obchodních cest bude využit evoluční algoritmus. Výhodou tohoto algoritmu je velice snadná a levná implementace do kteréhokoliv okružního problému.

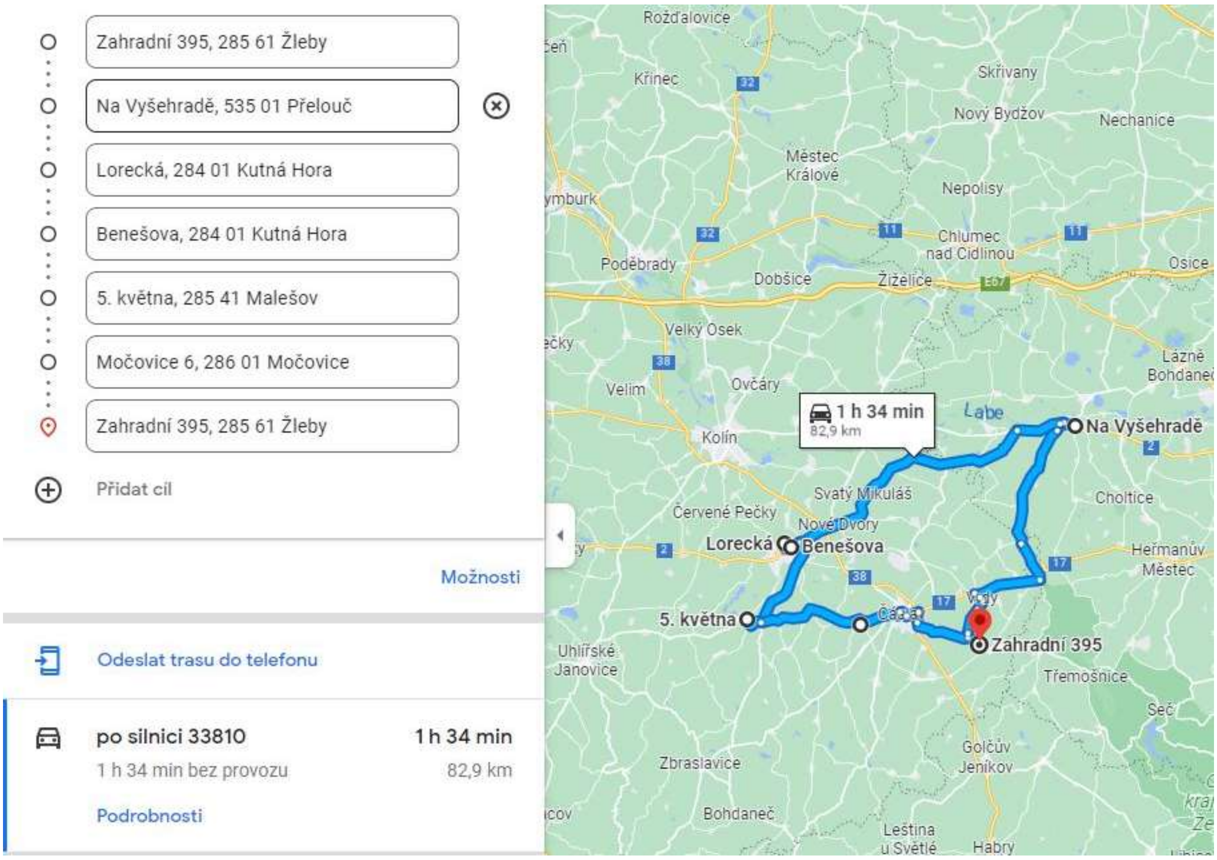
		Zahradní	Benešova	Lorecká	Na Vyšehr	5. května	Močovice
		0	1	2	3	4	5
Zahradní	0	0	19	19	24,6	23,8	11,5
Benešova	1	19	0	0,8	25,8	8,3	10,3
Lorecká	2	19	0,8	0	26,6	8,3	10,3
Na Vyšehr	3	24,6	25,8	26,6	0	33,6	26,4
5. května	4	23,8	8,3	8,3	33,6	0	9,9
Močovice	5	11,5	10,3	10,3	26,4	9,9	0

Z	DO	Vzdálenost
0	3	24,6
3	2	26,6
2	1	0,8
1	4	8,3
4	5	9,9
5	0	11,5
	Celkem	81,7

Obrázek 14: Výstup evolučního algoritmu



Obrázek 15: Optimalizovaný graf v GeoGebře



Obrázek 16: Optimalizovaná trasa v GeoGebra

Na první pohled je zřejmé, jaká trasa by pro obchodního cestujícího byla ta správná. Každé číslo má své označení adresy. Z toho je evidentní, že pracovní den obchodního cestujícího by měl začít na adrese Na Vyšehradě v Přelouči. Odtud pokračovat na adresu Lorecká a Benešova v Kutné Hoře. Odtud by měla cesta pokračovat směrem na adresu 5. května, Malešov, a nakonec do Močovic. Zde by obchodní cesta končila a následoval návrat do výchozího bodu, tedy místa bydliště.

Pro lepší představu trasy bylo aplikací GeoGebra vytvořeno grafické znázornění optimalizované trasy. Zde lze porovnat také tvar okružního problému. V případě optimalizované trasy lze vypozorovat, že graf je ucelený okruh bez jakéhokoliv průsečíku mezi uzly. Oproti předchozímu grafu je tento graf mnohem přehlednější a pro řidiče i pohodlnější v rámci cestování. Na své cestě se mezi uzly nemusí nikam vracet a veškeré zákazníky má “po cestě”.

Na základě výsledku solveru v MS Excel je zřejmé, že optimalizace původní trasy se vydařila a finální trasu se podařilo zkrátit. Z původních 102 km dlouhé trasy se podařilo tuto trasu naplánovat tak, aby celková ujetá vzdálenost byla o 20 km kratší. Trasu se dle aplikace

Google Maps podařilo zkrátit také časově, kdy by obchodní cestující při ideálněji naplánované trase dokázal ušetřit dalších 16 minut. Trasa vypočítaná v programu MS Excel a Google Maps se od sebe liší o zanedbatelných 1,2 km. Tato odchylka vzniká v závislosti na hustotě dopravy, kdy v každý jiný čas počítá program Google Maps s jinou, nejlepší trasou.

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$102 \cdot 6{,}74 = 687{,}48 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$82{,}9 \cdot 6{,}74 = 558{,}75 \text{ Kč}$$

Řečí čísel se potvrzuje, že optimalizovaná trasa vyjde společnost EASY POWER s.r.o. levněji. V případě tohoto pracovního dne se dá hovořit o částce okolo 130 Kč. Tato částka samozřejmě závisí na spotřebě automobilu a jízdních vlastnostech řidiče. Jízdní vlastnosti řidiče přímo ovlivňují spotřebu automobilu. Dalším faktorem je taky struktura trasy, kdy jiná spotřeba bude v kopcovitých oblastech, jiná v nížinách a jiná ve městě či na dálnici. Pokud se ale trasa bude orientovat na základě udávané průměrné spotřeby automobilu, dojdeme k rozdílu 128,73 Kč.

Dle obchodního cestujícího společnosti EASY POWER s.r.o. dochází k takovým cestám za účelem obchodu málokdy, typicky jednou každý týden. Pokud bychom tedy předpokládali, že tato trasa by se každý týden alespoň podobala této trase, lze dojít k následným ročním nákladům.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$687{,}48 \cdot 4 \cdot 12 = 32\,999{,}04 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

$$558{,}75 \cdot 4 \cdot 12 = 26\,820 \text{ Kč}$$

Porovnáním úspor díky této metodě vůči plánování trasy bez jakékoliv optimalizace, je možné dojít k závěru, že při aplikaci evolučního algoritmu může společnost ročně ušetřit na nákladech přibližně 6 179,04 Kč.

4.2.2.Příklad č.2

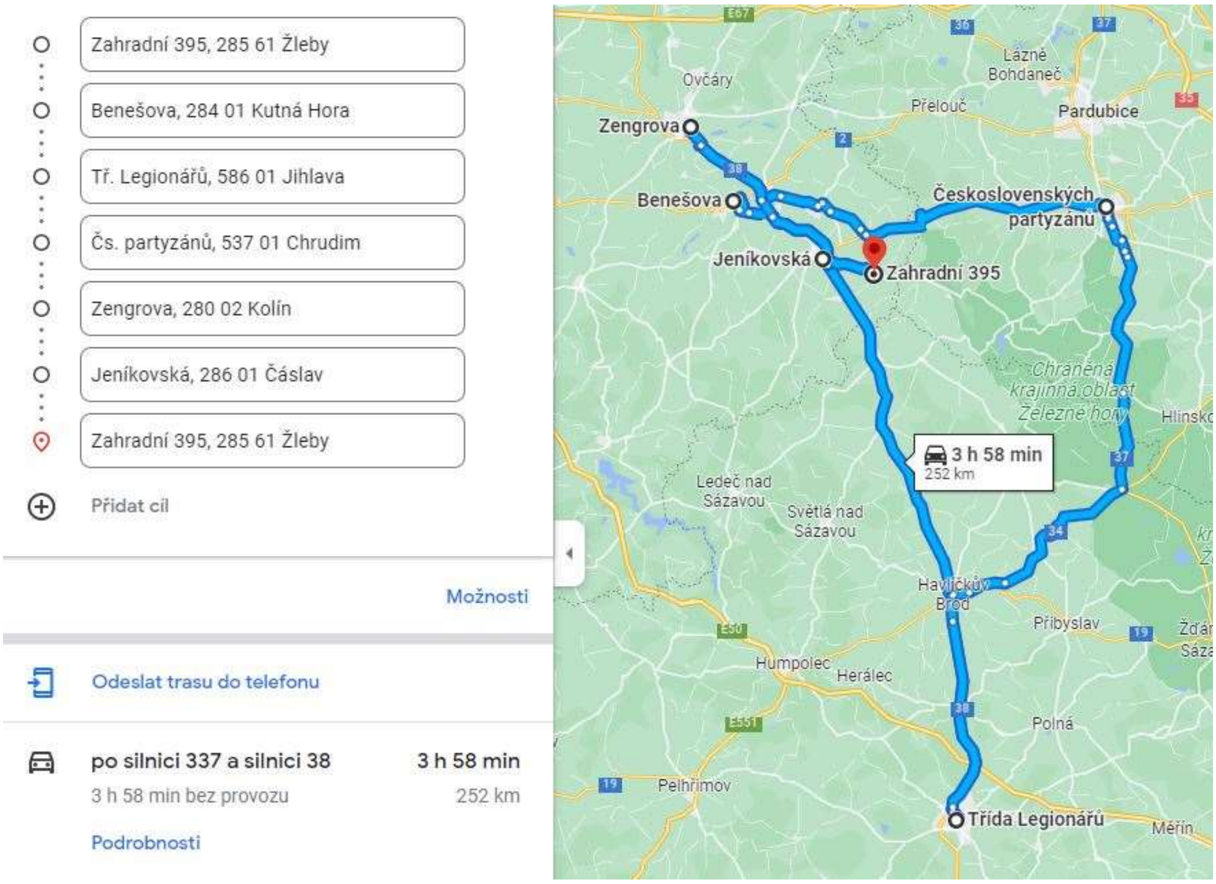
4.2.2.1. Představení problému

Dne 6.3.2023 má obchodní cestující naplánované schůzky s potenciálně novými zákazníky. Jeho začátek pracovního dne začíná znovu na adrese Benešova v Kutné Hoře, v místě kanceláře společnosti. Odtud po poradě musí být v 10:00 na adrese Třída Legionářů, Jihlava. Dále bude pokračovat ve své jízdě na adresy Československých partyzánů, Chrudim a Zengrova, Kolín. Poslední schůzka proběhne na adrese Jeníkovská, Čáslav. Zde jeho pracovní den končí a vrací se zpět na adresu bydliště.

