

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Stochastické modelování úmrtnosti s aplikacemi
v oblasti řízení rizik

Ondřej Smolík

Diplomová práce

2022

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Ondřej Smolík**
Osobní číslo: **E20699**
Studijní program: **N0413A050009 Ekonomika a management**
Specializace: **Management finančních institucí**
Téma práce: **Stochastické modelování úmrtnosti s aplikacemi v oblasti řízení rizik**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Cílem diplomové práce je popsat vybrané přístupy k stochastickému modelování a predikci úmrtnosti a aplikovat je na reálná data s ukázkou jejich využití v oblasti řízení rizik spojených s úmrtností.

Osnova:

- Modelování úmrtnosti a jeho význam.
- Popis vybraných stochastických modelů úmrtnosti.
- Aplikace vybraných modelů úmrtnosti na reálná data.
- Predikce úmrtnosti pro zvolené populace.
- Ukázka využití modelů úmrtnosti ve vybraných oblastech řízení rizik.

Rozsah pracovní zprávy: **50**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- CIPRA, Tomáš. Pojistná matematika. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. ISBN 80-86929-11-6.
- CAIRNS, Andrew J. G., David BLAKE a Kevin DOWD. Journal of Risk and Insurance: A TWO-FACTOR MODEL FOR STOCHASTIC MORTALITY WITH PARAMETER UNCERTAINTY: THEORY AND CALIBRATION [online]. 2006 [cit. 2021-6-15].
Dostupné z: <http://www.macs.hw.ac.uk/andrewc/papers/jri2006e.pdf>
- COUGHLAN, Guy, David EPSTEIN, Alen ONG, Amit SINHA, Javier HEVIA-PORTOCARRERO, Emily GINGRICH, Marwa KHALAF-ALLAH a Praveen JOSEPH.
Life Metrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks [online]. JPMorgan, 2007 [cit. 2021-6-15].
Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/340738356_LifeMetrics_A_toolkit_for_measuring_and_managing_longevity_and_mortality_risks
- DOWD, Kevin, Andrew J. G. CAIRNS, David BLAKE, Guy D. COUGHLAN, David EPSTEIN a Marwa KHALAF-ALLAH. North American Actuarial Journal: BACKTESTING STOCHASTIC MORTALITY MODELS: AN EX POST EVALUATION OF MULTIPERIOD-AHEAD DENSITY FORECASTS [online]. 2010 [cit. 2021-6-15].
Dostupné z: http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/769998e0a65ea348c1257052003eb94f/e6158fd2566f5ddcc125780600434cbc/FILE/LM_backtesting_models_dec2010.pdf
- MACDONALD, Angus S., Stephen J. RICHARDS a Iain D. CURRIE. Modeling mortality with actuarial applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. International series on actuarial science. ISBN 978-1-107-04541-5.
- LEE, Ronald D. a Lawrence R. CARTER. Journal of the American Statistical Association: Modeling and Forecasting U.S. Mortality [online]. 1992 [cit. 2021-6-15]. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/2290201>

Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2021**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2022**

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

doc. Ing. Jan Černošský, Ph.D. v.r.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2021

Prohlašuji:

Práci s názvem Stochastické modelování úmrtnosti s aplikacemi v oblasti řízení rizik jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30. 4. 2022

Ondřej Smolík v. r.

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval své vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Věře Pacákové, Ph.D. za její ochotu, trpělivost a cenné rady v průběhu psaní práce. Dále chci poděkovat svému konzultantovi z pojistné praxe RNDr. Radku Hendrychovi, Ph.D. za poskytnutí námětu, cenných informací, konzultací a materiálů, které se značně promítly do finální podoby práce. V neposlední řadě chci poděkovat celé své rodině, která mne podporovala po dobu studia.

ANOTACE

Tato práce se zabývá stochastickým modelováním úmrtnosti zasazeným do kontextu pojišťovny. V úvodních částech je popsána problematika a význam modelování úmrtnosti. Následně jsou na vhodných datech z České republiky kalibrovány dva stochastické modely. Pomocí těchto modelů jsou vyjádřeny prognózy budoucích měr úmrtností. Tyto prognózy jsou aplikovány na fiktivní portfólio klientů.

Na závěr je ukázána možná aplikace výsledků v oblasti řízení rizik v pojišťovně, a to zejména pomocí kalkulace solventnostního kapitálového požadavku v souladu se směrnicí Solventnost II. Solventnostní kapitálový požadavek byl vyjádřen pomocí standardní formule i interního modelu.

KLÍČOVÁ SLOVA

úmrtnost, modelování úmrtnosti, stochastické modelování, Solventnost II, řízení rizik, pojišťovnictví

TITLE

Stochastic Mortality Modeling with applications at the field of Risk Management

ANNOTATION

This work explains the problematics of mortality modelling in the context of insurance. In its first part, the importance of mortality modelling was described. Then the calibration of two chosen stochastic models was conducted based on data from the Czech Republic. With the help of these models the prognosis of future mortality was calculated. These prognoses were applied on fictitious portfolio of annuitants managed by an fictitious insurance company.

Consequently, there is a possible application of the results shown in the field of an insurance company's risk management. A solvency capital requirement has been calculated with the use of both a standard formula and an internal model.

KEYWORDS

mortality, mortality modelling, stochastic modelling, Solventnost II, risk management, insurance

OBSAH

Seznam obrázků	10
Seznam tabulek	12
Seznam zkratk	14
Úvod	15
1 Modelování úmrtnosti a jeho význam	16
1.1 Matematický model úmrtnosti	17
1.2 Úmrtnostní tabulka	19
1.3 Intenzita úmrtnosti	21
1.4 Aproximace intenzity úmrtnosti	22
1.5 Vývoj budoucí délky života	23
2 Řízení rizik životních pojišťoven	25
2.1 Rizika v souvislosti s portfoliem klientů	25
2.2 Řízení rizik podle Solventnosti II	27
3 Data a postup jejich zpracování	31
3.1 Zdroje použitých dat	34
4 Aplikace Lee-Carterova modelu	38
4.1 Odhad parametrů modelu	39
4.2 Extrapolace časové složky	44
4.3 Simulace časových složek	48
4.4 Odhad intenzit úmrtnosti	51
4.5 Vytvoření úmrtnostních tabulek	52
4.6 Vyhodnocení modelu	60
4.7 Posouzení kvality LC modelu	65
5 Aplikace Cairns-Blake-Dowdova modelu	68
5.1 Odhad parametrů modelu	69

5.2	Extrapolace časové složky	73
5.3	Simulace časových složek	76
5.4	Odhad intenzit úmrtnosti	82
5.5	Vytvoření úmrtnostních tabulek	83
5.6	Vyhodnocení modelu	87
5.7	Posouzení kvality CBD modelu	90
6	Využití výsledků modelů	93
6.1	Stanovení $SCR_{longevity}$	97
	Závěr	99
	Použitá literatura	101
	Seznam příloh	104
	Příloha A - Tvorba listu QXT	105
	Příloha B - Tvorba listu LXT	106
	Příloha C - Tvorba INC listu	107
	Příloha D - tvorba D.INC listu	108

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Očekávaná délka budoucího života, ČR	24
3.1	Rozdělení stáří osob v portfoliu	36
3.2	Rozdělení důchodů osob v portfoliu	36
4.1	Mužská intenzita úmrtnosti, Česká republika	39
4.2	Odhad parametru α_x - muži	41
4.3	Odhad parametru β_x - muži	42
4.4	Odhad parametru κ_y - muži	42
4.5	Pozorované hodnoty vs LC model	43
4.6	Extrapolace parametru κ_y - muži	47
4.7	Simulace vývoje parametru κ_y - muži	50
4.8	Simulace vývoje parametru κ_y - ženy	50
4.9	Kvantily individuální posloupnosti q_{x,y_i} náhodného klienta	62
4.10	Kvantily individuální posloupnosti l_{x,y_i} náhodného klienta	62
4.11	Střední hodnoty posloupností inc_{x,y_i} & $d.inc_{x,y_i}$ náhodného klienta	63
4.12	Analýza reziduí pro mužská data 1	65
4.13	Analýza reziduí pro mužská data 2	66
4.14	Analýza reziduí pro ženská data 1	66
4.15	Analýza reziduí pro ženská data 2	67
5.1	Ženská intenzita úmrtnosti, Česká republika	69
5.2	Odhad parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži	71
5.3	Odhad parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži	71
5.4	Pozorované hodnoty vs CBD model	72
5.5	Extrapolace parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži	75
5.6	Extrapolace parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži	76
5.7	Simulace parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži	79
5.8	Simulace parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži	79
5.9	Simulované kvantily parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži	81
5.10	Simulované kvantily parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži	81
5.11	Analýza reziduí pro mužská data 1	90
5.12	Analýza reziduí pro mužská data 2	91

5.13	Analýza reziduí pro ženská data 1	91
5.14	Analýza reziduí pro ženská data 2	92
6.1	Porovnání individuálních vektorů \mathbf{q}_{x,y_i}	94
6.2	Porovnání individuálních vektorů \mathbf{l}_{x,y_i}	94
6.3	Vymírání portfólia, LC model	96

SEZNAM TABULEK

1.1	Ukázka mužské úmrtnostní tabulky - ČSÚ	20
3.1	Legenda k přiloženým skriptům	32
3.2	Legenda k proměnným ve skriptech	33
3.3	Počty úmrtí: Muži, Česká republika	34
3.4	Expozice vůči riziku: Muži, Česká republika	35
3.5	Výběr z portfolia klientů	35
4.1	Odhady koeficientů LC modelu	41
4.2	Odhady parametrů $\Delta\kappa_y$	45
4.3	Simulované hodnoty $\Delta\kappa_y$ - muži	48
4.4	Simulace parametru κ_y - muži	49
4.5	Simulované kvantily κ_y - muži	51
4.6	Logaritmy intenzit úmrtností - muži	52
4.7	Pravděpodobnosti úmrtí $q_{x,y}$ - muži	53
4.8	Srovnání $q_{x,y}$ v letech - ženy	54
4.9	Matice \mathbf{q}_{x,y_i} náhodného klienta	55
4.10	Matice \mathbf{l}_{x,y_i} náhodného klienta	56
4.11	Matice \mathbf{inc}_{x,y_i} náhodného klienta	57
4.12	Matice $\mathbf{d.inc}_{x,y_i}$ náhodného klienta	59
4.13	Individuální veličiny i -tého klienta na základě BE LC odhadů $q_{x,y}$	60
4.14	Náhled na kvantily individuálních pravděpodobností úmrtí i -tého klienta, LC	61
4.15	Kvantifikace rizika pomocí standardní formule a interního modelu	64
5.1	Odhad parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$	70
5.2	Porovnání modelu a skutečných dat	72
5.3	Extrapolace parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$	75
5.4	Simulované hodnoty diferencí pro parametr $\kappa_y^{(1)}$ - muži	77
5.5	Simulace parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ - muži	78
5.6	Simulované kvantily $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$	80
5.7	Logaritmy intenzit úmrtností - muži	82
5.8	Matice pravděpodobností úmrtí $\mathbf{q}_{x,y}$ - muži	83
5.9	Srovnání $q_{x,y}$ v letech - ženy	84

5.10	Matice \mathbf{q}_{x,y_i} náhodného klienta	85
5.11	Matice \mathbf{l}_{x,y_i} náhodného klienta	86
5.12	Matice \mathbf{inc}_{x,y_i} náhodného klienta	86
5.13	Matice $\mathbf{d.inc}_{x,y_i}$ náhodného klienta	87
5.14	Individuální veličiny i -tého klienta na základě BE CBD odhadů $q_{x,y}$	88
5.15	Náhled do kvantilů individuálních posloupností l_{x,y_i} náhodného klienta, CBD	88
5.16	Kvantifikace rizika pomocí standardní formule a interního modelu, CBD	89
6.1	Porovnání individuálních vektorů \mathbf{q}_{x,y_i}	93
6.2	Srovnání kapitálových požadavků dle jednotlivých modelů	95
6.3	Ukázka vymírání portfólia, LC model	96
6.4	Solventnostní kapitálový požadavek SCR	97

SEZNAM ZKRATEK

ASM	Available Solvency Margin, disponibilní solventnostní kapitál
BE	Best estimate, nejlepší odhad
CBD	Cairns-Blake-Dowd (model)
CF	Cash flow, peněžní tok
ČSÚ	Český statistický úřad
LC	Lee-Carter (model)
MCR	Minimum Capital Requirement
NPV	Net present value, čistá současná hodnota
SCR	Solvency Capital Requirement
ÚT	Úmrtnostní tabulky
VaR	Value at Risk

ÚVOD

Stárnutí populace je v současnosti značně diskutovaným tématem. Rostoucí střední délka života je způsobena mnoha faktory a má různé důsledky související hlavně se starobními důchody a zabezpečením péče ve stáří. Různé instituce, demografové a pojistní matematici se snaží stárnutí populace uchopit takovým způsobem, aby bylo možné jej predikovat. Zájem na těchto predikcích mají zejména pojišťovny, zabývající se životním a důchodovým pojištěním. Produkty těchto pojišťoven velmi souvisí s lidskou úmrtností.