Po prozkoumání trasy, kterou obchodní cestující urazil, zjistíme, že dle Google Maps by tato trasa měla být dlouhá přibližně 252 km. Z dostupných dat, poskytnutých společností EASY POWER s.r.o. je zřejmé, že tato vzdálenost s menší odchylkou odpovídá. Dle systému GlobalSec, zabudovaném v automobilu, lze vyčíst, že skutečná ujetá vzdálenost je o 1 km vyšší než plánovaná dle Google Maps. Čas, strávený za volantem, se podle aplikovaného softwaru v automobilu pohybuje okolo 4 hodin a 10 minut (o 12 minut více, než předpokládaný čas na Google Maps).

Datum	Začátek	Popis	Konec	Popis	Doba	Služeb.	Soukr.	Prům.	Max.
06.03.2023	07:35	Zahradní 395, Žleby, CZ	07:57	Benešova, Kutná Hora, CZ	00:21:42	19,06	0	66km/h	97km/h
06.03.2023	09:45	Benešova, Kutná Hora, CZ	10:50	Tř. Legionářů, Jihlava, CZ	01:04:32	75,12	0	71km/h	120km/h
06.03.2023	11:26	Tř. Legionářů, Jihlava, CZ	12:54	Čs. partyzánů 43, Chrudim, CZ	01:27:10	79,2	0	74km/h	114km/h
06.03.2023	12:49	Čs. partyzánů 43, Chrudim, CZ	13:37	Zengrova 911, Kolín, CZ	00:49:01	50,52	0	56km/h	96km/h
06.03.2023	14:31	Zengrova 911, Kolín, CZ	14:52	Jeníkovská, Čáslav, CZ	00:20:38	22,4	0	48km/h	108km/h
06.03.2023	16:08	Jeníkovská, Čáslav, CZ	16:16	Zahradní 395, Žleby, CZ	00:07:11	6,71	0	64km/h	117km/h

Obrázek 17: Jízdní data č.2

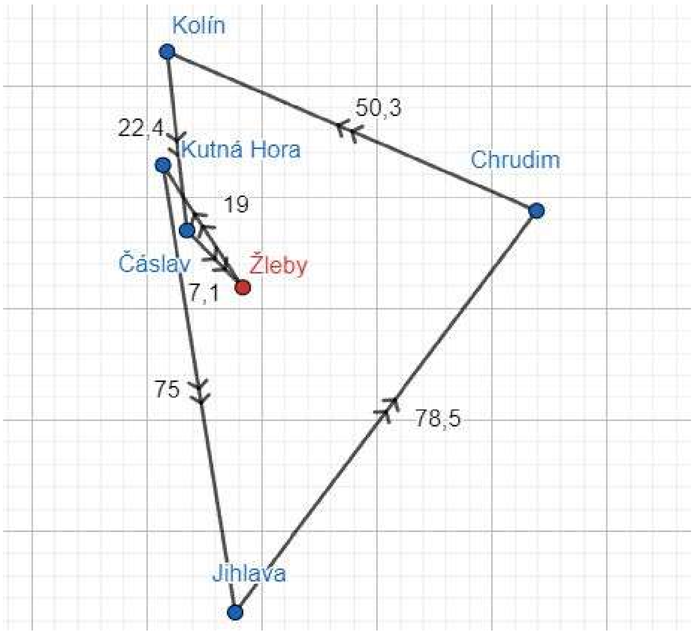


Obrázek 18: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps

Z grafického znázornění cesty na obrázku 19 lze usoudit, že trasa je plánována zbytečně komplikovaně a neefektivně. Tvar grafu navíc není celistvý a vzniká zde několik průsečíků mezi body Čáslav, Kutná Hora, Žleby. Z toho lze usoudit, že pravděpodobně největší plýtvání jízdních nákladů tohoto dne vznikají právě v tomto úseku.

4.2.2.2. Řešení

Po sestavení matice vzdáleností a vytvoření pokynu pro vyhodnocení pomocí MS Excel zjistíme, že optimalizovaná trasa by mohla být až o 30 km kratší a ujet tuto trasu by obchodnímu cestujícímu zabralo o téměř půl hodiny méně.



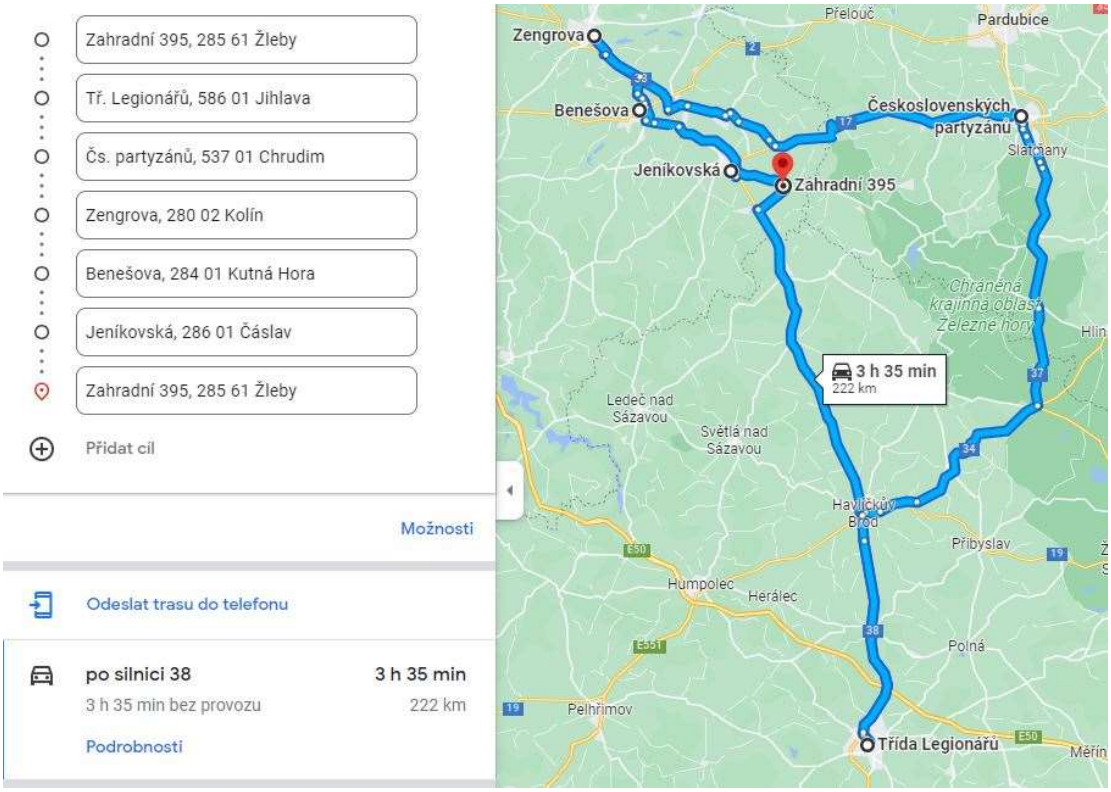
Obrázek 19: Graf jízdy

		Zahradní	Benešova	Třída Legic	Čs. Partyzá	Zengrova	Jeníkovská
		0	1	2	3	4	5
Zahradní	0	0	19	60,9	31,6	26,1	7,1
Benešova	1	19	0	75	44	10,4	15
Třída Legic	2	60,9	75	0	78,5	82,1	61,5
Čs. Partyzá	3	31,6	44	78,5	0	50,3	32,8
Zengrova	4	26,1	10,4	82,1	50,3	0	22,4
Jeníkovská	5	7,1	15	61,5	32,8	22,4	0

Z	DO	Vzdálenost
0	2	60,9
2	3	78,5
3	4	50,3
4	1	10,4
1	5	15
5	0	7,1
	Celkem	222,2

Obrázek 20: Výstup evolučního algoritmu

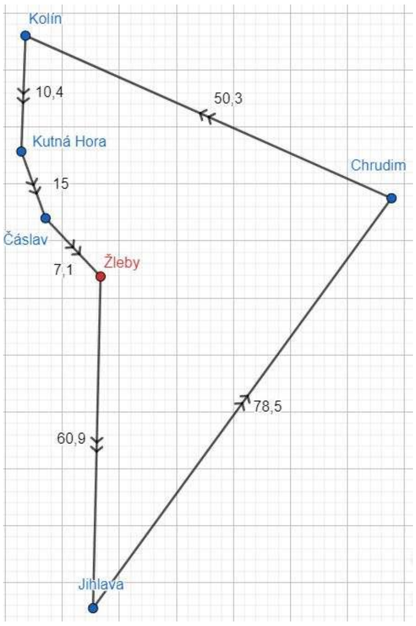
První zastávka by dle optimalizované trasy byla na adrese Třída Legionářů v Jihlavě a odtud pokračovala na adresu Československých partyzánů, Chrudim. Z Chrudimi by se



Obrázek 21: Optimalizovaná trasa v Google Maps

obchodní cestující ubral na schůzi v ulici Zengrova, Kolín, dále Benešova v Kutné Hoře a jako poslední by cestující navštívil ulici Jeníkovskou v Čáslavi.

Ve srovnání s grafem jízdy bez optimalizace je patrné, že graficky si jsou obě okružní jízdy velmi podobné. Největší rozdíl nastává ve finální fázi, kdy záleží na pořadí, ve kterém obchodní cestující navštíví města Čáslav, Kolín, Kutná Hora. Ušetřených 30 km na jízdě se nachází převážně v přesně této oblasti, kdy obchodní cestující ráno musí na schůzi do Kutné Hory až odtud následně do Jihlavy. Dle nákladově optimálního scénáře by se zde dalo uvažovat nad ranní schůzí prostřednictvím nějaké streamovací platformy, za zmínku stojí aplikace MS Teams, Skype a další podobné. Díky tomu by nejen obchodní cestující mohl ušetřit náklady společnosti, ale také lépe zužitkovat čas, který, cestou na poradu a z následně i z ní, promrhá.



Obrázek 22: Optimalizovaný graf v GeoGebře

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$252 \cdot 6{,}74 = 1698{,}5 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$222{,}2 \cdot 6{,}74 = 1\,497{,}63 \text{ Kč}$$

Po vyhodnocení početní části analýzy nákladů lze na základě výsledků dojít k závěru, že pokud se pro efektivnější plánování schůzek využije evoluční algoritmus, dokáže společnost na této jízdě ušetřit 201 Kč. Tato částka není až tak vysoká, ale v dlouhodobém horizontu by se takto daly na nákladech ušetřit tisíce korun ročně. Tento fakt je zřejmý již z příkladu č.1. Důležité je také vyhodnotit si ušetřený čas obchodního cestujícího na cestě.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$1698{,}5 \cdot 4 \cdot 12 = 81\,528 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