K modelování úmrtnosti bylo doposud vyvinuto značné množství modelů, viz např. [1]. Pro účely diplomové práce byly zvoleny dva modely, a to Lee-Carterův (LC) model a Cairns-Blake-Dowdův (CBD) model.

Cílem diplomové práce je popsat vybrané přístupy k stochastickému modelování a predikci úmrtnosti a aplikovat je na reálná data s ukázkou jejich využití v oblasti řízení rizik spojených s úmrtností.

V první kapitole je obecně popsána problematika modelování úmrtnosti společně s vybranými základními pojmy z oblasti demografie. Následuje teoretický popis procesu řízení rizik v životním pojištění. Je zmíněno i řízení rizik z pohledu platné směrnice Evropského parlamentu a Rady s názvem Solventnost II. V kapitole 3.1 jsou popsána data, která byla v práci využita vč. popisu fiktivního portfolia klientů, které bylo pro účely práce vygenerováno. Kapitoly 4 a 5 popisují stručně LC a CBD model v rozsahu potřebném pro jejich aplikaci. Věnují se odhadu parametrů modelů, extrapolaci časových složek, odhadu intenzit úmrtnosti a tvorbě individuálních úmrtnostních tabulek klientů.

Vytvořené individuální úmrtnostní tabulky jsou v práci využity pro odhad kapitálové náročnosti portfolia klientů. Pro ukázkou aplikace modelování úmrtnosti v oblasti řízení rizik životní pojišťovny jsou kalkulovaná data vystavena stresovým scénářům s ohledem na riziko dlouhověkosti. Kvantifikace rizika na základě stresových scénářů slouží jako podklad pro stanovení výše solventnostního kapitálového požadavku (SCR) dle směrnice Solventnost II.

Veškeré výpočetní postupy a generování grafických výstupů bylo provedeno užitím programovacího jazyka R spolu s různými knihovnami, které jsou v práci popsány. Skripty, které byly v rámci práce vytvořeny či upraveny jsou dostupné jako přílohy. Pro napsání práce byl využit software L^AT_EX.

1 MODELOVÁNÍ ÚMRTNOSTI A JEHO VÝZNAM

Úmrtnost lze označit jako vlastnost všech současně známých skupin obyvatel, populací. Tato vlastnost se projevuje postupným vymíráním členů dané skupiny obyvatel. Vymírání členů nemusí být spojeno s redukcí velikosti populace, protože do populace zároveň vstupují členové noví. Novými členy se myslí zejména lidé nově narození, příp. přistěhovalí. Populacemi jako celkem se zabývá demografie. Úmrtností, jako jednou z vlastností populací, se zabývají např. pojišťovny, ale i další organizace a subjekty.

Postupné snižování měr úmrtností v čase má za následek zvyšování očekávané budoucí délky života lidí. Pro účely modelování úmrtnosti bylo vytvořeno značné množství modelů. Tyto modely si kladou za cíl popsat trend vývoje úmrtnosti matematickou funkcí. Na základě zkonstruované matematické funkce je následně možné vytváření prognóz, které jsou stěžejní např. pro zmíněné pojišťovny.

Podle přístupu k pozorovaným hodnotám lze podle [2] rozdělit modely úmrtnosti na deterministické a stochastické. Deterministické modely předpokládají, že hodnoty v úmrtnostních tabulkách jsou pevně daná čísla. Modely stochastické chápou hodnoty v úmrtnostních tabulkách za možné realizace náhodných veličin. Z názvu této práce plyne, že předmětem budou modely stochastické, konkrétně Lee-Carter (LC) model (viz kapitola 4), a Cairns-Blake-Dowd (CBD) model (viz kapitola 5).

Protože je tato práce psaná s akcentem na řízení rizik, resp. řízení rizik v rámci regulace Solventnost II, bude stěžejní roli hrát pohled pojišťovny, tedy pohled aktuárský. Význam modelování úmrtnosti pro pojišťovnu, příp. pro penzijní fond apod., je stěžejní. Zásadní význam má při produktech založených na bázi pravidelných výplat důchodů klientům. Může se jednat např. o určité penzijní schéma. Úmrtí klientů bývá značným milníkem v těchto schématech. Po úmrtí klienta může dojít k okamžitému přerušení výplat důchodu, přesměrování výplat důchodů na jinou osobu v potenciálně jiné výši apod. Cílem této práce není popisovat možné podoby penzijních aj. schémat. Faktem však zůstává, že úmrtnost klientů je v těchto schématech zásadním faktorem.

Modelování úmrtnosti hraje zásadní roli při zajišťování solventnosti pojišťoven. Aby byla pojišťovna solventní, tzn. byla schopna nepřetržitě a včas plnit své závazky vůči tře-

tím stranám, musí držet dostatečné množství peněz v rezervě. Problémem je, že pojišťovna je zároveň podnik generující zisk, a to např. formou investování finančních prostředků. Je tedy otázkou, kolik finančních prostředků musí pojišťovna držet v likvidní formě a kolik může investovat tak, aby se nedostala do insolvence. Odpověď na tuto otázku by zpravidla měla být pojišťovna sama schopna určit, a to pomocí matematických propočtů. Pokud by však rozhodnutí o výši držných rezerv záviselo pouze na vlastníkově pojišťovny, akcionářích, managementu apod., mohlo by to vést k nezodpovědnému a rizikovému chování pojišťovny, což by mohlo vyústit v insolvenční a následnou likvidaci. Z toho důvodu existuje regulační rámec Solventnost II, který ukládá pojišťovnám různá pravidla chování.

Modelování úmrtnosti pojišťovně dává vzhled do možné budoucnosti. Vhodným modelováním lze prognózovat budoucí chování portfolia klientů, resp. způsob jeho vymírání. Pakliže pojišťovna s velmi vysokou pravděpodobností ví, že k určitému datu již nebude žít určitý počet osob ze spravovaného portfolia, nebude zbytečně držet vysoké objemy finančních prostředků v rezervách. S těmito finančními prostředky bude nakládat jiným způsobem, např. je zhodnocovat formou investování, nebo je vyplácet formou dividend.

1.1 Matematický model úmrtnosti

Tato kapitola, není-li uvedeno jinak, byla zpracována podle [3, 4].

Uvažujme osobu ve věku x . Nechť T_x je spojitá náhodná veličina definovaná na intervalu $(0, \infty)$, označující budoucí délku života x -letého jedince. Z toho vyplývá, že osoba žijící ve věku x zemře někdy v budoucnu v čase $x + T_x$. Tento budoucí čas je neznámý, ale lze jej modelovat jako vhodnou náhodnou veličinu. Aby bylo možné náhodnou veličinu T_x modelovat, je třeba nejprve vědět něco o jejím pravděpodobnostním rozdělení. Problémem však je, že osoby v průběhu času stárnou. Osobě, které je letos x let, bylo loni $x - 1$ let a za rok bude této osobě $x + 1$ let. Letos je tedy předmětem pozorování náhodná veličina T_x , loni to však byla veličina T_{x-1} a za rok to bude veličina T_{x+1} . Předmětem celkového pozorování tedy nebude pouze náhodná veličina T_x , ale celá řada náhodných veličin $\{T_x\}_{x \geq 0}$.

Nechť $F_x(t)$ je distribuční funkce náhodné veličiny T_x .

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) \quad (1.1)$$

Nechť $S_x(t)$ je funkce přežití (*survival function*) náhodné veličiny T_x .

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x > t) \quad (1.2)$$

Vztah 1.2 lze rozepsat jako

$$S_x(t) = P(T_x > t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}. \quad (1.3)$$

Definujme rovněž tzv. podmínku konzistence (*consistency condition*).

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x+t | T_0 > x) \quad (1.4)$$

V aktuárské literatuře, například [4], se distribuční funkce $F_x(t)$ často označuje ${}_tq_x$, kde tato značení jsou ekvivalentní.

$$F_x(t) = {}_tq_x \quad (1.5)$$

V aktuárské literatuře, například [4], se funkce přežití $S_x(t)$ často nahrazuje značením ${}_tp_x$:

$$S_x(t) = {}_tp_x \quad (1.6)$$

Pravděpodobnost toho, že se jedinec ve věku x dožije věku y (resp. nezemře v následujících $y - x$ letech), ale zemře před dosažením věku z lze zapsat jako

$$\begin{aligned} S_x(y-x) \times F_y(z-y) &= S_x(y-x) \times [1 - S_y(z-y)] \\ &= S_x(y-x) - S_x(y-x) \times S_y(z-y) \\ &= S_x(y-x) - S_x(z-x). \end{aligned}$$

Poslední vztah lze podle vztahů 1.5 a 1.6 vyjádřit také alternativně ve tvaru

$${}_{y-x}p_x \times {}_{z-y}q_y = {}_{y-x}p_x - {}_{z-x}p_x. \quad (1.7)$$

1.2 Úmrtnostní tabulka

„Úmrtnostní tabulka je nástroj, který prezentuje model úmrtnosti praktickým způsobem a patří tak k základním nástrojům matematiky životního pojištění“. [3] V této kapitole budou popsány základní veličiny, které se běžně vyskytují v úmrtnostních tabulkách a které budou předmětem výpočtů v následujících kapitolách.

Základem úmrtnostní tabulky je veličina q_x , která reprezentuje pravděpodobnost, že se jedinec věku x nedožije věku $x + 1$, resp. zemře před dosažením věku $x + 1$. Odhad veličin q_x bude stěžejním úkolem modelů v kapitolách 4 a 5. Z veličiny q_x lze snadno dopočítat veličinu p_x , která reprezentuje pravděpodobnost, že jedinec ve věku x nezemře před dosažením věku $x + 1$ a platí tedy následující rovnosti:

$$q_x = 1 - p_x \quad (1.8)$$

$$p_x = 1 - q_x \quad (1.9)$$

Další důležitou veličinou je l_x . Podle [5] se jedná o tzv. tabulkový počet dožívajících. Jedná se o hypotetický počet osob, které se dožijí věku x let z určitého počtu živě narozených osob při zachování řádu úmrtnosti sledovaného období. Nemusí se však jednat pouze o jedince nově narozené, ale např. i o jedince nově vstupující do určitého modelu (jak bude zjevné v dalších kapitolách této práce). Této veličině se také říká kořen, neboli *radix* úmrtnostní tabulky. Velmi často se stanovuje radix jako poměrně vysoké číslo (např. 100.000). To má dle [4] zejména historické důvody, neboť při volbě nízkého čísla dochází brzy k neceločíselným zůstatkům, které jsou obtížně interpretovatelné. Tato práce však pracuje s individuálními úmrtnostními tabulkami a radix vždy stanovuje roven jedné pro každou pozorovanou osobu (jak je popsáno v dalších kapitolách). Níže je uveden vztah pro výpočet veličiny l_x v roce $x + 1$.

$$l_{x+1} = l_x \times (1 - q_x) = l_x \times p_x \quad (1.10)$$

V Tabulce 1.1 je ukázána část úmrtnostní tabulky mužů pro rok 2020 za Českou republiku, vydanou Českým statistickým úřadem (dále ČSÚ) v roce 2021. Jedná se o nejnovější úmrtnostní tabulku, která je v době psaní této práce k dispozici. Na webových stránkách ČSÚ lze dohledat i podrobnější úmrtnostní tabulky za regiony, kraje, atd.

Tabulka 1.1: Ukázka mužské úmrtnostní tabulky - ČSÚ

věk (x)	D_x	P_x	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	151	56.829	0,002657	0,002651	100.000	265	99.769	7.530.360	75,30
1	11	58.108	0,000205	0,000205	99.735	20	99.725	7.430.591	74,50
2	8	58.855	0,000136	0,000136	99.714	14	99.708	7.330.866	73,52
3	10	58.912	0,000158	0,000158	99.701	16	99.693	7.231.158	72,53
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
105	1	19	0,070728	1	9	9	12	12	1,41

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z [6]

Podrobné vysvětlení všech veličin uvedených v ÚT včetně metodiky jejich výpočtu lze nalézt v [5]. Zde je podle [5] uveden pouze nezbytně dlouhý popis. Veličina D_x reprezentuje absolutní počet zemřelých ve věku x za dané území během daného období. Veličina P_x reprezentuje střední stav obyvatel na daném území ve věku x . Veličina m_x charakterizuje tzv. hrubou míru úmrtnosti. Veličiny q_x , p_x a l_x byly již popsány. Veličina d_x reprezentuje tabulkový počet zemřelých. Jedná se o hypotetický počet zemřelých osob v dokončeném věku x let. Veličina L_x je hypotetický průměrný počet žijících v dokončeném věku x let a veličina T_x je tzv. pomocný ukazatel, vyjadřující počet let života, které má tabulková generace (nikoliv jednotlivec) v daném věku ještě před sebou. Poslední veličinou je tzv. střední délka života, e_x , která udává průměrný počet let, který má naději prožít osoba právě x -letá při zachování řádu úmrtnosti sledovaného období.

1.3 Intenzita úmrtnosti

Pro spojitý případ věku x , kde $x \geq 0$ se zavádí intenzita úmrtnosti ve věku x . Pomocí intenzity úmrtnosti lze určit pravděpodobnost úmrtí mezi věkem $x+t$ a věkem $x+t+dt$, kde $dt < 1$. Intenzita úmrtnosti ve věku $x+t$ je podle [4] definována následovně.

$$\mu_{x,t} = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(T_x \leq t+dt | T_x > t)}{dt} \quad (1.11)$$

Podle [3] je intenzita úmrtnosti ve věku x definována jako

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{{}_x p_0} = -\frac{1}{{}_x p_0} \times \frac{d}{{}_x p_0} = -\frac{d}{dx} \ln({}_x p_0). \quad (1.12)$$

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny T_x se podle [4] určí jako parciální derivace distribuční funkce $F(x)$.

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \frac{\partial}{\partial t} F_x(t) \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{F_x(t+dt) - F_x(t)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(T_x \leq t+dt) - P(T_x \leq t)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(T_x \leq t) + P(T_x > t) \times P(T_x \leq t+dt | T_x > t) - P(T_x \leq t)}{dt} \\ &= P(T_x > t) \times \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(T_x \leq t+dt | T_x > t)}{dt} \\ &= S_x(t) \times \mu_{x+t} \\ &= {}_t p_x \times \mu_{x+t} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ze vztahu $F_x(t) = \int_0^t f_x(s) ds$, lze odvodit vztah

$${}_t q_x = \int_0^t ({}_s p_x \times \mu_{x+s}) ds \quad (1.14)$$

Podle [3] je ${}_t p_x$ vyjádřeno jako

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad (1.15)$$

Střední hodnota náhodné veličiny T_x je podle [3] vyjádřena jako

$${}^{\circ} e_x = E(T_x) = \int_0^{\infty} ({}_t p_x) dt \quad (1.16)$$

1.4 Aproximace intenzity úmrtnosti

Intenzita úmrtnosti osoby ve věku x a v kalendářním roce y , tedy $\mu_{x,y}$, je teoretická veličina popsaná v kapitole 1.3. Pro praktické použití je nutná možnost vyjádření odhadů této veličiny.

Pro určení odhadu intenzity úmrtnosti mezi věkem x a $x + 1$ v roce y je podle [4] třeba mít k dispozici určitý počet osob n , kterým je v kalendářním roce y právě x let. U osob, které jsou předmětem pozorování lze potom spojitým způsobem zaznamenávat čas, po který byly pod pozorováním. Z toho je možné vyjádřit tzv. odžitý čas pozorovaných (*time spent alive under observation*). Každá pozorovaná osoba odžila pod pozorováním jinak dlouhý časový úsek. Tento individuální časový úsek započal vstupem do pozorování a skončil buď úmrtím klienta, nebo narozeninami klienta. Individuální odžitý čas lze označit písmenem t_i , kde index i značí i -tého klienta. Součet individuálních časů se nazývá centrální expozice k riziku a značí se E_x^{c1} . Zároveň je možné zaznamenávat počet úmrtí d_x , který nastal v průběhu pozorování. Z takto získaných údajů lze zkonstruovat tzv. hrubou (*crude*) intenzitu úmrtnosti definovanou podle [4] jako

$$\hat{r}_x = \frac{d_x}{E_x^c}. \quad (1.17)$$

Podle [4] reprezentuje vztah 1.17 statistický odhad intenzity úmrtnosti v určitém nespécifikovaném okamžiku mezi věkem x a $x + 1$. Proto se uvádí rovnost

$$\hat{r}_x = \hat{\mu}_{x+s} = \frac{d_x}{E_x^c}, \quad (1.18)$$

kde index s reprezentuje onen nespécifikovaný časový okamžik mezi věkem x a $x+1$. Za předpokladu, že se intenzita úmrtnosti výrazně nemění mezi věky x a $x + 1$ lze předpokládat, že $s = 1/2$. Jedná se tedy podle [3] o tzv. předpoklad konstantní intenzity úmrtnosti mezi celočíselnými věky. Tudíž lze říci, že veličina \hat{r}_x je aproximací intenzity úmrtnosti $\mu_{x+1/2}$.

V dalších kapitolách této práce, u stochastických modelů úmrtnosti, si lze všimnout, že veličina $\mu_{x+1/2}$ je rozšířena o časovou veličinu y a vzniká intenzita úmrtnosti ve věku $x + 1/2$ v kalendářním roce y , resp. $\mu_{x+1/2,y+1/2}$.

¹Index c značí, že se jedná o tzv. centrální expozici k riziku a tedy že tato veličina byla vyjádřena pomocí odžitého času, nikoli pomocí počtu pozorovaných životů.

Dvě výše uvažované veličiny, tedy centrální expozice k riziku a počet úmrtí, jsou mnohdy jediné veličiny, které jsou dostupné k výpočtům a pojistní matematici, demografové a další si s nimi musí vystačit. Jsou to přesně tyto veličiny, které jsou dostupné v databázi Human Mortality Database a pomocí kterých byly prováděny výpočty v této práci.

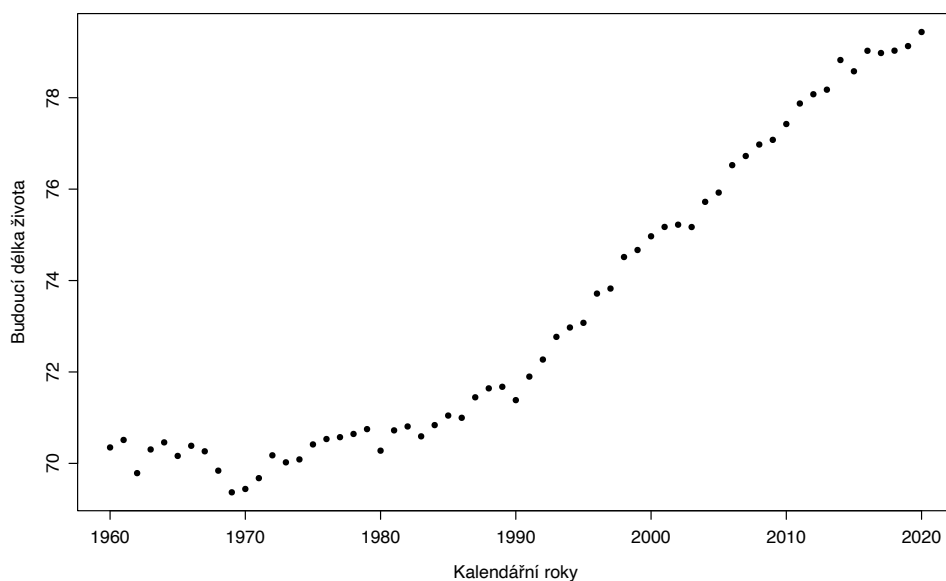
1.5 Vývoj budoucí délky života

Budoucí délka života (též naděje dožití, střední délka života, očekávaná délka života, *life expectancy*) je v současnosti předmětem mnoha diskusí a výzkumů. Jedná se o veličinu úzce spojenou s vývojem úmrtnosti. Podle [7] se naděje dožití určí pomocí vztahu

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}, \quad (1.19)$$

kde „*pomocný ukazatel T_x vyjadřuje počet let života, které má populace (nikoli jedinec) v daném věku x ještě před sebou ...*“ [7], resp. jak dlouhou dobu ještě prožije počet osob v populaci. Konkrétní metodika výpočtu se liší napříč literaturou. Nejčastěji se sledují statistiky e_0 , tedy naděje dožití právě narozených jedinců v dané sledované zemi. Pro společnosti zabývající se penzemi je potom důležitý ukazatel e_n , kde n reprezentuje věk, ve kterém člověk odchází do penze a začíná pobírat anuitu, tedy pravidelný peněžní obnos v určité sjednané výši.

Stanovováním střední délky života se zabývá mnoho institucí, mj. i Skupina Světové Banky [8]. Ta na svých stránkách publikuje vývoj střední délky života při narození pro velké množství různých zemí. Trend napříč naprostou většinou zemí je zřejmý, dochází k postupnému klesání měr lidské úmrtnosti [4], resp. k prodlužování střední délky života. Na Obrázku 1.1 je možné vidět vývoj střední délky života v České republice od roku 1960 do roku 2020. Tento ukazatel agreguje obě pohlaví.



Obrázek 1.1: Očekávaná délka budoucího života, ČR

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z [8]

Střední délka života osoby narozené v České republice byla v roce 1960 70,35 let. Střední délka života osoby narozené v České republice byla v roce 2020 79,44 let. Za přibližně 60 let tedy došlo ke zlepšení o téměř 13 procentních bodů.

Ukazatel střední délky života lze používat i jako prostředek kvantifikace vyspělosti, socio-kulturního stupně vývoje společnosti či celkového zdravotního stavu populace. [9]. Při bližším studiu a porovnávání středních délek života jednotlivých zemí je patrné, že vyspělé země mají střední délku života výrazně vyšší než země rozvojové. Je to dáno zejména lékařskou péčí, způsobem stravování, životním stylem, vztahem ke zdraví apod.

Rostoucí střední délku života ocení pravděpodobně většina lidských bytostí. I přes to představuje komplikaci pro instituce, které se zabývají vyplácením důchodů. Rostoucí trend střední délky života značně komplikuje výpočty týkající se potřebného kapitálu na portfólia příjemců důchodů. Modely uvažované v této práci představují jeden z mnoha způsobů, kterými je snaha trend rostoucí střední délky života zachytit.