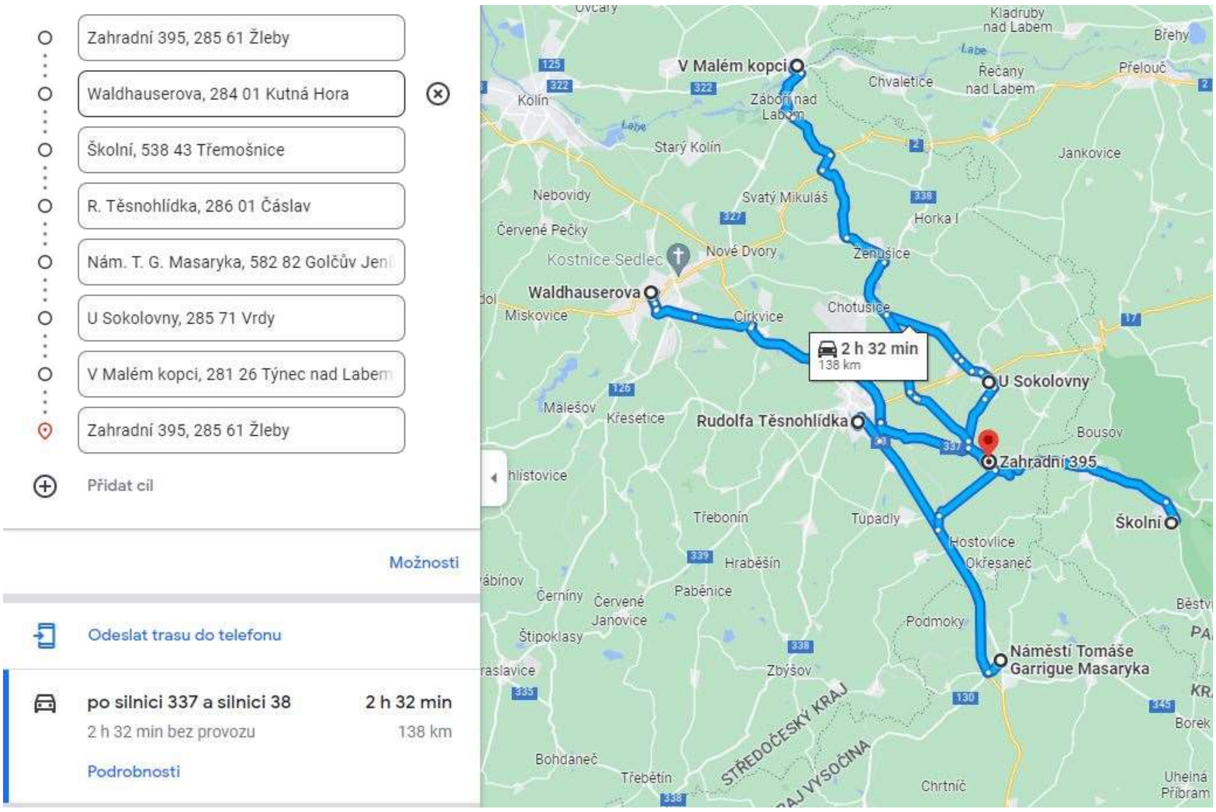
$$1\,497{,}63 \cdot 4 \cdot 12 = 71\,886{,}24 \text{ Kč}$$

Po vyjádření nákladů je zřejmé, že pokud bude společnost neefektivně plánovat trasy podobné této, může díky tomu zvýšit své náklady o 9 641,76 Kč. Mimo částky je dobré také zmínit faktor času, který může být, díky optimalizaci tras, ušetřen až o jednotky hodin.

4.2.3. Příklad č.3

4.2.3.1. Představení problému

Dne 20.3.2023 má obchodní cestující společnosti EASY POWER s.r.o. naplánovaných 5 schůzek. Jako první zastávku znovu volí v kanceláři společnosti na adrese Benešova, Kutná Hora (v datech Waldhauserova, pravděpodobně jiné parkování). Odtud vyráží na první schůzku na adresu Školní, Třemošnice, dále poté R. Těsnohlídka, Čáslav. V pozdější fázi dne má poté domluvené také schůzky v Golčově Jeníkově, ve Vrdech a Týnci nad Labem.



Obrázek 23: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps

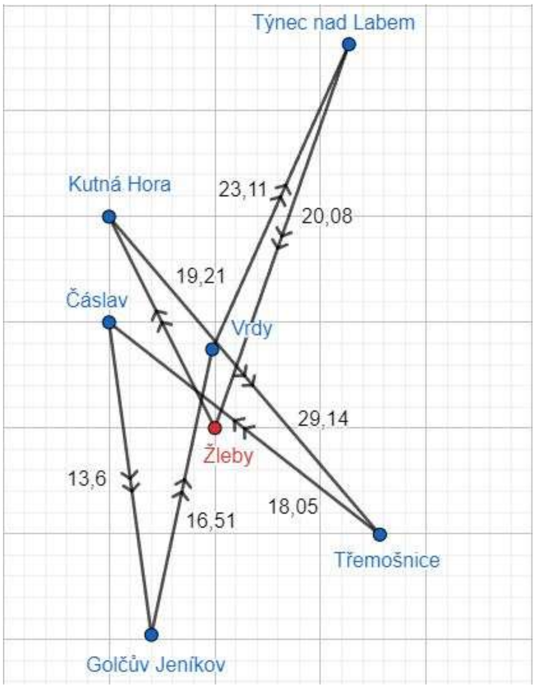
Po zadání všech navštívených bodů na mapu Google Maps je zřejmé, že trasa plánovaná neefektivně je dlouhá přibližně 138 km. Tato celá cesta zabere obchodnímu cestujícímu zhruba 2 hodiny a 32 minut.

Datum	Začáte	Popis	Konec	Popis	Doba	Služeb.	Souk	Prům.	Max.
16.03.2023	06:15	Zahradní 395, Žleby, CZ	06:48	Waldhauserova 423/8, Kutná Hora, CZ	00:33:16	19,21	0	76km/h	103km/h
16.03.2023	08:26	Waldhauserova 423/8, Kutná Hora, CZ	08:55	Školní 51, Třemošnice, CZ	00:29:06	29,14	0	62km/h	107km/h
16.03.2023	09:34	Školní 51, Třemošnice, CZ	09:57	R. Těsnohlídka 419/7, Čáslav, CZ	00:22:36	18,05	0	46km/h	88km/h
16.03.2023	10:21	R. Těsnohlídka 419/7, Čáslav, CZ	10:39	Nám. T. G. Masaryka, Golčův Jeníkov, CZ	00:18:19	13,6	0	67km/h	98km/h
16.03.2023	12:24	Nám. T. G. Masaryka, Golčův Jeníkov, CZ	12:44	U Sokolovny, Vrdy, CZ	00:20:13	16,51	0	35km/h	86km/h
16.03.2023	13:18	U Sokolovny, Vrdy, CZ	13:38	V Malém kopci, Týnec nad Labem, CZ	00:20:11	20,08	0	57km/h	91km/h
16.03.2023	14:21	V Malém kopci, Týnec nad Labem, CZ	14:46	Zahradní 395, Žleby, CZ	00:24:48	23,11	0	59km/h	101km/h

Obrázek 24: Jízdní data č.3

Dle poskytnutých dat od společnosti EASY POWER s.r.o. se dá usoudit, že automobil v tento den na služební cestě urazil přibližně 139,7 km. Toto číslo s malou odchylkou odpovídá tomu, co říkají data vytvořená na základě generování nejkratší vzdálenosti aplikací Google Maps. Tento rozdíl může být způsoben například hledáním parkovacího místa anebo nepřesností jednotlivých systémů. Čas strávený na cestě by měl být okolo 2 hodin a 45 minut. Tedy o 15 minut více, než nám nabízí Google Maps. Proměnná času může být velmi ovlivněna dopravní situací nebo rychlostí jízdy.

Tvar grafu jízdy není absolutně optimální. Pouhým pohledem lze tedy jednoznačně předpovědět, že je tato trasa naplánovaná neoptimálně. Obchodní cestující musel několikrát absolvovat jízdu po stejné trase a v grafu se tím pádem vytvořilo i několik průsečíků. Z takto vytvořené trasy lze i těžko soudit, kudy vlastně vedly kroky obchodního cestujícího.



Obrázek 25: Graf jízdy

Lepší představu o jízdě se může představit pod grafickým znázorněním vytvořeným v aplikaci GeoGebra. Tento graf je na první pohled hodně zmatečný a rozhodně neodpovídá ideálům problematiky TSP. Ideální tvar by měl být hladký okruh s co možná nejméně protnutími v okruhu.

4.2.3.2. Řešení

Jak již bylo uvedeno, tato cesta naprosto neodpovídá ideálům minimalizace nákladů. Po vytvoření nové matice vzdáleností mezi jednotlivými body zjistíme, jak by taková cesta vypadala, kdyby byla optimálně naplánována.

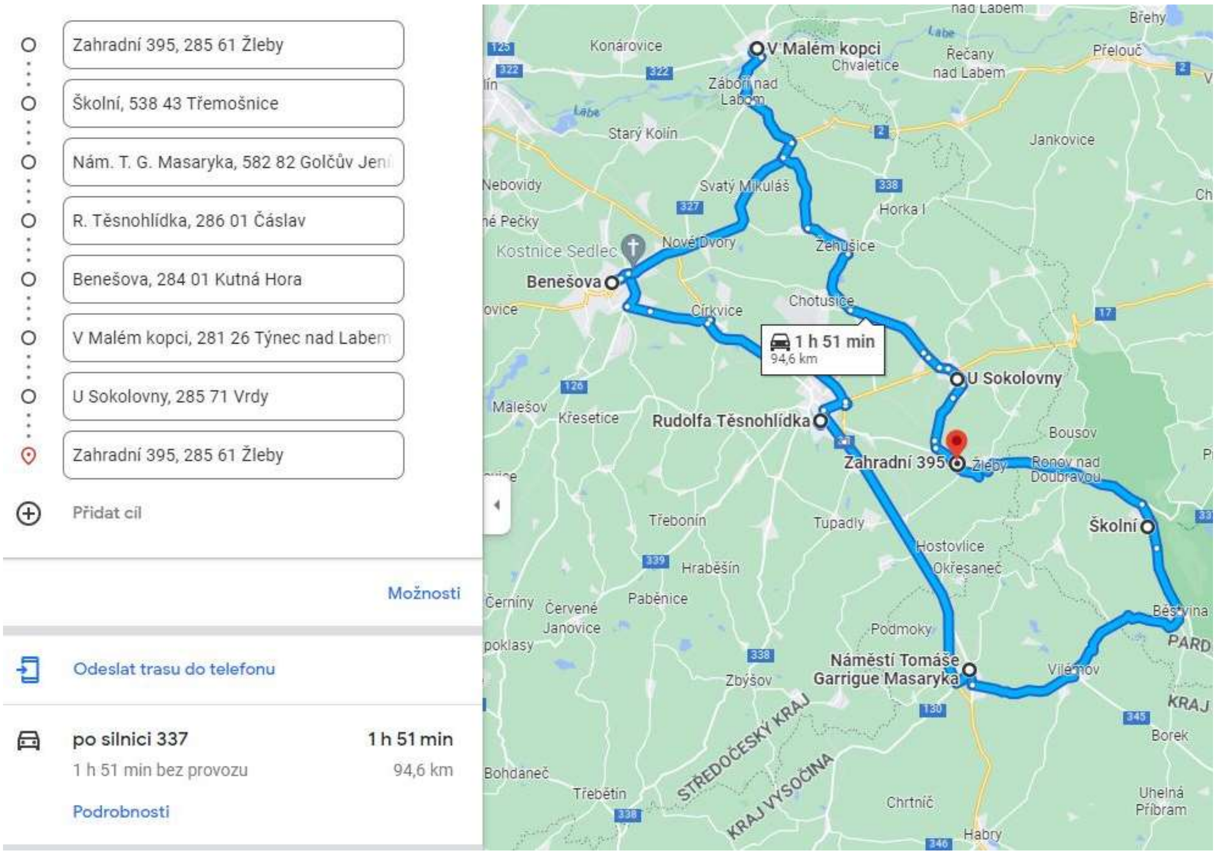
		Zahradní	Benešova	Školní	R. Těsnohl	Nám. T. G.	U Sokolov	V Malém Kopci
		0	1	2	3	4	5	6
Zahradní	0	0	19	10,1	8,2	12,2	4,6	22,9
Benešova	1	19	0	28,9	13,4	26,3	18,2	15,8
Školní	2	10,1	28,9	0	18	15,5	13	32,7
R. Těsnohl	3	8,2	13,4	18	0	13,7	6,6	20,9
Nám. T. G.	4	12,2	26,3	15,5	13,7	0	16,5	32,9
U Sokolov	5	4,6	18,2	13	6,6	16,5	0	20,1
V Malém I	6	22,9	15,8	32,7	20,9	32,9	20,1	0

Z	DO	Vzdálenost
0	2	10,1
2	4	15,5
4	3	13,7
3	1	13,4
1	6	15,8
6	5	20,1
5	0	4,6
	Celkem	93,2

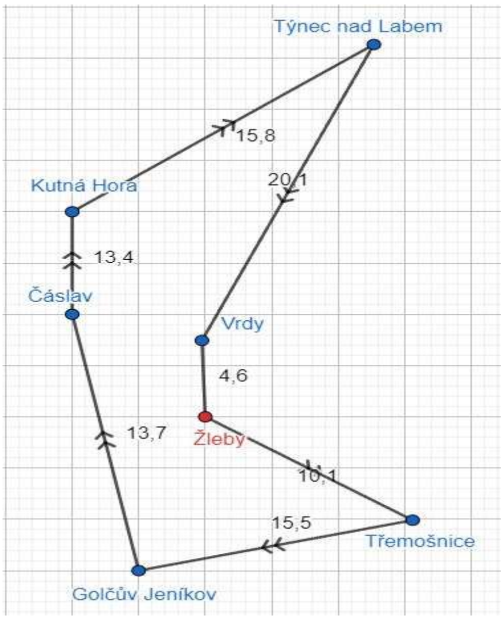
Obrázek 26: Výstup evolučního algoritmu

Po analýze dat lze zjistit, že optimální trasa, vypočítaná evolučním algoritmem, začíná na adrese Školní v Třemošnici. Z Třemošnice poté dále na adresu náměstí T. G. Masaryka v Golčově Jeníkově a R. Těsnohlídka v Čáslavi. Z Čáslavi by obchodní cestující zavítal na adresu sídla společnosti Benešova, Kutná Hora. Lze si všimnout, že sídlo společnosti je znovu navštíveno až mezi posledními. Z Kutné Hory se obchodní cestující odebere na schůzku v Týnci nad Labem a jako poslední navštíví adresu U Sokolovny, Vrdy.