2 ŘÍZENÍ RIZIK ŽIVOTNÍCH POJIŠTŮ- VEN

„Riziko je chápáno jako nejistota, která může způsobit ztrátu“. [10] Definice rizik existuje velké množství. Většina z nich považuje riziko za potenciální skutečnost, která je spojena s nechtěným výsledkem. S tím korespondují i definice podle [11], kde jsou rizika definována např. jako „záporná odchylka od normálu“ či „poškození, zničení nebo ztráta života, zdraví nebo majetku pojištěného“. [11]

Členění a klasifikací rizik pojišťoven existuje značné množství. Podle [11] lze uvést například členění rizik na pojistné riziko, tržní riziko, kreditní riziko, riziko likvidity a riziko operační. Pro tuto práci je důležité členění rizik podle regulačního rámce Solventnost II. Toto členění spolu s popisem jednotlivých rizik lze nalézt v sekci 2.2.

Podle některých zdrojů lze však riziko chápat oboustranně, tedy jako nejistotu, která může vyústit v negativní, ale i pozitivní výsledek. Finanční trhy ve spojení s expozicí vůči riziku využívají dva termíny, a to „long“ a „short“. Pozice „long“ označuje stav, kdy exponovaná osoba benefituje z růstu ceny podkladového aktiva a naopak. Pozice „short“ označuje stav, kdy exponovaná osoba trpí z růstu ceny podkladového aktiva a naopak. [1] To koresponduje s chápáním rizika jako procesu s binárním výstupem, kdy první možnost reprezentuje zisk a druhá možnost reprezentuje ztrátu.

2.1 Rizika v souvislosti s portfoliem klientů

Při spravování portfolia klientů pobírajících důchod hraje lidská úmrtnost a její vývoj zásadní roli. Podle [1] se v souvislosti s portfoliem klientů uvádí dvě základní rizika, **riziko dlouhověkosti** a **úrokové riziko**. (Lze uvažovat i **riziko úmrtnosti**, resp. zvýšené úmrtnosti, jako opak k riziku dlouhověkosti.) Riziko dlouhověkosti pro pojistitele spočívá v pozitivním šoku v počtech úmrtí pojištěných osob. Jedná se tedy o situaci, při které umírá méně lidí, než bylo očekáváno, lidé vymírají pomaleji. To má za následek nutnost vyplácet anuitu klientům po delší časové období, než bylo očekáváno. Na takovou skutečnost si pojistitel musí vytvářet kapitálovou rezervu, aby zůstal solventní.

K tomu, aby se pojistitel nedostal do finančních problémů je třeba provést ocenění portfolia anuitantů. K tomu je nutné podle [1] znát dvě veličiny. První veličinou jsou

současné (*current, base*) míry úmrtnosti, které jsou založeny na skutečných datech, resp. skutečných počtech úmrtí a skutečných expozicích vůči riziku. Druhou veličinou jsou budoucí (*future, forecast*) míry úmrtnosti. Budoucí hodnoty měr úmrtností jsou předmětem odhadů a jsou dle [1] vysoce subjektivní. Odhady budoucího vývoje úmrtnosti lidské populace jsou předmětem kapitol 4 a 5.

Kombinací současných a budoucích měr úmrtnosti vznikají tzv. skupinové úmrtnostní tabulky. Skupinové úmrtnostní tabulky mohou být následně použity k vytvoření tzv. nejlepšího odhadu (*best estimate, BE*), kvantifikace budoucích závazků plynoucích z portfólia. Aktuární postupy většinou zahrnují určení výše budoucích peněžních toků (angl. *cash-flow, CF*) na základě nejlepšího odhadu měr úmrtností. Tyto odhady budoucích CF je dále nutné diskontovat. Pro účely penzijních schémat bývá nejčastěji uvažována úroková míra dlouhodobých podnikových dluhopisů s hodnocením AA. [1]

Rizika spojená s odhady budoucích měr úmrtnosti se řadí do čtyř kategorií, a to riziko volatility (*mortality volatility*), výběrové riziko (*mortality sampling risk*), skokové riziko (*mortality jump risk*) a trendové riziko (*mortality trend risk*). **Riziko volatility** v rámci úmrtnosti se vztahuje k meziročním fluktuacím v mírách úmrtnostech. Ke kvantifikaci volatility např. [1] používá směrodatnou odchylku z procentuálních změn nevyrovnaných měr úmrtností. **Výběrové riziko** se týká zejména malých výběrových souborů. Reálně existují situace, kdy se v určitém pozorování nevyskytuje velké množství životů. To s sebou nese velkou statistickou chybu a ztížené podmínky pro vytváření budoucích prognóz. Za malé populace se považují soubory dosahující 1.000 a méně pozorování. Pro velké soubory (více než 100.000 pozorování) existuje vysoká míra jistoty, že odhady měr úmrtností jsou velmi blízké skutečnosti a učiněné prognózy se budou zásadně blížit budoucím reálným hodnotám. **Skokové riziko** se týká náhlých, neočekávaných meziročních skoků v úmrtnosti. Příkladem může být šíření jakékoli nakažlivé nemoci, teroristické útoky, přírodní katastrofy apod. **Trendové riziko** se týká odchylek od odhadovaného trendu vývoje budoucích měr úmrtností. Specifickým rizikem je potom **modelové riziko**, tedy riziko, že byl vybrán kompletně nevhodný model. S tím je částečně spojené **riziko parametrické**, tedy riziko, že odhady parametrů modelu (kalibrace modelu) nebyla učiněna správně a že odhadnuté parametry jsou nevěrohodné, špatné. [1]

Klíčovým pro řízení rizik je vyjádření citlivosti výše budoucích peněžních toků na změny v úmrtnosti, neočekávané šoky v budoucích mírách úmrtností. Provedením do-

statečného množství simulací a aplikací stresových scénářů je možné získat představu o možných budoucích scénářích chování měř úmrtností. Z těchto scénářů lze následně vyjádřit kapitálovou náročnost portfolia (resp. kapitálový požadavek SCR, což je předmětem kapitoly 6.1). Při simulacích je vhodné brát v potaz existenci výše uvedených rizik. Například při uvažování malých výběrových souborů či malých populací je třeba brát v potaz výběrové riziko, naopak při velkých objemech dat pro velké populace toto riziko lze v některých případech ignorovat, resp. toto riziko nebude významné. Podobně při simulacích na krátké časové úseky lze v některých případech opustit od trendového rizika, neboť trendové riziko se zpravidla projevuje v dlouhodobějším časovém horizontu. [1]

2.2 Řízení rizik podle Solventnosti II

Dne 17. prosince 2009 byl v Úředním věstníku zveřejněn nový systém regulace evropského pojišťovnictví. Tento systém nese název Solventnost II (*Solvency II*).

Definice termínu „solventnost“ existuje mnoho. Např. podle Zákona o pojišťovnictví se jedná o „*Schopnost pojišťovny nebo zajišťovny zabezpečit vlastními zdroji trvalou splnitelnost závazků z pojišťovací nebo zajišťovací činnosti*“. [12] Úprava tohoto regulatorního rámce je zavedena ve směrnici 2009/138/ES. „*Nový regulatorní rámec je založen na třech pilířích, které zahrnují kvantitativní požadavky na pojišťovny a zajišťovny, kvalitativní požadavky na řízení rizik i na postupy dohledových orgánů a vykazování a uveřejňování informací pojišťovnami*“. [13]

Účinnost regulace Solventnost II začala pro členské země Evropské unie platit dne 1.1.2016. Zároveň bylo definováno mnoho přechodných opatření načasovaných až k roku 2019. [14]

První pilíř stanovuje kvantitativní požadavky na kapitál pojišťoven. Definuje tzv. solventnostní kapitálový požadavek (*Solvency Capital Requirement, SCR*), který se odvíjí od tržního, kreditního, upisovacího a operačního rizika. V souvislosti se solventnostním požadavkem si mohou pojišťovny určit metodu jeho výpočtu. První variantou je standardní formule. Druhou variantou je zavedení a užití vlastního interního modelu², příp. kombinace obou variant. Parametry, které se užívají pro stanovení SCR pro pojišťovnu dle

²Tato práce v souvislosti s rizikem dlouhověkosti pracuje s oběma variantami, tedy formou stanovení SCR pomocí standardní formule i interního modelu. Obě metody jsou v kapitole 6.1 porovnávány.

standardní formule jsou odvozovány z metodologie VaR (*Value at Risk*). VaR vyjadřuje výši rizika jako určitý definovaný kvantil α pro $\alpha \in (0 \leq \alpha < 1)$ pravděpodobnostního rozdělení rizika X . Například v oblasti bankovníctví je tento kvantil často roven 0,99. Konkrétně pro případ pojišťoven je standardní formule pro SCR kalibrována tak, aby pokrývala výši rozdělení rizika X se spolehlivostí 99,5%. Spolu s SCR je definován i minimální kapitálový požadavek (*Minimum Capital Requirement*, MCR), který slouží jako dolní kapitálová mez pojišťovny. [15]

Druhý pilíř se týká zavedení kontrolních procesů. Zavádí důsledná pravidla pro interní kontroly pojišťoven a pravidla pro řízení jejich rizik. Uvažuje se při tom zejména tržní riziko, úvěrové riziko, riziko likvidity, pojistné riziko a operační riziko. [11]

Třetí pilíř se týká tržní disciplíny. Obsahuje seznam povinností, které pojišťovny musí vykonávat za účelem vyšší transparentnosti. Jedná se většinou o povinnosti publikovat pravidelně informace o svém působení v oblasti obchodní činnosti apod.

Na sledování solventnosti pojišťoven je založen regulační systém. Regulátorem bývá udána minimální úroveň kapitálových požadavků (MCR) a cílová úroveň kapitálových požadavků (SCR). Pojistitel je nazván solventním tehdy, když jeho aktiva převyšují pasiva alespoň o výši minimálního kapitálového požadavku MCR. Zjednodušeně platí, že disponibilní solventnostní kapitál (*Available Solvency Margin*, ASM) se určí odečtením pasiv od aktiv pojišťovny. Obecně potom platí, že pokud je ASM vyšší nebo rovno než SCR, je pojistitel z hlediska regulátora prohlášen za solventního bez výtek. Je-li ASM mezi MCR a SCR, je zpravidla nutné zahájit určitou intervenci. Pakliže má pojišťovna hodnotu ASM nižší, než MCR, vede to až k možné likvidaci pojišťovny. [14]

Klíčovými moduly standardní formule SCR jsou podle [15]

- tržní riziko (*Market risk*),
- kreditní riziko (*Counterparty default risk*),
- životní upisovací riziko (*Life underwriting risk*),
- zdravotní upisovací riziko (*Health underwriting risk*),
- neživotní upisovací riziko (*Non-life underwriting risk*) a
- operační riziko (*Operational risk*).