Výsledek celkové ujeté, optimálně naplánované, vzdálenosti se po optimalizaci pohybuje okolo 94 km, konkrétně solver nabízí hodnotu 93,2 km. To je o necelých 50 km méně, než ujel obchodní cestující 16.3.2023. Čas strávený za volantem by se po zadání optimální trasy do Google Maps zkrátil o 41 minut na 1 hodinu a 5 minut oproti 2 hodinám a 32 minutám.



Obrázek 27: Optimalizovaná trasa v Google Maps



Obrázek 28: Optimalizovaný graf v GeoGebře

Grafické znázornění z aplikace GeoGebra nyní vypadá opravdu optimálně. Díky grafické interpretaci řešení lze i jednoduše předejít chybám ve výpočetním zadání. Oproti grafu trasy bez optimalizace zde jde hovořit o opravdové okružní jízdě bez jakýchkoliv dalších zbytečných průsečíků nebo dalších chyb, které by souvislost grafu narušovaly.

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod**:**

$$138 \cdot 6{,}74 = 930{,}12 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$94{,}6 \cdot 6{,}74 = 637{,}60 \text{ Kč}$$

Po početní části tohoto problému lze souhlasit s hypotézou, že pokud by společnost plánovala trasy obchodních schůzek efektivně, ušetřila by v tomto případě 292,52 Kč. Nutno znovu zmínit ušetřených 41 minut, které by mohl obchodní cestující využít jiným způsobem.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$930{,}12 \cdot 4 \cdot 12 = 44\,645{,}76 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

$$637{,}604 \cdot 4 \cdot 12 = 30\,604{,}99 \text{ Kč}$$

Pokud by se znovu počítalo s podobně plánovanou cestou i do budoucna, lze zjistit, že tímto neefektivním plánováním by společnost přišla o 14 040,77 Kč ročně.

4.2.4. Hodnocení

V hodnocení je dobré uvést, že společnost EASY POWER s.r.o. primárně dbá na kvalitní poskytované služby a s tím spojené maximální úsilí o vstřícnost zákazníkům s termíny schůzek. Pokud by se ale společnost rozhodla, že chce ušetřit na jízdních nákladech, rozhodně to není neproveditelné. Z výsledku jednotlivých analýz je zřejmé, že schůze v kanceláři společnosti, které se konají každé pondělí, jsou největším trnem při plánování jízd. Na tyto schůze jsem se také ptal vedení společnosti a dle jejich slov jim jde pouze o osobní kontakt.

Návrh společnosti, který byl také probrán s vedením, je pondělní schůze provádět z prostředí domova za pomocí streamovacích platforem (MS Teams, Skype). Tyto platformy měly velký rozmach v době pandemie Covid-19. Pokud by společnost provedla tuto změnu, mohlo by to vést k celkovému zlepšení spokojenosti zaměstnanců. Pracovní doba zaměstnanců není stanovena a po schůzi v kanceláři se rozjíždí buď do svých domovů, odkud pracují, nebo do terénu. Dle slov vedení tento trend zkusí zavést a s postupem času si vyhodnotí, zda k takovému kroku společnost přejde natrvalo.

Výpočet průměrných nákladů naplánované cesty bez využití optimalizačních metod:

$$(687{,}48 + 1698{,}5 + 930{,}12) / 3 = 1\,105{,}37 \text{ Kč.}$$

Výpočet průměrných nákladů naplánované cesty dle metody problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$(558{,}75 + 1\,497{,}63 + 637{,}60) / 3 = 897{,}99 \text{ Kč}$$

Po vypočtení průměrných nákladů na jednu jízdu dle vzorku dat, které byly vyhodnoceny, lze z dat zjistit, že s implementací optimalizace tras pomocí evolučního algoritmu může společnost na jedné jízdě ušetřit v průměru až 207,38 Kč.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrné ujeté vzdálenosti z vzorku dat, bez optimalizace trasy:

$$(32\,999{,}04 + 81\,528 + 44\,645{,}76) / 3 = 53\,057{,}6 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrné ujeté vzdálenosti z vzorku dat, při optimalizaci trasy za pomocí evolučního algoritmu:

$$(26\,820 + 71\,886{,}24 + 30\,604{,}99) / 3 = 43\,103{,}74 \text{ Kč}$$

Po zhodnocení průměrných ročních jízdních nákladů si nelze nevšimnout, že díky implementaci evolučního algoritmu může společnost ušetřit 9 953,87 Kč. Vzorek jízd sice není velký, ale na základě těchto výsledků lze říct, že pokud společnost primárně dbá na vstřícnost k zákazníkům, mohou se tyto potenciálně ušetřené náklady zanedbat.

Díky analýze nákladů bylo také zjištěno, že ročně společnost na vyplácení amortizace zaplatí přibližně 77,16 % z celkové částky jízdních nákladů. Z částky 53 057,6 Kč by ušetřená částka dosahovala velikosti 40 939,24 Kč. Tato částka by se dala využít na nákup služebního automobilu pro obchodního cestujícího a zajistit si tak reprezentativní vůz pro podnik. Společnost by pravděpodobně ušetřila více, pokud by roční amortizaci vyplácela. Služební vůz ale může poskytnout významný benefit pro zaměstnance podniku.

4.3. OSVČ Ondřej Vondra

Osoba samostatně výdělečně činná Ondřej Vondra pracuje pro společnost TEDOM energie s.r.o. jako obchodní zástupce. Náplní jeho práce je sehnat novou klientelu pro společnost a přivézt tak do podniku další peníze z poskytovaných služeb. Jeho pracovní den spočívá v plánování schůzek s potenciálně novými zákazníky a jejich osobními návštěvami. Pro plánování svých tras využívá primárně aplikace Waze, stejně jako v prvním případě obchodního cestujícího společnosti EASY POWER s.r.o. Náklady na cesty si hradí z vlastních zdrojů.

Za účelem svých podnikatelských činností využívá služebního automobilu Škoda Kamiq G-Tec z roku 2019, poskytnutého společností TEDOM energie s.r.o. Automobil je vybaven motorem s pohonem CNG, tedy na stlačený zemní plyn, s výkonem 66 kW (90 koní). Průměrná spotřeba ve městě je uváděna jako 5,0 - 5,5 kg / 100 km. Spotřeba mimo město je poté 3,3 kg / 100 km. Pan Vondra ale dle jeho slov jezdí s průměrnou spotřebou 6,5 kg / 100 km. Automobil má celkem tři nádrže, přičemž nádrž na CNG má kapacitu 13,8 kg a nabízí dojezd až 410 km. Po vyprázdnění této nádrže automobil automaticky přepne na režim spalování benzínu, který je v nádrži o kapacitě 9 l a nabídne tak prodloužení jízdy až o 180 km.

Cena paliva je v tomto případě stanovena z průměrné ceny 1 kg paliva na 100 km v celé ČR. Dle serveru [12] je tato průměrná cena v březnu stanovena na 38,20 Kč na kg paliva. Amortizace vozidla se v tomto případě neřeší, protože automobil není v soukromém držení. Dle výpočtu se poté může odhadnout, že cena za 1 km ujeté vzdálenosti stojí pana Vondru přibližně 2,48 Kč. Pokud by se porovnala cena jízdy pouze za spotřebované palivo, bez zavedení amortizace, je tato částka přibližně o 1 Kč / km vyšší, než v případě VW Golf z předchozího problému.

Stanovení nákladů na 1 ujetý km s průměrnou spotřebou 6,5 kg / 100 km a průměrnou cenou paliva 38,20 Kč

$$6{,}5 \cdot 38{,}20 = 248{,}3 \text{ Kč} / 100\ km$$

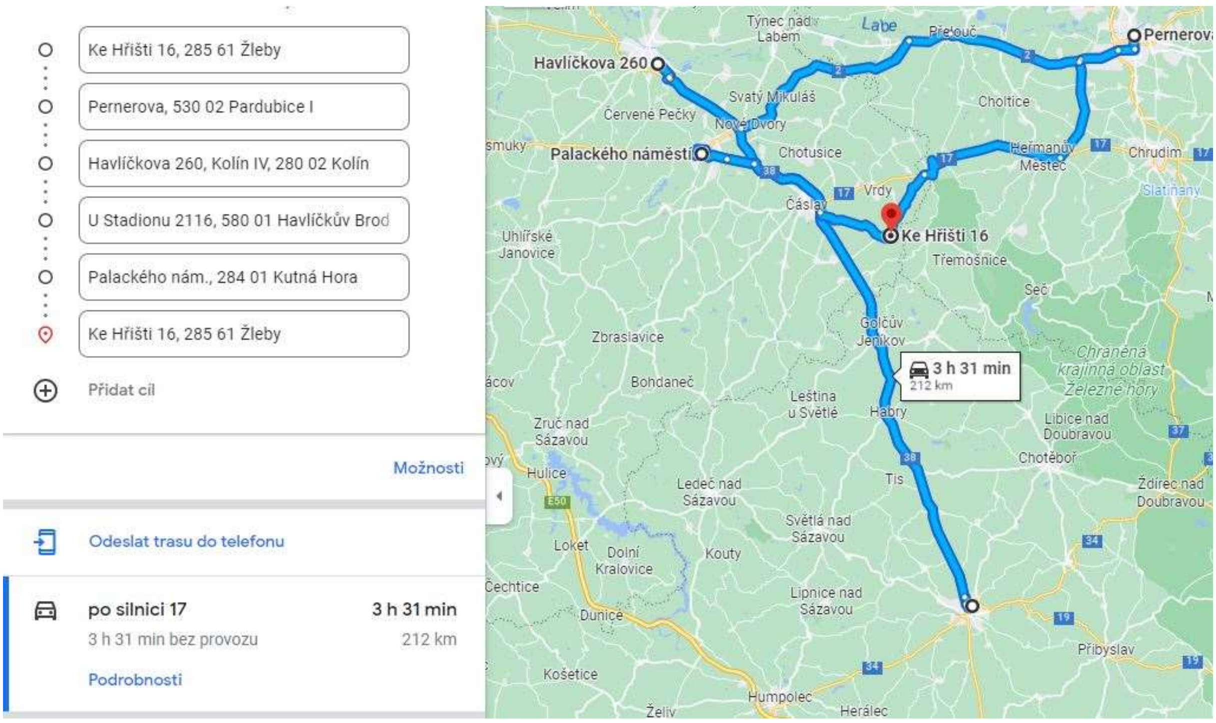
$$248{,}3 / 100 = 2{,}48 \text{ Kč} / 1\ km$$

Podnikatel Ondřej Vondra se snaží dosáhnout co nejvíce, úspěšně uzavřených, kontraktů s novými zákazníky bez ohledu na náklady. Tvrdí, že primární je pro něj přístup k zákazníkovi, který se poté odráží také na úspěšnosti jednání se zákazníky. Nad šetřením nákladů paliva nikdy nepřemýšlel, dle jeho slov si myslí, že optimalizací obchodních tras by ročně nedokázal ušetřit více než 10 000 Kč.

4.3.1. Příklad č.1

4.3.1.1. Představení problému

Na den 13.3.2023 si Ondřej Vondra naplánoval tři schůzky u potenciálních zákazníku. Jako první zastávku má ale v kanceláři podniku na adrese Pernerova, Pardubice v 9:30 hod. První osobní schůzi absolvuje v 11:00 na adrese Havlíčkova 260, Kolín. Odtud pokračoval na schůzku se zástupci penzionu Hurikán v 13:30 na adrese U Stadionu 2116 v Havlíčkově Brodě. Poslední schůzku měl smluvenou v Hotelu Mědínek na adrese Palackého náměstí v Kutné Hoře v 15:30. Nutno dodat, že Ondřej Vondra každý den vyjíždí ze svého místa bydliště, které se nachází na adrese Ke Hřišti 16, Žleby.

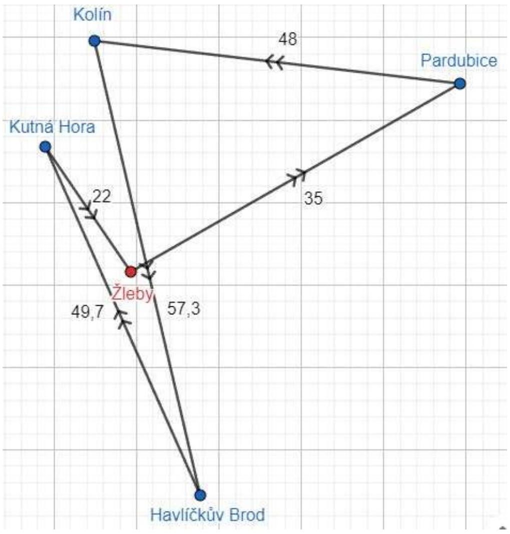


Obrázek 29: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps

Po zadání veškerých vrcholů do webové aplikace Google Maps, lze zjistit, že Ondřej Vondra při této jízdě urazil dohromady přibližně 211 km a celková trasa mu zabrala tři a půl hodiny.

Na první pohled má trasa jisté nedostatky. Nejde si nevšimnout, že schůzky byly naplánované bez jakékoliv snahy najít v trase systém a vytvořit tak okružní jízdu. Vrcholy jsou navštěvovány vždy stejnou cestou tam i zpět a díky tomu se nasčítala ujetá kilometráž.

Vytvořením grafu v aplikaci GeoGebra se tento problém ještě více zviditelní a takový graf je naprostý chaos. U takhle znázorněné situace je velice obtížné určit, jak trasu zvolit ideálně.



Obrázek 30: Graf jízdy

4.3.1.2. Řešení

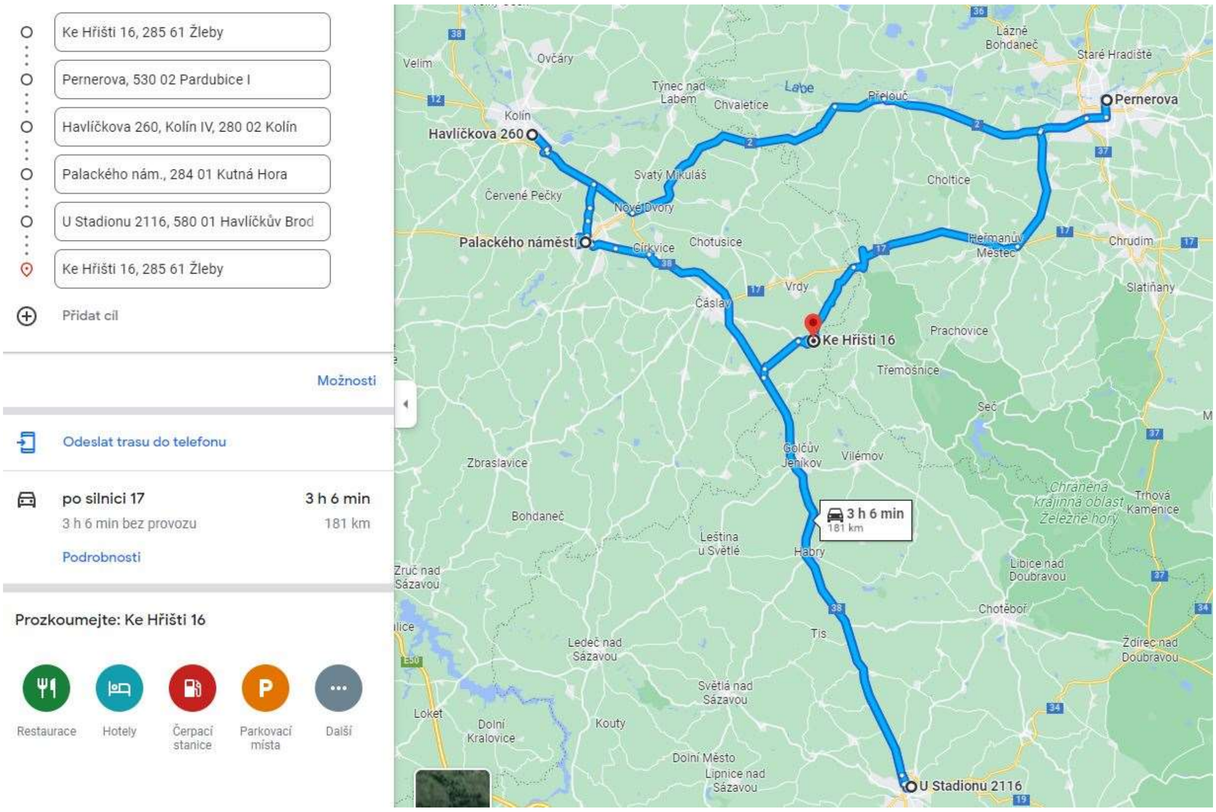
V případě evolučního algoritmu se dá očekávat optimálnější výstup požadovaných datových informací. Pokud se využije algoritmus stejně, jako v příkladě č.1, na výstupu trasu dlouhou 182 km.

		Ke Hřišti, Ž	Pernerova	Havlíčkova	U Stadion	Palackého nám.
		0	1	2	3	4
Ke Hřišti, Ž	0	0	35	27,3	37,7	22
Pernerova	1	35	0	48	66,1	44,4
Havlíčkova	2	27,3	48	0	57,3	11,6
U Stadion	3	37,7	66,1	57,3	0	49,7
Palackého	4	22	44,4	11,6	49,7	0

Z	DO	Vzdálenost
0	3	37,7
3	4	49,7
4	2	11,6
2	1	48
1	0	35
	Celkem	182

Obrázek 31: Výstup evolučního algoritmu

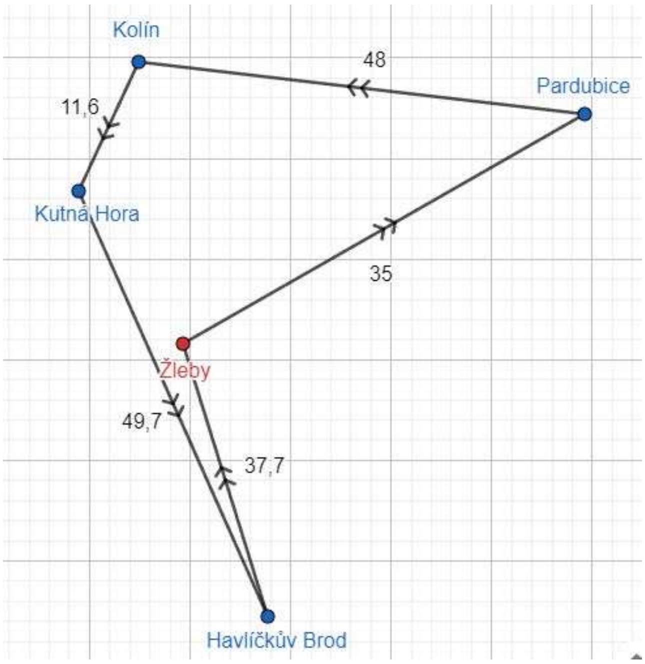
Dle výstupních dat z algoritmu je zřejmé, že první zastávka pana Vondry by v tomto případě měla být na adrese U Stadionu v Havlíčkově Brodě. Pokud by měl ale pan Vondra volit zastávky optimálně, mohl by začít svoji trasu dle algoritmu od konce. První zastávku by tedy měl mít ve své kanceláři, což by v případě tohoto řešení byl ten nejoptimálnější scénář. Prvního zákazníka by pan Vondra navštívil na adrese Havlíčkova, Kolín, odtud by pokračoval na adresu Palackého náměstí v Kutné Hoře. Z Kutné Hory by následovala schůzka v Havlíčkově Brodě, kde by jeho pracovní den skončil a odtud jel zpět na adresu bydliště.



Obrázek 32: Optimalizovaná trasa v Google Maps

Po zadání trasy do Google Maps vychází vzdálenost trasy s přijatelnou odchylkou 1 km. Celková vzdálenost dle aplikace Google Maps by měla být dokonce 181 km.

Na základě dat by se díky řešení v rámci evolučního algoritmu podařilo ušetřit na jízdních nákladech 32 km, což není zanedbatelná vzdálenost, pokud vezmeme v úvahu, že podobné obchodní cesty pan Vondra absolvuje každý den.



Obrázek 33: Optimalizovaný graf v GeoGebře

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$211 \cdot 2{,}48 = 523{,}28 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$182 \cdot 2{,}483 = 451{,}36 \text{ Kč}$$

Z výpočtu je zřejmé, že pokud pan Vondra přizpůsobí své schůzky efektivnímu plánování jízd, může na svých cestách, podobných těmto, ušetřit 71,92 Kč denně. Co se týče spotřeby času, zde lze časovou délku trasy zkrátit o 23 minut.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$523{,}91 \cdot 20 \cdot 12 = 125\,738{,}4 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

$$451{,}91 \cdot 20 \cdot 12 = 108\,458{,}4 \text{ Kč}$$

Po srovnání obou ušetřených částek a počítáním s nimi jako s průměrnou každodenní jízdou, je zjištěno, že by pan Vondra takto dokázal ročně na jízdách ušetřit okolo 17 280 Kč.