Tržní riziko souvisí s volatilitou instrumentů na finančních trzích. Expozice vůči riziku je měřena pomocí změn cen finančních instrumentů. K agregaci těchto rizik bývá používána korelační matice. **Kreditní riziko** je riziko spojené s potenciální ztrátou ply-

noucí z neočekávaného defaultování třetích stran, vůči kterým jsou evidovány pohledávky. **Životní upisovací riziko** se dělí na tzv. biometrické riziko, katastrofické riziko ad. Nejdůležitějším pro tuto práci je riziko biometrické, které zahrnuje riziko úmrtnosti, riziko dlouhověkosti a riziko nemocnosti. Riziku dlouhověkosti a riziku zvýšené úmrtnosti se věnují modely a simulace v kapitolách 4 a 5. **Zdravotní upisovací riziko** představuje riziko plynoucí ze zdravotně-pojistných kontraktů. **Neživotní upisovací riziko** reprezentuje riziko plynoucí z pojistných kontraktů. Riziko plyne z nejistoty přesných časových okamžiků, ve kterých dochází k čerpání pojistných plnění. **Operační riziko** reprezentuje možné selhání lidského faktoru, různých procesů apod. [15]

Pojišťovny si mohou dle regulace Solventnost II určit, zda budou postupovat dle standardní formule, interního modelu, či kombinace obojího. K tomu, aby mohl pojistitel využívat interní model k určování solventnostního kapitálového požadavku SCR, musí interní model splňovat určitá kritéria. Interní model musí být schválen regulátorem, musí zohledňovat relevantní rizika, musí se týkat relevantního časového období a musí respektovat vážnost rizik alespoň v takové míře, jako tomu je v případě standardní formule. Regulace týkající se interních modelů jsou vyvíjeny společností Committee of European Insurance and Occupational Pensions (CEIOPS). Tato společnost poskytuje 3 testy, kterými musí interní modely pojistitelů úspěšně projít, aby bylo možné tyto modely v praxi používat. Jedná se o „*Internal risk management use test*“, „*Regulatory capital requirement calibration test*“ a „*Base methodology statistical quality test*“. [15]

Veškeré počínání v následujících kapitolách bylo prováděno se záměrem možnosti kalkulace solventnostního kapitálového požadavku vzhledem k riziku dlouhověkosti v kapitole 6.1. Tato veličina bude označována jako $SCR_{\text{longevity}}$. Vztah pro výpočet $SCR_{\text{longevity}}$ je podle [16] následující.

$$SCR_{\text{longevity}} = NPV_{\text{longevity}} - NPV_{\text{BE}} \quad (2.1)$$

Proměnná NPV_{BE} reprezentuje čistou současnou hodnotu budoucích závazků vůči klientům, odhadnutou na základě BE odhadů (viz vztah 4.15). Jako BE odhady jsou v kontextu 2 uvažovaných stochastických modelů chápány pravděpodobnosti úmrtí klientů odhadnuté z centrální předpovědi časových složek κ_y (viz části 4.2, 5.2. Proměnná $NPV_{\text{longevity}}$ reprezentuje čistou současnou hodnotu budoucích závazků vůči klientům, odhadnutou na

základě stresových scénářů. Solventnost II má v rámci standardní formule definováno, že spolehlivost 99,5% odpovídá snížení BE pravděpodobností úmrtí o 20 procentních bodů.

$$q_{x_{longevity}} = q_{x_{BE}} \times 0,8 \quad (2.2)$$

Alternativním způsobem může být užití interního modelu. Interní model je v této práci pojatý jako vyjádření 99,5% kvantilu ze simulovaných budoucích měr úmrtností.

Aplikace standardní formule dle standardu Solventnost II je pro pojišťovnu mnohem snazší, než vytváření interního modelu. Pro postup dle standardní formule by stačilo převzít ÚT od věrohodného zdroje, např. ČSÚ. Pravděpodobnosti úmrtí snížit o 20 procentních bodů a vyjádřit kapitálovou náročnost. Vytváření interních modelů je mnohem náročnější, ale má své značné výhody. Užitím standardní formule se pojišťovna musí smířit s tím, že byla kalibrována se spolehlivostí 99,5% na základě metodologie VaR. To však pojišťovně nepomůže, pokud chce znát celé rozdělení budoucích závazků. Pakliže by znala celé rozdělení budoucích závazků, mohla by se např. ze své svobodné vůle rozhodnout jít na kvantil vyšší, 99,6% apod. Zkrátka znalost celého rozdělení závazků plynoucích z jednoho rizika je pro pojišťovnu či jiný subjekt z mnoha důvodů velmi cennou informací.

Tato práce tedy pracuje jak se standardní formulí Solventnost II, tak s interním modelem. Oba výstupy jsou následně porovnány v kapitole 6.1.

3 DATA A POSTUP JEJICH ZPRACOVÁNÍ

V této kapitole je popsána metodika, podle které bylo v práci postupováno při modelování úmrtnosti a následném vyhodnocování výsledků. Práce cílí na popis možného principu řízení rizik spojených se správou portfolia klientů, kteří jsou příjemci důchodu na roční bázi. Postupy uvedené v této práci mohou být užitečné pro pojišťovny, penzijní fondy či jiné instituce zabývající se výplatou annuity (důchodu). *Anuita* značí podle [1] periodicky se opakující platbu určité osobě - anuitantovi. Příjemci důchodu jsou v práci označováni jako *anuitanté*. Portfólio klientů, příjemců důchodů, je v práci označováno jako *portfólio anuitantů*. Reálným příkladem může být penzijní připojištění či doplňkové penzijní spoření.

Portfólio klientů, tedy portfólio anuitantů, bylo v této práci náhodně vygenerováno. Práce však byla zpracována tak, že vstupní data lze nahradit daty reálnými a dojít tak k reálným výsledkům.

V práci bylo uvažováno portfólio 10.000 klientů, z nichž každý měl sjednanou individuální výši důchodu. Tato částka reprezentuje roční důchod tohoto klienta, který mu bude vyplácen každoročně po budoucí délku jeho života, kdy s úmrtím klienta zaniká právo čerpat důchod. Jedná se o zjednodušené schéma, kdy např. podle [1] existují schémata výrazně komplikovanější. Může se jednat např. o proměnlivou výši vypláceného důchodu v závislosti na růstu cenové hladiny, nebo o zahrnutí pozůstalých do smlouvy, kdy pozůstalí po úmrtí pojištěného i nadále pobírají určitou část důchodu.

Práce byla zpracována výhradně pomocí programovacího jazyka R. Jedná se o volně dostupný software určený zejména ke statistickým výpočtům a vizualizaci dat. [17] Práce částečně čerpala z předpřipravených skriptů, které jsou na internetu volně dostupné k publikaci [4] (viz Apendix H).

Tyto skripty byly přepracovány a rozšířeny. Konkrétně došlo například k vyšší automatizaci v některých krocích. Původní kód pracuje s fixně zadanými proměnnými, podle kterých se následně filtrují data, kalibrují modely, probíhá vizualizace výstupů atd. Ve skriptu, který byl vypracován jako součást této práce, byly proměnné navázány na konkrétní portfólio klientů. Na základě charakteristik portfolia klientů následně dochází k automatickému odhadu koeficientů stochastických modelů a jejich extrapolaci, vizualizaci, atd. Charakteristiky portfolia lze navíc snadno měnit dle potřeby uživatele. Skript pro

CBD model byl rozšířen o simulační část, která v původním kódu zcela chyběla. Navíc byla doprogramována část, která umožňuje intenzity úmrtností (tedy výstup stochastických modelů) transformovat do podoby úmrtnostních tabulek. Přidány byly i mnohé grafické výstupy. Došlo též k drobnému přepracování terminologie (resp. systému přidělování názvů proměnných), což přispělo k větší míře přehlednosti a snazší orientaci ve skriptech. Názvy příložených skriptů spolu s jejich stručným popisem lze vidět v Tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Legenda k příloženým skriptům

Název skriptu	Popis
LC.R	Kalibrace LC modelu
LC_for.R	Prognóza úmrtnosti na základě LC modelu
LC_sim.R	Simulace spojené s LC modelem
LC_LT.R	Tvorba úmrtnostních tabulek
CBD.R	Kalibrace CBD modelu
CBD_for.R	Prognóza úmrtnosti na základě CBD modelu
CBD_sim.R	Simulace spojené s CBD modelem
CBD_LT.R	Tvorba úmrtnostních tabulek
sample_data.R	Generování náhodného portfólia klientů

Zdroj: Vlastní zpracování

Ve všech vytvořených či přepracovaných skriptech byla dodržena následující logika ukládání proměnných. Stěžejní ukazatele byly charakteristiky q_x a l_x (viz kapitola 1.2), důchod (v této práci označován zkratkou *inc*) a diskontovaný důchod (*d.inc*). Všechny tyto charakteristiky byly ukládány do struktur *list* (details viz samotný postup v kapitolách 4, 5). Tyto *listy* jsou označovány velkými písmeny podle názvu proměnné, která je v nich uložena. Navíc disponují koncovkou podle užitého modelu. Tedy např. *list* obsahující matice pravděpodobností úmrtí q_x , které byly odhadnuty pomocí CBD modelu byl pojmenován **QXT.cbd**. V Tabulce 3.2 je uveden seznam nejdůležitějších proměnných spolu s jejich vysvětlivkami.

Tabulka 3.2: Legenda k proměnným ve skriptech

	název proměnné	vysvětlivka
LC model	QXT.lc	list obsahující individuální matice pravděpodobností úmrtí všech klientů portfólia, odhad pomocí LC modelu
	LXT.lc	list obsahující individuální posloupnosti l_x všech klientů portfólia, výpočet pomocí QXT.lc
	INC.lc	list obsahující individuální nediskontované důchody všech klientů portfólia, výpočet pomocí LXT.lc
	D.INC.lc	list obsahující individuální diskontované důchody všech klientů portfólia, výpočet pomocí úrokové míry
CBD model	QXT.cbd	list obsahující individuální matice pravděpodobností úmrtí všech klientů portfólia, odhad pomocí CBD modelu
	LXT.cbd	list obsahující individuální posloupnosti l_x všech klientů portfólia, výpočet pomocí QXT.cbd
	INC.cbd	list obsahující individuální nediskontované důchody všech klientů portfólia, výpočet pomocí LXT.cbd
	D.INC.cbd	list obsahující individuální diskontované důchody všech klientů portfólia, výpočet pomocí úrokové míry

Zdroj: Vlastní zpracování

V práci byl dodržen jednotný postup v těchto krocích:

1. kalibrace modelů,
2. extrapolace časových složek,
3. simulace časových složek,
4. odhad intenzit úmrtností,
5. vytvoření úmrtnostních tabulek,
6. vyhodnocení.

Nejprve proběhla v podkapitolách 4.1 a 5.1 kalibrace stochastických modelů na datech z databáze Human Mortality Database (viz kapitola 3.1). Pomocí kalibrovaných modelů se provedla v kapitolách 4.2 a 5.2 extrapolace. Extrapolované hodnoty sloužily jako podklad pro vytvoření BE (*Best Estimate*) odhadů úmrtnostních tabulek. Současně byly v rámci stochastických modelů v kapitolách 4.3 a 5.3 provedeny simulace, na základě kterých byly později vyjádřeny simulované úmrtnostní tabulky. Po vytvoření individuálních ÚT v kapitolách 4.5 a 5.5 proběhlo v kapitole 6 porovnání modelů. Na závěr byl v souladu

se Solventností II vyjádřen solventnostní kapitálový požadavek SCR spojený s daným portfoliem klientů.

Ze simulovaných ÚT byly následně vyjádřeny 99,5% kvantily v souladu se spolehlivostí regulace Solventnost II. Na základě BE odhadů i simulovaných hodnot byly vytvořeny individuální úmrtnostní tabulky klientů, na základě kterých byla určena kapitálová náročnost portfólia.

3.1 Zdroje použitých dat

Zdrojem dat pro kalibraci modelů byla databáze *Human Mortality Database*, dále jen HMD. Jedná se o bezplatně dostupnou databázi, která funguje již od roku 2000. Za jejím vznikem stojí *Department of Demography* při *University of California, Berkley (USA)* a *Max Planck Institute for Demographic Research (MPIDR)* v Německém Rostocku. Na dalším vývoji a zlepšování databáze má podíl mnoho dalších subjektů, např. francouzský *Institute for Demographic Studies (INED)*. [18]

Pro tuto práci byla využita data pro Českou republiku. Konkrétně data o počtech úmrtí (*deaths*) a o expozici vůči riziku (*exposure-to-risk*), resp centrální expozici k riziku. Data byla čerpána zvláště pro mužskou a ženskou populaci. Tato data nejsou k této publikaci přiložena, nicméně je možné je kdykoliv stáhnout ze zmiňovaného zdroje. V době psaní této práce byla dostupná data o úmrtí a expozicích vůči riziku pro Českou republiku pro roky 1950 - 2019. Pro potřeby modelů však nebylo prvních 10 let (tedy roky 1950-1959) uvažováno. V Tabulce 3.3 je ukázána podoba dat. Konkrétně se jedná o výběr z matice mužských počtů úmrtí pro Českou republiku. Řádky reprezentují věky, sloupce reprezentují kalendářní roky.

Tabulka 3.3: Počty úmrtí: Muži, Česká republika

	1960	1961	1962	...	2019
50	492	522	517	...	337
51	577	566	603	...	332
52	636	611	652	...	367
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	9	7	4	...	47

Zdroj: Vlastní zpracování podle dat z [18]

Analogicky vypadá matice dat expozičních vůči riziku. V Tabulce 3.4 je uveden náhled do matice mužských expozičních vůči riziku. Data jsou uvedena pro stejné roky a věky jako údaje o úmrtích v Tabulce 3.3.

Tabulka 3.4: Expozice vůči riziku: Muži, Česká republika

	1960	1961	1962	...	2019
50	69.558,63	68.616,17	67.182,83	...	71.040,51
51	68.635,58	68.949,22	67.990,01	...	68.614,46
52	66.796,99	67.965,53	68.283,16	...	68.848,81
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	13,26	9,72	6,60	...	95,5

Zdroj: Vlastní zpracování podle dat z [18]

Kromě dat z Human Mortality Database, na kterých budou v následujících kapitolách kalibrovány modely, bylo nutné mít k dispozici portfolio klientů pojišťovny. Pro účely této práce bylo portfolio náhodně vygenerováno. Konkrétně byly vygenerovány údaje o 10.000 klientech. Každému klientovi byly náhodně přiděleny charakteristiky

- rok narození,
- pohlaví,
- roční důchod.

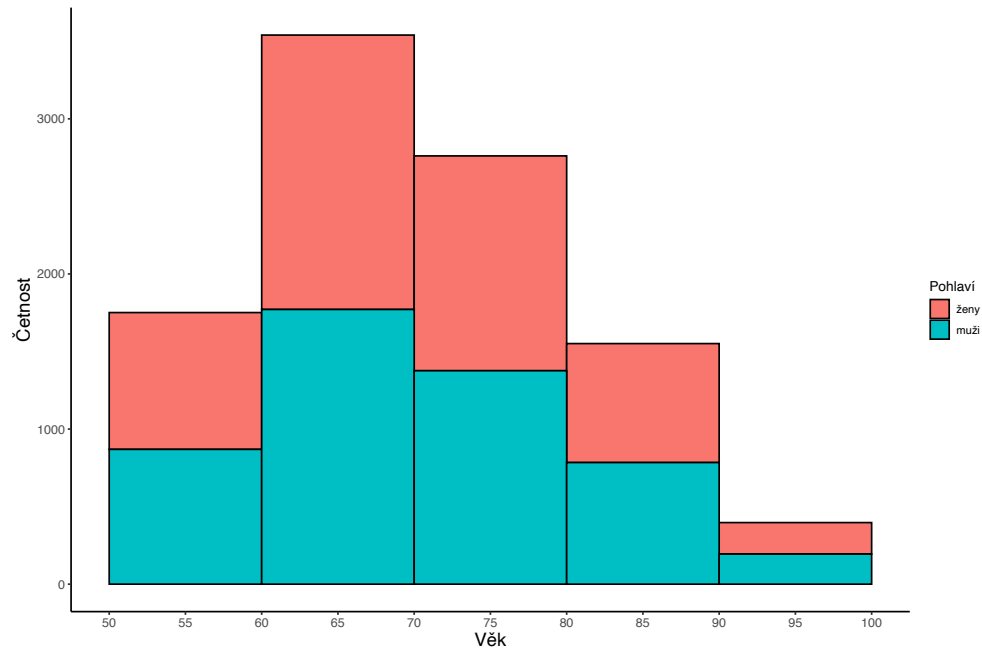
Data o 10.000 klientech byla vygenerována za použití vybraných pravděpodobnostních rozdělení. Podle preferencí uživatele lze rozložení věků či výší důchodů klientů měnit. Data byla uložena v matici s názvem **data**. Náhled do podoby dat, resp. do podoby matice **data** lze vidět v Tabulce 3.5.

Tabulka 3.5: Výběr z portfolia klientů

Klient číslo	Rok narození	Věk	Pohlaví	Roční důchod
1	1945	77	muž	43.723 Kč
2	1949	73	žena	34.896 Kč
3	1955	67	žena	38.017 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10.000	1957	65	muž	52.934 Kč

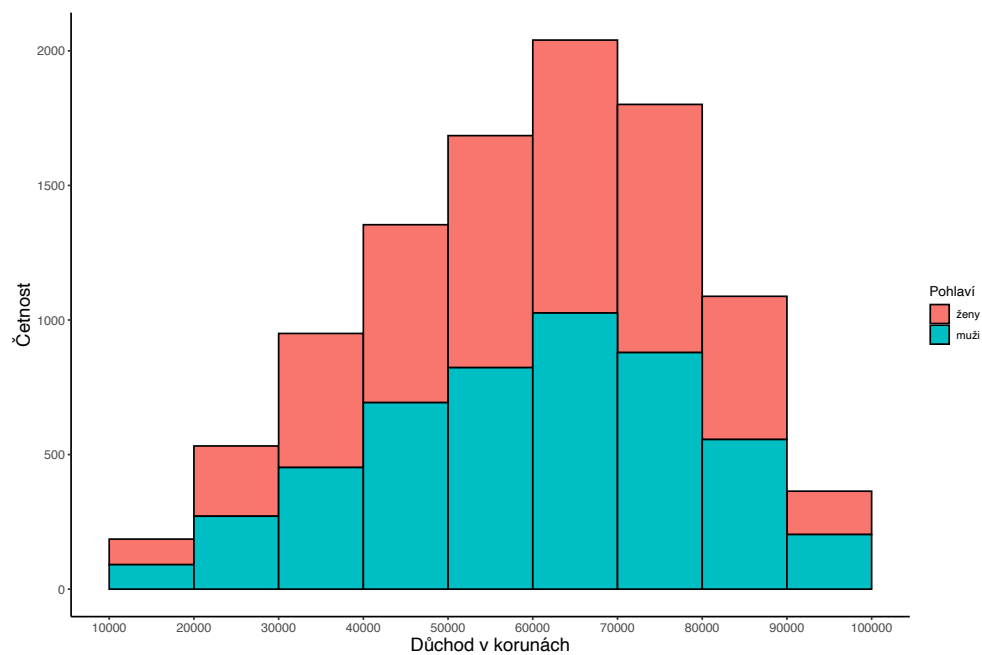
Zdroj: Vlastní zpracování

Názornou představu o portfoliu klientů lze získat pohledem na následující dva histogramy. Obrázek 3.1 znázorňuje rozdělení stáří osob v portfoliu. Obrázek 3.2 znázorňuje rozdělení ročního důchodu těchto osob.



Obrázek 3.1: Rozdělení stáří osob v portfoliu

Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 3.2: Rozdělení důchodů osob v portfoliu

Zdroj: Vlastní zpracování

Věk klientů byl generován s omezením. Protože se jedná o portfólio anuitantů, u kterých se předpokládá, že jsou zpravidla vyššího věku, byla spodní věková hranice stanovena na 50 let. Horní věková hranice potom byla stanovena na 99 let. Věková omezení jde jednoduše měnit uživatelem ve skriptu *sample_data.R*. Výše důchodu byla generována z intervalu $< 10.000, 100.000 >$, jak je patrné z Obrázku 3.2.

Níže jsou shrnuty základní charakteristiky portfólia anuitantů.

Počet klientů v portfóliu – 10.000 osob

Minimální věk klienta – 50 let

Maximální věk klienta – 99 let

Minimální roční důchod klienta – 10.000 Kč

Maximální roční důchod klienta – 100.000 Kč

4 APLIKACE LEE-CARTEROVA MODELU

Tato práce aplikuje stochastické modely úmrtnosti. Kalibruje tyto modely na reálných datech pro Českou republiku a používá je k prognóze pravděpodobností úmrtí v budoucnosti. Pomocí těchto dat dále kvantifikuje rizika spojená s úmrtností.

Prvním stochastickým modelem je Lee-Carter model (dále LC model). Podoba LC modelu je dle [4] vyjádřena vztahem

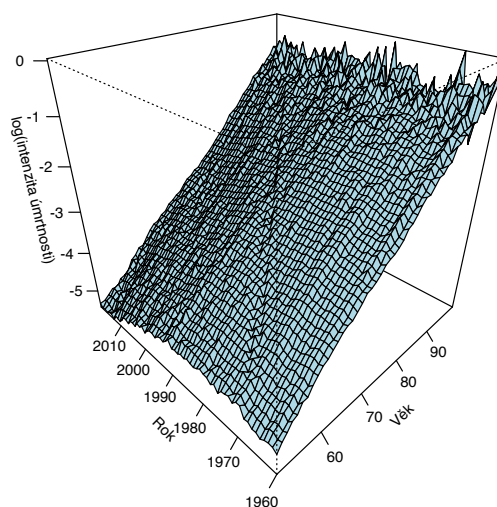
$$\log(\mu_{x+1/2,y+1/2}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_y. \quad (4.1)$$

Předmětem modelování je tedy logaritmus intenzity úmrtnosti osoby ve věku $x + 1/2$ v kalendářním roce $y + 1/2$. Tyto neceločíselné časové indikátory se vztahují k tzv. předpokladu konstantní intenzity úmrtnosti mezi celočíselnými věky. [4, 3] Tato problematika je popsána v kapitole 1.4. Z praktického hlediska bude nadále pracováno s prostou intenzitou úmrtnosti ve věku x a kalendářním roce y .

Ze vztahu 4.1 je zřejmé, že vektory parametrů α_x a β_x jsou závislé pouze na věku osoby (patrné z indexu x reprezentující věk). Naproti tomu vektor parametrů κ_y je závislý pouze na kalendářním roce a nikoli na věku osoby (patrné z indexu y reprezentující kalendářní rok).

Autoři modelu k odhadu parametrů modelu užíli metodu singulární dekompozice (*Singular value decomposition*). [19] Tato metoda nebyla k odhadu parametrů použita v této práci. Mnoho jiných autorů, např. [4, 20] užívají v aplikacích modelu jiné metody. Tato práce následuje metodu uvedenou v [4], kde odhad parametrů probíhá pomocí zobecněných nelineárních modelů. K tomu je v softwaru R implementována funkce *gnm()*. Podrobné technické detaily k odhadu parametrů modelu lze dohledat v [4]. Podobu konkrétních modelů užitých v této práci lze dohledat v příloženém skriptu *LC.R*.

Protože předmětem obou modelů (Lee-Carter i CBD) je logaritmus intenzity úmrtnosti, je vhodné vyjádřit si jako první logaritmus skutečných intenzit úmrtností z dat z HMD. Intenzita úmrtnosti pro jednotlivé věky i kalendářní roky se vyjádří pomocí vztahu 1.18, resp. jeho logaritmu. Na Obrázku 4.1 je možné vidět zobrazení vývoje intenzity úmrtnosti v České republice za roky 1960 - 2019 pro muže ve věku 50 - 99 let. Tyto údaje jsou důležité např. při vyhodnocování, zda model dobře vystihuje data (viz např. Obrázek 4.5).



Obrázek 4.1: Mužská intenzita úmrtnosti, Česká republika

Zdroj: Vlastní zpracování podle [4]

4.1 Odhad parametrů modelu

Prvním krokem je odhad parametrů modelu, tedy kalibrace modelu³. V případě LC modelu se jedná o vektory α_x , β_x a κ_y . Jak již bylo řečeno, odhad parametrů pro mužskou i ženskou populaci byl proveden pomocí zobecněných nelineárních modelů za pomoci funkce $gnm()$. Náhled do způsobu odhadu mužských parametrů lze vidět v úryvku skriptu níže. Parametry byly odhadnuty v souladu s omezujícími požadavky na model. Veškeré detaily lze dohledat v literatuře.