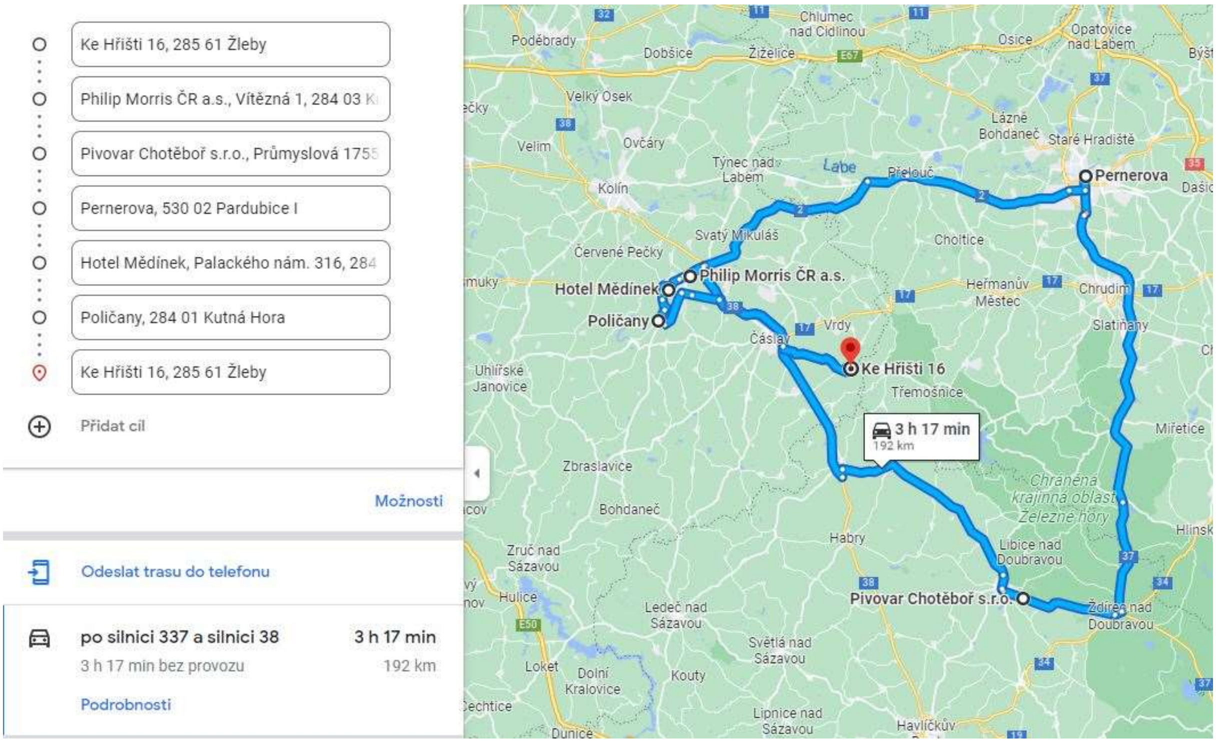
4.3.2. Příklad č.2

4.3.2.1. Představení problému

Dne 22.3.2023 si pan Vondra naplánoval celkem čtyři pracovní schůzky za účelem jednání o podpisu smlouvy o dodávkách energie. Mezi jednotlivými schůzkami se musel kolem dvanácté hodiny dostavit do kanceláře společnosti TEDOM energie s.r.o. na adrese Pernerova, Pardubice.

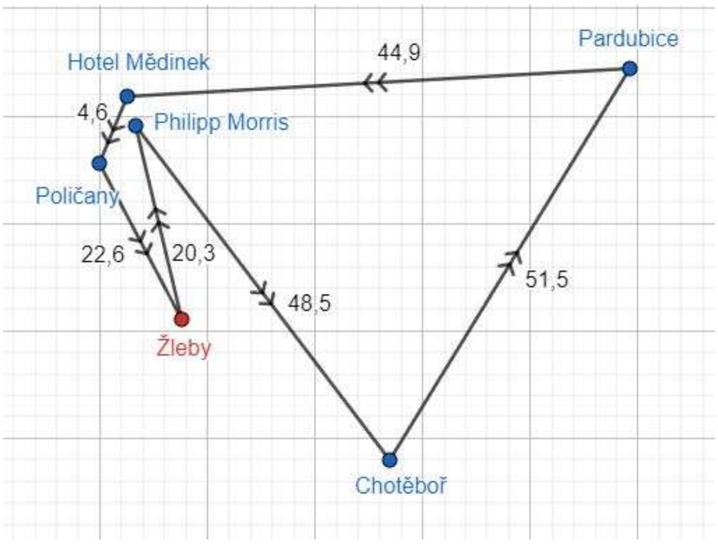
Jako první pan Vondra navštívil podnik Philipp Morris v Kutné Hoře. Další schůzky měl v Pivovaru Chotěboř, Hotel Mědinek a na adrese Poličany 25 v Kutné Hoře. Schůzky probíhaly přesně v tomto pořadí, po návštěvě pivovaru absolvoval již zmíněnou cestu do kanceláře společnosti TEDOM energie s.r.o.

Dle trasy naplánované aplikací Google Maps zabrala tato jízda celkem 192 km. Na cestě strávil pan Vondra 3 hodiny a 17 minut. Na první pohled se zdá, že jízda nebyla naplánována až tak špatně. Graf jízdy vypadá, až na pár výběžků, souvislý a tvoří okruh.



Obrázek 34: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps

Po vytvoření a vyhodnocení grafického znázornění v aplikaci GeoGebra lze konstatovat, že oproti grafickému znázornění Google Maps jde snáze vidět chyby v cestování. Po sestavení takového grafu je možné konstatovat, že takto optimální řešení



Obrázek 35: Graf jízdy

nevypadá. Pokud se podíváme na oblast cest v okolí Kutné Hory, jmenovitě vrcholy Philipp Morris, Hotel Mědinek a obec Poličany, nelze si nevšimnout, že obchodní cestující zde ne zrovna ideálně rozvrhnul časy zastávek a musel díky tomu do Kutné Hory cestovat dvakrát.

4.3.2.2. Řešení

Po vytvoření matice vzdálenosti vrcholů a upřesnění podmínek výpočtu algoritmu si nejde nev, že dle evolučního algoritmu by optimálně naplánovaná trasa měla být dlouhá 153,8 km. Zadáním výstupu algoritmu do aplikace Google Maps docházím k závěru, že by trasa až na menší odchylku měla odpovídat tomuto výsledku. Webová aplikace nám nabízí cestu dlouhou 151 km s délkou jízdy 2 hodiny a 45 minut

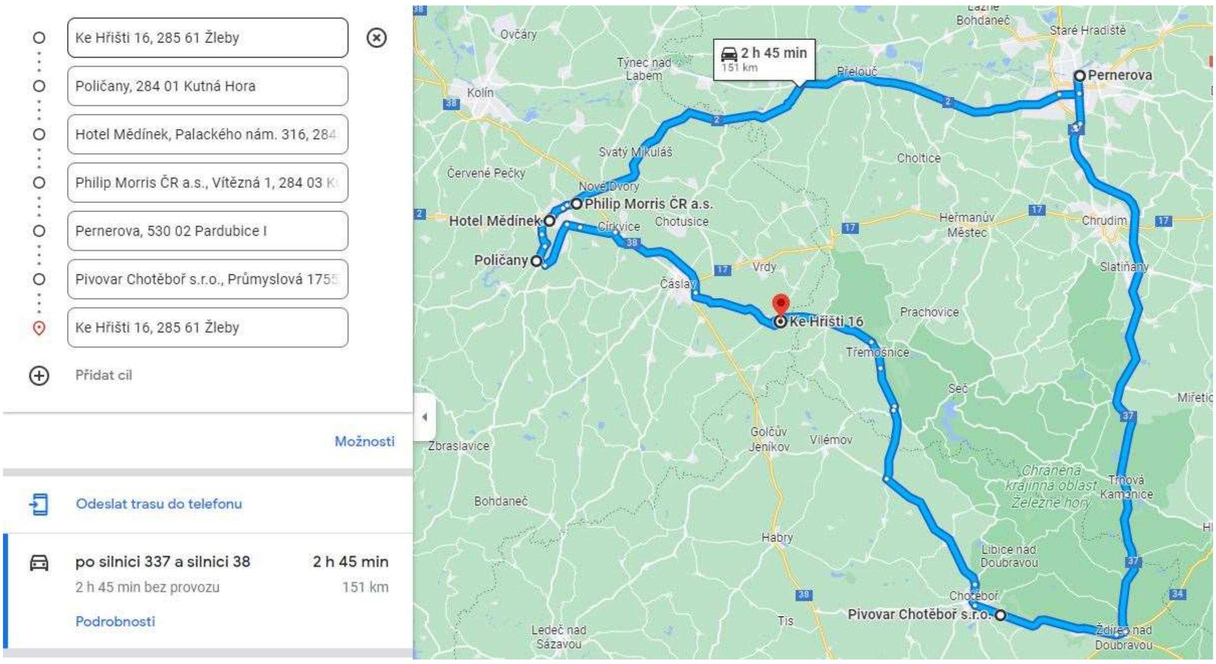
Pokud by měl pan Vondra plánovat své schůzky optimálně, měla by jeho cesta začít schůzkou v Poličanech, odkud by následně objel všechny zastávky v Kutné Hoře, konkrétně Hotel Mědínek a Philipp Morris. Z továrny Philipp Morris v ulici Vítězná by pokračoval do své kanceláře v Pernerově ulici v Pardubicích a odtud na poslední zastávku do Chotěbořského pivovaru.

Na první pohled jsou obě trasy velmi podobné. Největší rozdíl je již zmíněné řešení schůzek v Kutné Hoře a také výběžek do místa bydliště, odkud vyjíždí do Kutné Hory a totožnou trasou se vrací i zpět. Po vytvoření grafu v GeoGebře je znát, jak moc byla původní trasa neoptimální, ač se to na první pohled z grafu Google Maps nemuselo zdát tak jasně.

		Ke Hřišti, Ž	Pernerova	Philipp M(	Chotěboř	Hotel Měc	Poličany
		0	1	2	3	4	5
Ke Hřišti, Ž	0	0	35	20,3	29,8	22,1	22,6
Pernerova	1	35	0	41,1	51,5	44,9	47,1
Philipp M(	2	20,3	41,1	0	48,5	4,2	6,5
Chotěboř	3	29,8	51,5	48,5	0	50,6	51,2
Hotel Měc	4	22,1	44,9	4,2	50,6	0	4,6
Poličany	5	22,6	47,1	6,5	51,2	4,6	0

Z	DO	Vzdálenost
0	5	22,6
5	4	4,6
4	2	4,2
2	1	41,1
1	3	51,5
3	0	29,8
	Celkem	153,8

Obrázek 36: Výstup evolučního algoritmu



Obrázek 37: Optimalizovaná trasa v Google Maps

Řečí čísel by pan Vondra na své optimální trase urazil o 41 km kratší trasu a za volantem by strávil o 32 minut méně. Jelikož pan Vondra takovéto trasy absolvuje každý den, nejsou tato čísla zanedbatelná.

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$192 \cdot 2{,}48 = 476{,}16 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$151 \cdot 2{,}48 = 374{,}48 \text{ Kč}$$

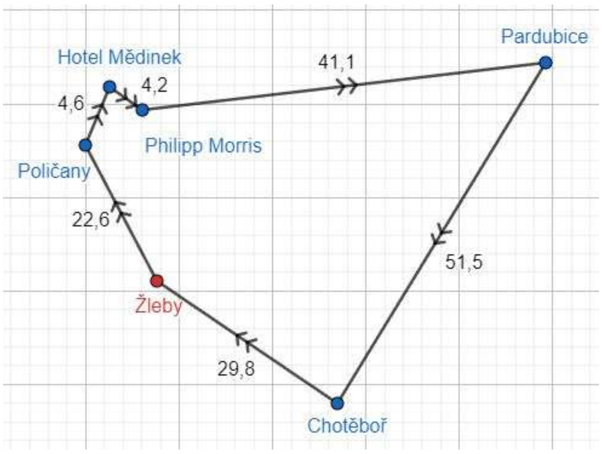
Za jinak nezměněných okolností by pan Vondra na této trase projel dohromady 476,16 Kč. Pokud by si trasu naplánoval například pomocí evolučního algoritmu užívaného v této práci, může na této cestě uspořit 101,68 Kč. Díky této úpravě by pan Vondra dokázal ušetřit také půl hodiny jízdy.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$476{,}74 \cdot 20 \cdot 12 = 114\,417{,}6 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