³Protože se jedná o odhad parametrů na základě reálných dat, parametry nejsou uváděny se stříškou.

```

LC.Male = gnm(Dth.V.m ~ -1 + Age.F + Mult(Age.F, Year.F),
              offset = log(Exp.V.m), family = poisson)

Alpha.gnm.m = LC.Male$coef[1:n.x]
#> first n.x coefs = alfas
Beta.gnm.m = LC.Male$coef[(n.x+1):(2*n.x)]
#> second n.x coefs = betas
Kappa.gnm.m = LC.Male$coef[(2*n.x+1):(2*n.x+n.y)]
#> third n.x coefs = kappas

# Convert to standard Lee-Carter parameters
Kappa.m.m = mean(Kappa.gnm.m) #assist variable
Beta.m.m = mean(Beta.gnm.m) #assist variable

Alpha.hat.m = Alpha.gnm.m + Kappa.m.m*Beta.gnm.m
#> final alpha hat
Beta.hat.m = Beta.gnm.m/(n.x * Beta.m.m)
#> final beta hat
Kappa.hat.m = n.x * Beta.m.m*(Kappa.gnm.m - Kappa.m.m)
#> final kappa hat

```

Všechny odhadnuté parametry byly v R uloženy do vektorů. Parametry α_x byly uloženy do vektorů s názvy **Alpha.hat.m** a **Alpha.hat.f** dle pohlaví, parametry β_x byly uloženy do vektorů s názvy **Beta.hat.m** a **Beta.hat.f** dle pohlaví a parametry κ_y byly uloženy do vektorů s názvy **Kappa.hat.m** a **Kappa.hat.f** dle pohlaví.

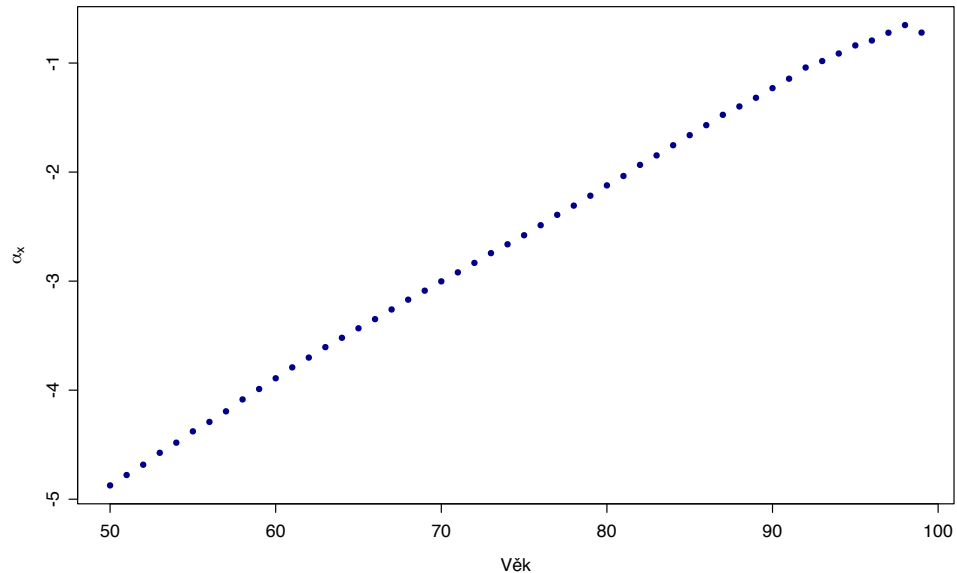
Náhled do vektorů α_x a β_x lze vidět v Tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Odhady koeficientů LC modelu

	α_x		β_x	
	muži	ženy	muži	ženy
50	-4,873	-5,678	0,024	0,022
51	-4,778	-5,578	0,024	0,021
52	-4,684	-5,503	0,023	0,022
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	-0,721	-0,760	-0,003	0,005

Zdroj: Vlastní zpracování

Odhad vektoru parametrů α_x pro mužská data můžeme vidět na Obrázku 4.2.

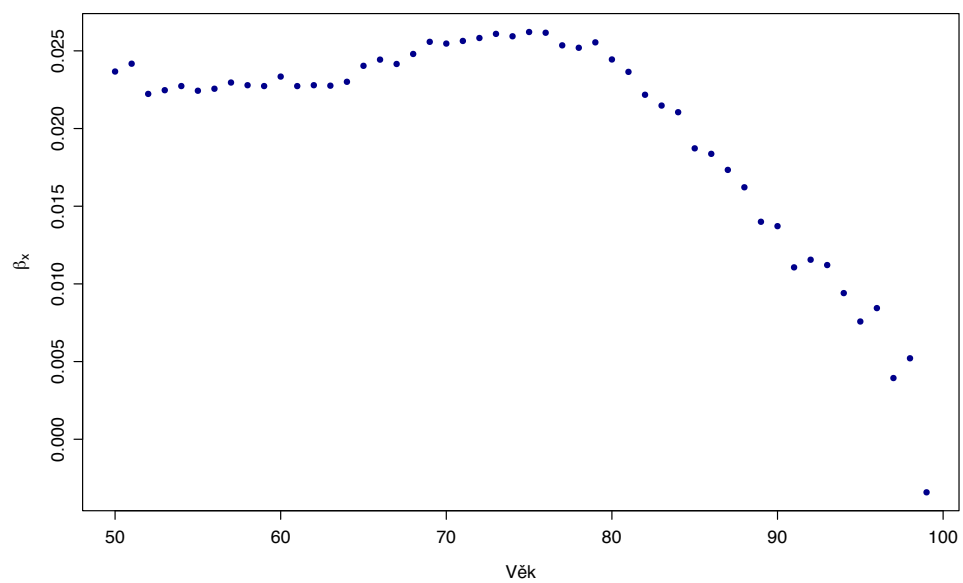


Obrázek 4.2: Odhad parametru α_x - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

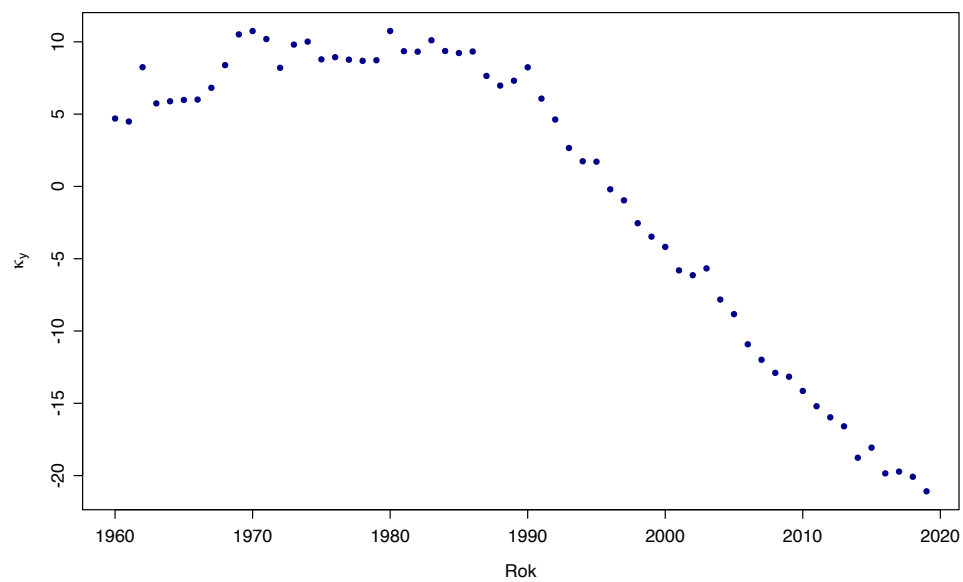
Tvar LC modelu (viz vztah 4.1) připomíná klasický regresní model. Parametr α_x by v takovém modelu reprezentoval absolutní člen. Tento člen reprezentuje průměrnou úmrtnost v daném věku skrze kalendářní roky.

Na Obrázku 4.3 můžeme vidět odhad parametrů β_x pro mužskou populaci.



Obrázek 4.3: Odhad parametru β_x - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



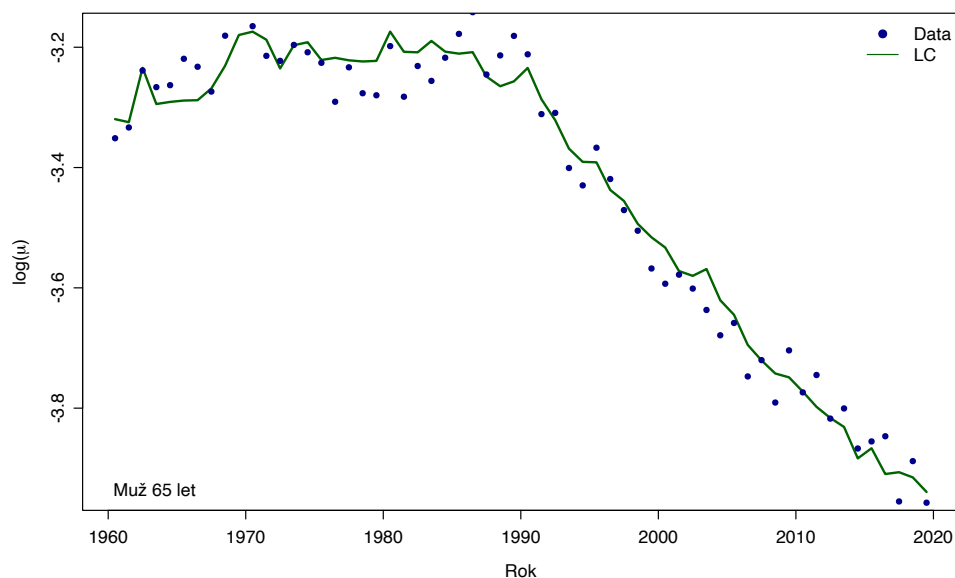
Obrázek 4.4: Odhad parametru κ_y - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

Parametr β_x v součinu s parametrem κ_y usměrňuje v modelu hodnotu logaritmu intenzity úmrtnosti. Klesající trend v tomto parametru naznačuje, že lidé nižšího věku se těší většího efektu rostoucí střední délky života, než lidé vyššího věku.

Poslední z parametrů LC modelu je parametr κ_y , jehož odhad pro mužskou populaci je na Obrázku 4.4. Klesající trend v parametru κ_y znázorňuje obecně klesající trend úmrtnosti.

Po odhadu všech parametrů modelu je možné zkonstruovat podle vztahu 4.1 odhadované intenzity úmrtnosti ex-post (tzv. *fitted values*), resp. jejich logaritmy a následně provést srovnání s hodnotami skutečně naměřenými (tzv. *observed values*). Grafické porovnání je pro vybranou osobu (muž, 65 let) zobrazeno na Obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Pozorované hodnoty vs LC model

Zdroj: Vlastní zpracování

Po rychlém vizuálním zhodnocení tohoto náhodně vybraného člověka se zdá, že model vystihuje data vhodně. K objektivnímu zhodnocení však slouží diagnostika modelu, které se věnuje kapitola 4.7

4.2 Extrapolace časové složky

Hlavním cílem těchto modelů je prognóza budoucích pravděpodobností úmrtí. Pro aktuárské potřeby je nutné vyjádřit z modelů charakteristiky $q_{x,y}$, pomocí nichž probíhá konstrukce úmrtnostních tabulek. Protože se lidská úmrtnost neustále mění a vyvíjí v čase, současně se mění a vyvíjí i úmrtnostní tabulky. Tento trend můžeme pozorovat například i u Českého statistického úřadu, který své úmrtnostní tabulky pravidelně aktualizuje. Pomocí stochastických modelů úmrtnosti je snaha zachytit její trend vývoje. Přesně k tomuto slouží tzv. dvojrozměrné modely úmrtnosti [4], kde prvním rozměrem se myslí věk a druhým rozměrem se myslí kalendářní roky, resp. čas.