$$374{,}93 \cdot 20 \cdot 12 = 89\,983{,}2 \text{ Kč}$$



Obrázek 38: Optimalizovaný graf v GeoGebře

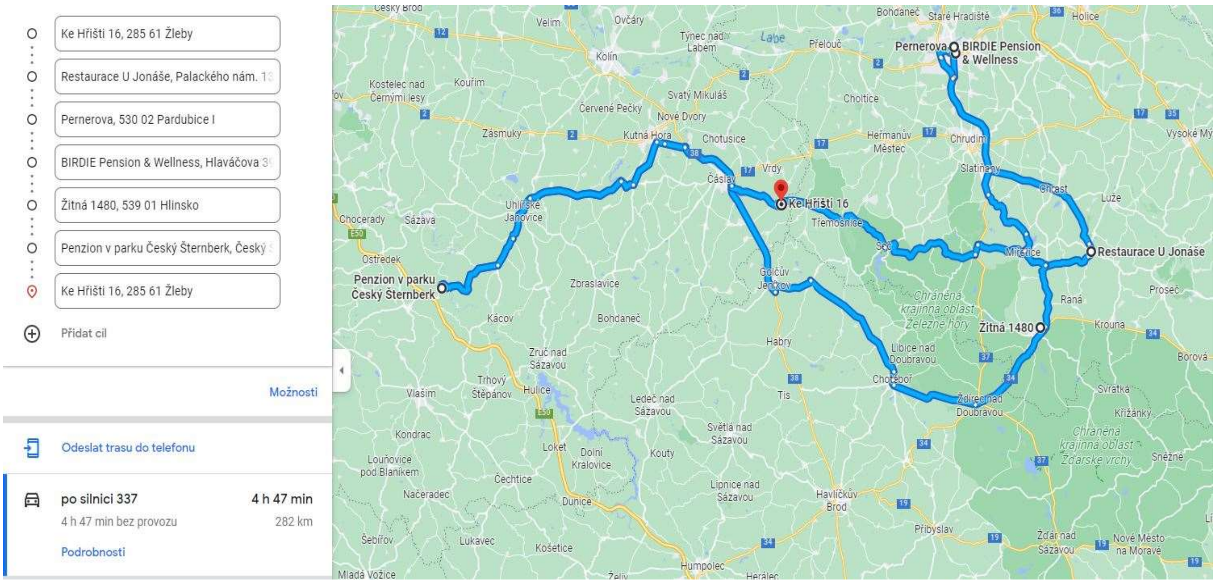
V rámci odhadu by pan Vondra ročně mohl na jízdních nákladech ušetřit sumu okolo 24 434,4 Kč. Nemluvě o času stráveným za volantem. Pokud by se mu každý den pomocí optimalizace podařilo zkrátit jeho jízdu alespoň o půl hodiny, mohl by ročně strávit za volantem o 120 hodin neboli o 5 celých dní méně.

4.3.3. Příklad č.3

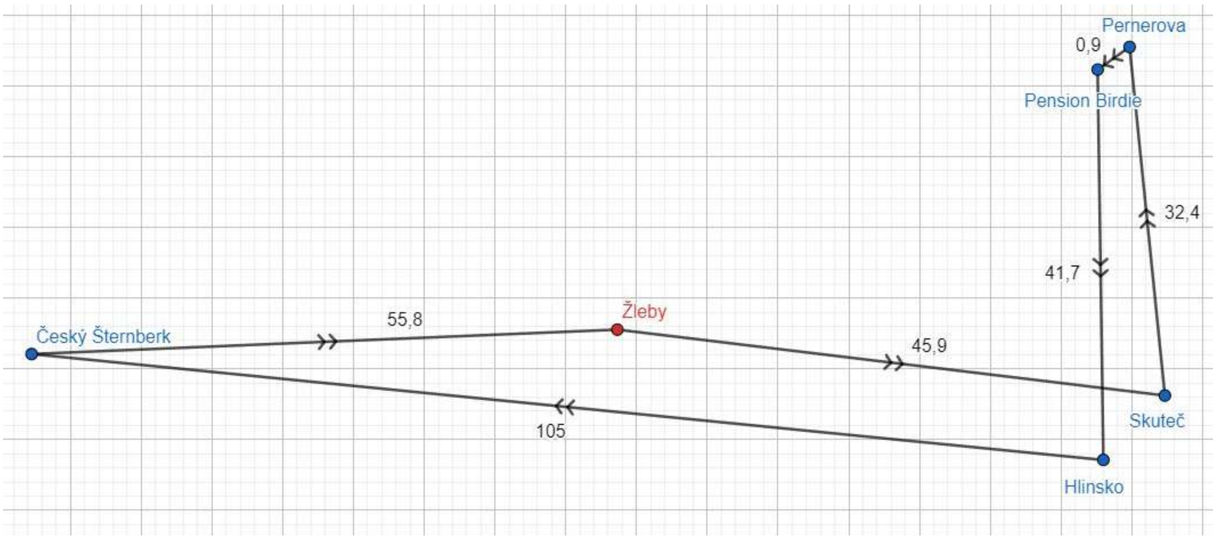
4.3.3.1. Představení problému

Dne 5.4.2023 si pan Vondra naplánoval celkem čtyři schůzky. První jeho schůzka se uskuteční na adrese Restaurace U Jonáše, Skuteč, odkud zamíří do kanceláře společnosti TEDOM energie s.r.o. Jeho následující kroky povedou na schůzku do penzionu BIRDIE v Pardubicích, poté na adresu Žitná 1480, Hlinsko, a nakonec do penzion V Parku v Českém Šternberku.

Podle aplikace Google Maps pan Vondra na této cestě strávil dohromady 4 hodiny a 47 minut a trasa byla dlouhá 282 km. Již zprvu se zdálo, že takto naplánovaná cesta by nemusela být tím ideálním řešením. Po analýze příkladu na základě grafického znázornění je jisté, že za pomocí algoritmu se pro tuto cestu nalezne optimálnější trasa. Graf obsahuje několik spletenců mezi vrcholy, které jsou pro potřeby zkrácení trasy vyhladit a utvořit celistvý okruh.



Obrázek 39: Neoptimalizovaná trasa v Google Maps



Obrázek 40: Graf jízdy

Po transformaci této mapy skrze aplikaci GeoGebra je patrné, že cesta do Českého Šternberku by v pořadí nemusela hrát žádnou roli. Naopak největší nájezd navíc by měl vzniknout v oblasti mezi Hlinskem a Skutčí.

4.3.3.1. Řešení

Řešením tohoto příkladu by dle algoritmu měla být trasa dlouhá 230 km, to je o 52 km méně. Zprvu nebylo zřejmé, že by se na této trase podařil ušetřit vyšší počet kilometrů.

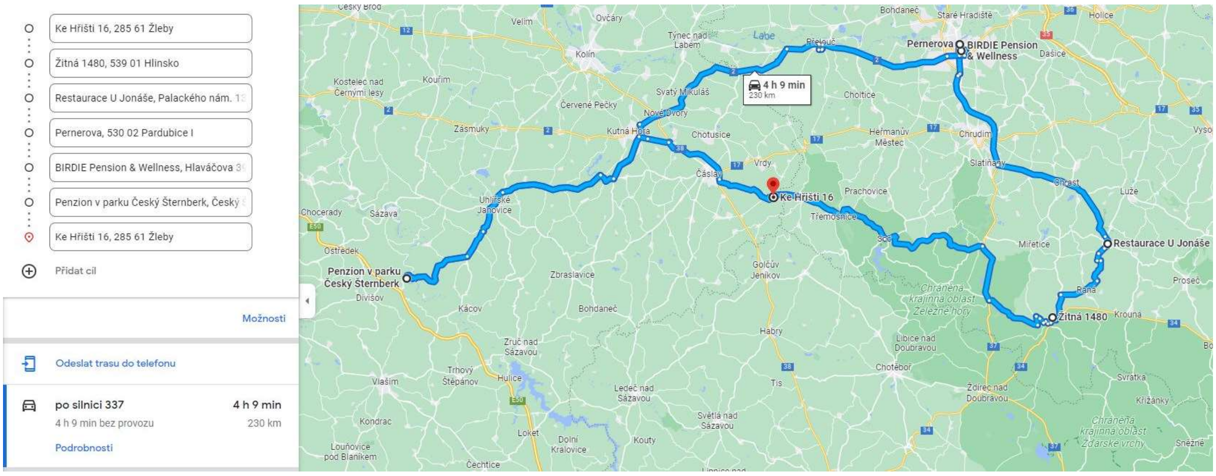
Tato trasa by měla začít schůzkou na adrese Žitná 1480, Hlinsko. Z Hlinska by se pan Vondra přesunul do Skutče, odkud by jel na adresu své kanceláře. Z kanceláře by pokračoval na schůzi v BIRDIE Pensionu v Pardubicích, dále do Českého Šternberku a poté na místo bydliště.

Po srovnání obou tras lze s jistotou tvrdit, že se pro pana Vondru podařilo nalézt optimálnější trasu z optického hlediska. Toto hledisko potvrzuje také skutečnost ušetřené vzdálenosti, kterou pan Vondra najel navíc. Díky optimálnímu plánování by pan Vondra dokázala za volantem ušetřit okolo 40 minut a tento čas využít například na obědovou pauzu.

		Ke Hřišti, 2	Skuteč	Pernerova	Pension B	Hlinsko	Český Šternberk
		0	1	2	3	4	5
Ke Hřišti, 2	0	0	45,9	35	33,9	45,5	55,8
Skuteč	1	45,9	0	32,4	34,2	13,8	102
Pernerova	2	35	32,4	0	0,9	39,8	81,4
Pension B	3	33,9	34,2	0,9	0	41,7	81,7
Hlinsko	4	45,5	13,8	39,8	41,7	0	105
Český Šter	5	55,8	102	81,4	81,7	105	0

Z	DO	Vzdálenost
0	4	45,5
4	1	13,8
1	2	32,4
2	3	0,9
3	5	81,7
5	0	55,8
	Celkem	230,1

Obrázek 41: Výstup evolučního algoritmu



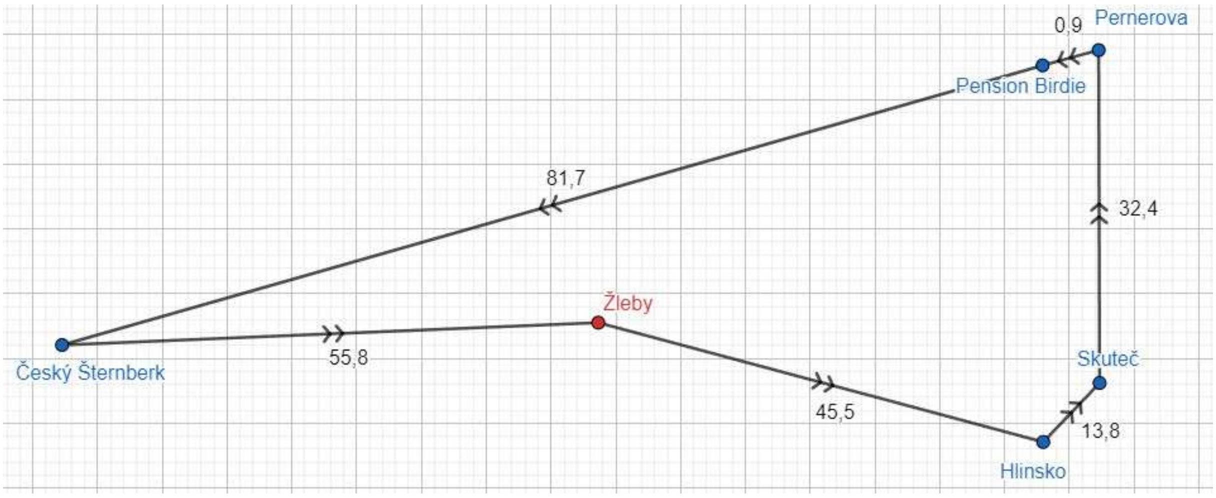
Obrázek 42: Optimalizovaná trasa v Google Maps

Výpočet trasy naplánované bez využití optimalizačních metod:

$$282 \cdot 2{,}48 = 699{,}36 \text{ Kč}$$

Výpočet trasy naplánované dle problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$230 \cdot 2{,}48 = 570{,}4 \text{ Kč}$$



Obrázek 43: Optimalizovaný graf v GeoGebře

Po číselném vyjádření úspory lze zjistit, že pana Vondru cesta stála přibližně 700 Kč. Pokud by byla trasa optimalizována, mohl by na této trase ušetřit částku okolo 130 Kč.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, bez optimalizace trasy:

$$700{,}21 \cdot 20 \cdot 12 = 168\,050{,}4 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrně stejné ujeté vzdálenosti, při optimalizaci tras za pomocí evolučního algoritmu:

$$571{,}09 \cdot 20 \cdot 12 = 137\,061{,}6 \text{ Kč}$$

Pokud by trasa byla použita jako vzorová a její náklady se vyjádřily v rámci jednoho roku, lze dojít k nadcházejícím závěrům. Z dat vyplývá, že varianta použití evolučního algoritmu je výhodnější než plánování tras na základě odhadu. Dá se také potvrdit, že použití evolučního algoritmu může pomoci najít nejoptimálnější trasu a tím snížit náklady na pohonné hmoty a zkrátit dobu cesty. V tomto případě by se ročně uspořená částka mohla pohybovat až okolo 30 987,84 Kč.

4.3.4. Hodnocení

Po analýza tří vzorků jízd pana Vondry se dá na první pohled spatřit, že jeho pracovní cesty nejsou plánovány optimálně a ročně tímto způsobem přichází o své finanční prostředky. Oproti prvnímu případu, kdy obchodní cestující ve společnosti EASY POWER s.r.o. využíval svůj vůz podstatně méně, dokáže každé plánování trasy ušetřit spoustu peněz a času. Navíc si nejde nevšimnout i širšího pokrytí obchodních cest, kdy obchodní cestující společnosti EASY

POWER s.r.o. své cesty realizoval převážně na území Středočeského kraje. Pan Vondra často zavítá i do krajů sousedních a denně dokáže urazit větší vzdálenost.

V čem má výhodu pan Vondra od společnosti EASY POWER s.r.o. je fakt, že jeho cesta do kanceláře může být realizována v jakékoliv fázi dne. Zatímco obchodní cestující společnosti EASY POWER s.r.o. zde musel po většinu času začínat, pan Vondra si toto může naplánovat dle vlastních potřeb. Jako nevýhodu je třeba uvést vzdálenost kanceláře od místa bydliště. Ta je téměř o polovinu dále než kancelář společnosti EASY POWER s.r.o.

Doporučení pro pana Vondru je nalézt systém plánování, který mu usnadní pracovní den a zároveň ušetří jeho finance. Po analýze všech příkladů, i když se jedná pouze o pár vzorků, si lze všimnout dlouhé doby strávené na cestě. Tento čas by se dal zkrátit, pokud by schůzky byly plánovány v optimálním pořadí. Jak již bylo avizováno na začátku tohoto problému, pan Vondra se snaží vyhovovat potenciálním zákazníkům s časy schůzek. Pokud by se ale pokusil převzít otěže tohoto plánování a sám navrhoval termín schůzky tak, jak se to hodí jemu, věřím, že by dokázal ušetřit alespoň 50 % aktuálních jízdních nákladů.

Výpočet průměrných nákladů naplánované cesty bez využití optimalizačních metod:

$$(523{,}28 + 476{,}16 + 699{,}36) / 3 = 566{,}27 \text{ Kč.}$$

Výpočet průměrných nákladů naplánované cesty dle metody problému obchodního cestujícího za pomocí evolučního algoritmu:

$$(451{,}36 + 374{,}48 + 570{,}4) / 3 = 465{,}41 \text{ Kč}$$

Po výpočtu průměrných nákladů na jednu jízdu dle vzorku dat, které byly vyhodnocovány je patrné, že s implementací optimalizace tras pomocí evolučního algoritmu může pan Vondra na jedné jízdě ušetřit v průměru až 100,86 Kč.

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrné ujeté vzdálenosti z vzorku dat, bez optimalizace trasy:

$$(125\,738{,}4 + 114\,417{,}6 + 168\,050{,}4) / 3 = 136\,068{,}8 \text{ Kč}$$

Náklady na roční cestování, při každodenní průměrné ujeté vzdálenosti z vzorku dat, při optimalizaci trasy za pomocí evolučního algoritmu:

$$(108\,458{,}4 + 89\,983{,}2 + 137\,061{,}6) / 3 = 111\,834{,}4 \text{ Kč}$$

Po zhodnocení průměrných ročních jízdních nákladů je zřejmé, že díky implementaci evolučního algoritmu může pan Vondra ušetřit až 24 234,4 Kč. Vzorek jízd sice není veliký, ale dle výsledků lze tvrdit, že i přesto, že pan Vondra dbá na maximální vstřícnost zákazníkům při plánování schůzek, měl by se pokusit své cesty lépe plánovat a s tím i změnit systém plánování obchodních schůzí.

4.4. Porovnání

Oba subjekty byly vybrány tak, aby v závěru šlo vyhodnotit, zda si při svých obchodních cestách vedou podobně. Dá se tvrdit, že u obou případů zatím nevyužívají žádný systém optimalizace tras, a tak vznikla možnost potenciálního šetření nákladů. Pokud se srovnají výše ušetřených částek, je jasné, že by se pan Vondra problematice optimalizace tras měl věnovat více než společnost prvně zmiňovaná. EASY POWER s.r.o. za pomocí optimalizace tras dokáže v uvozovkách ušetřit pouze 9 953,856 Kč. Pokud se tato částka rozloží do měsíců, neznamená to pro společnost výdaje ani 1 000 Kč měsíčně. V potaz se dá vzít také četnost jízd, kdy společnost dokáže na každé jízdě ušetřit 195,24 Kč, zatímco u pana Vondry jde o částku 100,85 Kč. Zde je třeba zmínit, že v cestovních nákladech společnosti EASY POWER s.r.o. je započítána také amortizace. Pokud by společnost EASY POWER s.r.o. pořídila služební automobil, dokázala by na amortizaci ušetřit až 77,16 % z celkové částky.

Společnost EASY POWER s.r.o. díky své ziskovosti a zároveň nízké, potenciálně uspořené částce, může faktor optimalizace tras teoreticky vypustit. Vylepšení by mohlo v rámci úspor přijít ve zmíněných poradách Jedno z řešení těchto problémů by mohlo být využívání streamovacích médií (Skype, MS TEAMS a další).

Pan Vondra má výhodu v tom, že jednání v prostorách kanceláře nejsou častá a dějí se většinou kvartálně. Cestu si proto do své kanceláře plánuje dle svých potřeb. Narozdíl od společnosti EASY POWER s.r.o. ale operuje v mnohem širším okolí a najede tak mnohem větší vzdálenosti. Jak již bylo zmíněno, ušetřená částka 30 987,84 Kč pro pana Vondru rozhodně není zanedbatelná a pokud bude na svých obchodních cestách podobně aktivní, jako dosud, měl by se tímto problémem začít co nejdříve zabývat.

Další výhodou optimalizace tras je šetření času. Jelikož je pracovní režim pana Vondry z velké části založen na cestování, mohl by optimalizací zkrátit dobu za volantem až o jednotky celých dní ročně. Tuto možnost může využít také společnost EASY POWER s.r.o., ale myslím si, že na základě nízkého počtu cestovních dní se společnosti optimalizace nevyplatí.

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývala teorií grafů, problémem obchodního cestujícího a algoritmy, kterými je možné tuto problematiku řešit. Byly uvedeny základní pojmy z oblasti teorie grafů, představena podstata problému obchodního cestujícího, okruhy jeho využití a historický vývoj této problematiky. V teoretické části týkající se algoritmů byly představeny základní principy fungování nejrozšířenějších algoritmů a jejich využití. Tyto teoretické znalosti byly důležité pro pochopení samotné problematiky a následnému využití při analýze obchodních cest ve vybraných podnicích.

V praktické části byla představena společnost EASY POWER s.r.o. a podnikatel pan Vondra. To bylo důležité pro stanovení potřeb při plánování tras a analýze cestovních nákladů. Pro splnění potřeb optimalizace tras byl využit evoluční algoritmus, sestavený v programu MS Excel. Návod na jeho další použití je uveden na začátku praktické části bakalářské práce, Jako další nástroje pro analýzu tras posloužily aplikace Google Maps a aplikace GeoGebra, ve kterých byly sestaveny veškeré jízdní trasy a grafy.

Cílem bakalářské práce bylo vyložení stěžejních pojmů teorie grafů a představení jádra problému spolu s možnými přístupy k jeho řešení. Tyto body jsou obsaženy v teoretické části práce, kde byly veškeré cíle splněny. Cílem praktické části bylo předložení analýzy konkrétního podniku a popis efektivního algoritmu řešící daný problém. Praktická část veškeré tyto podmínky pro naplnění cíle splňuje.

Analýzou vybraných společností jsem došel k závěru, že podniky své obchodní trasy neplánují efektivně a ročně tím tratí nemalé množství peněžních prostředků. Subjektům byly předneseny návrhy doporučení, na základě kterých by se tato částka mohla snížit.

Sám jsem po napsání této práce byl překvapený, jak široce může být problém obchodního cestujícího užitečný. Před psaním této práce jsem o této problematice nikdy neslyšel a měl jsem z ní velký respekt. Nakonec si myslím, že jsem se s tímto zadáním popasoval velice dobře a pomohl alespoň dvou podnikům s ušetřením svých financí vynaložených na obchodní cesty.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Historie matematiky: sborník pro vyučující na středních školách. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-046-2.
2. SEDLÁČEK, Jiří. Úvod do teorie grafů. Vyd. 3. Praha: Academia, 1981. Cesta k vědění, č. 29.
3. VOLEK, Josef a Bohdan LINDA. Teorie grafů - aplikace v dopravě a veřejné správě. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012. ISBN 978-80-7395-225-9.
4. DEMEL, Jiří. Grafy a jejich aplikace. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
5. FIALA, Petr. Projektové řízení: modely, metody, analýzy. Praha: Professional Publishing, 2004. ISBN 80-86419-24-X.
6. COOK, William. Po stopách obchodního cestujícího: matematika na hranicích možností. Praha: Argo, 2012. ISBN 978-80-7363-412-4.
7. Solving The Traveling Salesman Problem For Deliveries [online]. 1.1.2020 [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://blog.routific.com/blog/travelling-salesman-problem
8. *Last mile delivery trendy 2022* [online]. 23.03.2022 [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://www.idodo.cz/content-hub/last-mile-delivery-trendy-2022/
9. PELIKÁN, Jan. Diskrétní modely v operačním výzkumu. Praha: Professional Publishing, 2001. ISBN 80-86419-17-7
10. HYNEK, Josef. Genetické algoritmy a genetické programování. Praha: Grada, 2008. Průvodce. ISBN 978-80-247-2695-3.
11. *TOPPOJISTENI.cz* [online]. 14.03.2023 [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://www.top-pojisteni.cz/pojistovaci-poradna/novinky-ze-sveta-pojisteni/ceny-pohonnych-hmot-v-eu-2021
12. *CNG.cz* [online]. [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://www.cng.cz/ceny/vyvoj-cen-phm
13. *GeoGebra* [online]. [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/calculator
14. Fábry, J.: Okružní a rozvozní úlohy. Habilitační práce. VŠE-FIS, Praha, 2014
15. ŠUBRT, Tomáš. Ekonomicko matematické metody II: aplikace a cvičení. Praha: ČZU PEF Praha ve vydavatelství Credit, 2005. ISBN 80-213-0721-8.
16. DYNTAR, Jakub, KADEŘÁBKOVÁ, Božena, ed. Návrh a optimalizace dodavatelských systémů s využitím dynamické simulace. Praha: FinEco, 2018. ISBN 978-80-86590-15-8.

17. JABLONSKÝ, Josef. Operační výzkum: Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3 vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
18. Google Maps [online]. [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: https://www.google.com/maps
19. YANG, Xin-She. Nature-Inspired Optimization Algorithms. London: Elsevier, 2014. ISBN 978-0-12-416743-8
20. NEŠETŘIL, Jaroslav. Teorie grafů. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1979.