Podstata prognózy budoucí úmrtnosti pomocí LC modelu spočívá v extrapolaci parametru závislého na času, tedy parametru κ_y . Ostatní parametry, které jsou závislé nikoli na čase, ale na věku, tedy parametry α_x a β_x nejsou předmětem extrapolace, ale zůstávají zafixovány. Parametr κ_y (viz Obrázek 4.4) je zde vnímán jako časová řada. K extrapolaci lze použít různých metod. V této práci byla použita metoda stejná, jakou použili autoři modelu ve své publikaci, tedy náhodná procházka s driftem. [19] Náhodná procházka je zvláštní případ autoregresního procesu řádu 1, tedy AR(1), kde autoregresní člen je roven jedné. Náhodná procházka je tvořena kumulováním náhodných veličin tvořících proces bílého šumu. [21]

Princip náhodné procházky s driftem je zobrazen ve vztahu

$$\kappa_y = \mu + \kappa_{y-1} + \epsilon_y. \quad (4.2)$$

Konstanta μ se označuje jako drift a složka ϵ_y reprezentuje náhodnou, nezávislou chybu s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Každá další hodnota časové řady je tedy generována střední hodnotou μ a náhodnou složkou ϵ . Pro odhad parametrů modelu náhodné procházky s driftem je třeba určit difference této časové řady

$$\begin{aligned} \Delta\kappa_y &= \kappa_y - \kappa_{y-1} \\ &= \mu + \kappa_{y-1} - \kappa_{y-1} + \epsilon_y \\ &= \mu + \epsilon_y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vektor $\Delta\kappa_y$ je soubor nezávislých složek s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Tento fakt bude využíván v části 4.3 při simulování budoucího vývoje parametru κ_y . Ze získaného výběru dat $\Delta\kappa_y$

nyní bude proveden odhad střední hodnoty a rozptylu. Odhad střední hodnoty se provede prostým aritmetickým průměrem z diferencí časové řady:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_2^{n_y} \Delta \kappa_y}{n_y - 1}, \quad (4.4)$$

kde n_y značí délku vektoru κ_y , resp. počet let, které vstupovaly do LC modelu v části 4.1. V tomto případě $n_y = 60$, protože do modelu vstupují roky 1960 – 2019 a délka tohoto vektoru je rovna 60, viz očistění dat v části 3.1.

Dále se provede odhad rozptylu souboru pomocí vztahu⁴

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_2^{n_y} (\Delta \kappa_y - \hat{\mu})^2}{n_y - 2}. \quad (4.5)$$

Odhad parametrů $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}^2$ byl proveden pomocí knihovny *astsa* s užitím funkce *sarima()*. Podle této funkce a podle [4] byl odhad parametru σ^2 dle vztahu 4.5 upraven na maximálně věrohodný tvar, který funkce *sarima()* používá. Princip této korekce je znázorněn ve vztahu

$$\hat{\sigma}_{MLE}^2 = \frac{n_y - 2}{n_y - 1} \times \hat{\sigma}^2, \quad (4.6)$$

kde n_y opět odpovídá délce vektoru uvažovaných let. V dalším textu se bude uvažovat pouze s maximálně věrohodným odhadem rozptylu $\hat{\sigma}_{MLE}^2$ a pro zjednodušení se tento odhad bude označovat jednoduše $\hat{\sigma}^2$.

Odhad směrodatné odchylky σ vyjadřuje vztah

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}. \quad (4.7)$$

Odhad parametrů $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ a $\hat{\sigma}$ pro muže a pro ženy je znázorněn v Tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: Odhady parametrů $\Delta \kappa_y$

	muži	ženy
$\hat{\mu}$	-0,437	-0,589
$\hat{\sigma}^2$	1,425	1,714
$\hat{\sigma}$	1,194	1,309

Zdroj: Vlastní výpočet

⁴Důvodem, proč se ve vztazích 4.4 a 4.5 kumulují diference od 2 do n_y je fakt, že se jedná o diference původní řady κ_y .

Při extrapolaci časové řady κ_y je nutné určit časový úsek. Tento časový úsek byl určen v závislosti na minimálním a maximálním věku klientů v portfoliu, viz sekce 3.1. Nejmladšímu klientovi v portfoliu je (resp. může být) 50 let. Klienti zároveň v portfoliu zůstávají až do 99 let, tedy minimální časový interval pro předpověď je 52 let (jsou započítány 3 roky navíc pro extrapolaci za roky 2020-2022, pro které nejsou k dispozici data). Ve skriptu, který je přiložený k této práci, byla extrapolace prodloužena o 10 let na 62 let.

Centrální předpověď časových řad κ_y (pro muže a pro ženy) spočívá v kumulování parametru $\hat{\mu}$ k poslední známé hodnotě vektoru κ_y . Každá následující hodnota je podle [4] vyjádřena vztahem

$$\hat{\kappa}_{n_y+1} = \hat{\mu} + \kappa_{n_y}. \quad (4.8)$$

Tímto způsobem je třeba vyjádřit centrální předpověď parametru κ_y zvlášť pro ženy a zvlášť pro muže.

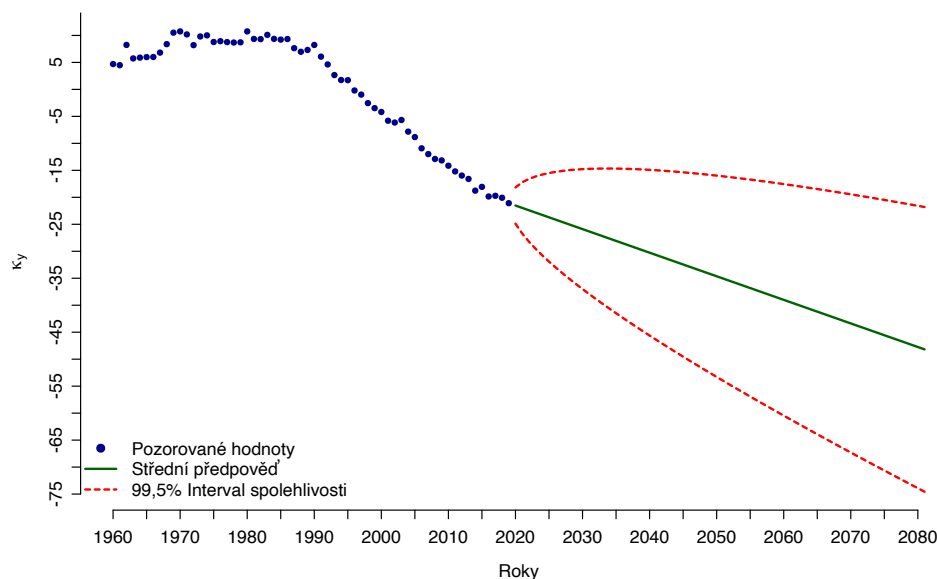
Následujícím krokem je určení intervalu spolehlivosti pro centrální předpověď. Pomocná proměnná q_m má tvar

$$q_m = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{m \times \sigma^2} \quad (4.9)$$

pro $m = \{1, 2, \dots, n_y\}$, kde n_y je počet prognózovaných let (v této práci $n_y = 62$) a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je příslušný kvantil normovaného normálního rozdělení dle zvolené hladiny významnosti α a σ je směrodatná odchylka dle vztahu 4.7. Tato práce uvažuje $\alpha = 0.005$, tedy $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,807$. Potom

$$IS_{\kappa_m} = \text{centrální předpověď}_m \pm q_m. \quad (4.10)$$

Na Obrázku 4.6 lze vidět centrální předpověď pro mužský parametr κ_y a 99,5% interval spolehlivosti.



Obrázek 4.6: Extrapolace parametru κ_y - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

Extrapolace parametrů κ_y pro muže a ženy byly v prostředí R uloženy do vektorů s názvy **Kappa.central.m**, **Kappa.central.f**, pro centrální předpověď **Kappa.Up.Stoch.m**, **Kappa.Up.Stoch.f**, pro horní hranici IS a **Kappa.Dn.Stoch.m**, **Kappa.Dn.Stoch.f** pro dolní hranici IS.

Dosazením centrální předpovědi parametru κ_y do vztahu 4.1 se získá nejlepší odhad logaritmů budoucích intenzit úmrtností (tzv. *Best Estimate*, BE), viz kapitola 4.4. Na základě BE pojišťovna vyjádří odhad budoucího vymírání klientů, z čehož vyčíslí potřebnou hodnotu rezerv. Snížení BE odhadu pravděpodobností úmrtí o 20% reprezentuje standardní formuli dle Solventnost II popsanou v kapitole 2.2. Alternativním způsobem postupu dle Solventnost II je interní model. Interní model v této práci byl pojat simulačně v následující kapitole.

4.3 Simulace časových složek

Společnost spravující portfolio anuitantů by měla být schopna simulovat budoucí vývoj vymírání svých klientů. Na základě těchto simulací je pak možné určovat scénáře, které s určitou pravděpodobností mají šanci nastat. Takové výpočty mohou být následně podkladem pro určování výše drženého kapitálu, a to v souladu se systémem regulace evropského pojišťovnictví Solventnost II. Obrovské výhody spojené se simulačním přístupem k problematice byly popsány dříve v části 2.2. V části 4.2 jsou určeny teoretické intervaly spolehlivosti pro budoucí vývoj časové složky. Tato část se bude věnovat simulovaným scénářům parametru κ_y .

Jako první je třeba stanovit počet simulací. Pro účely této práce bylo provedeno 1.000 simulací pro mužský parametr κ_y a 1.000 simulací pro ženský parametr κ_y . Skript, který je přiložený k této práci, je však připraven po lehké modifikaci provést libovolný počet simulací v závislosti na výpočetním výkonu.

Druhým krokem je vygenerování chtěného počtu hodnot z $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ rozdělení pravděpodobností⁵. K náhodnému generování byla využita funkce `rnorm()`. Protože je uvažováno 1.000 simulací na 62 let dopředu, je třeba vygenerovat 2 matice o rozměrech 1000×62 (zvláště pro muže a zvláště pro ženy). Každé z takto vygenerovaných čísel reprezentuje možnou diferenci řady κ_y . Náhodně vygenerované difference byly uloženy do matic s názvy **Mat.Sim.Stoch.m** a **Mat.Sim.Stoch.f** dle pohlaví. Náhled do matice **Mat.Sim.Stoch.m**, tedy do matice mužských diferencí, lze vidět v Tabulce 4.3.

Tabulka 4.3: Simulované hodnoty $\Delta\kappa_y$ - muži

	2020	2021	2022	...	2081
Simulace 1	1,82	-0,15	-3,00	...	-0,16
Simulace 2	0,19	0,66	2,15	...	-0,63
Simulace 3	-0,58	-1,72	-1,95	...	2,23
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Simulace 1.000	-0,17	-0,030	-1,37	...	0,09

Zdroj: Vlastní zpracování

⁵Odhady parametrů byly provedeny v minulých kapitolách.

Simulované diference je následně nutné nakumulovat k poslední odhadnuté hodnotě κ_y (v tomto případě k_{2019}), a to zvlášť pro muže a zvlášť pro ženy. Ve skriptu je k tomuto účelu využita kombinace funkcí *apply()* *cumsum()*. Pro pohodlnější manipulaci s daty byly matice **Mat.Stoch.Sim.m** a **Mat.Stoch.Sim.f** transponovány. Výsledné matice o rozměrech 62×1000 , ve kterých řádky reprezentují budoucí roky a sloupce reprezentují jednotlivé simulace, byly uloženy do nových matic s názvy **Stoc.m** a **Stoc.f** (dle pohlaví). V Tabulce 4.4 lze vidět náhled do matice **Stoc.m**, tedy do mužské matice.

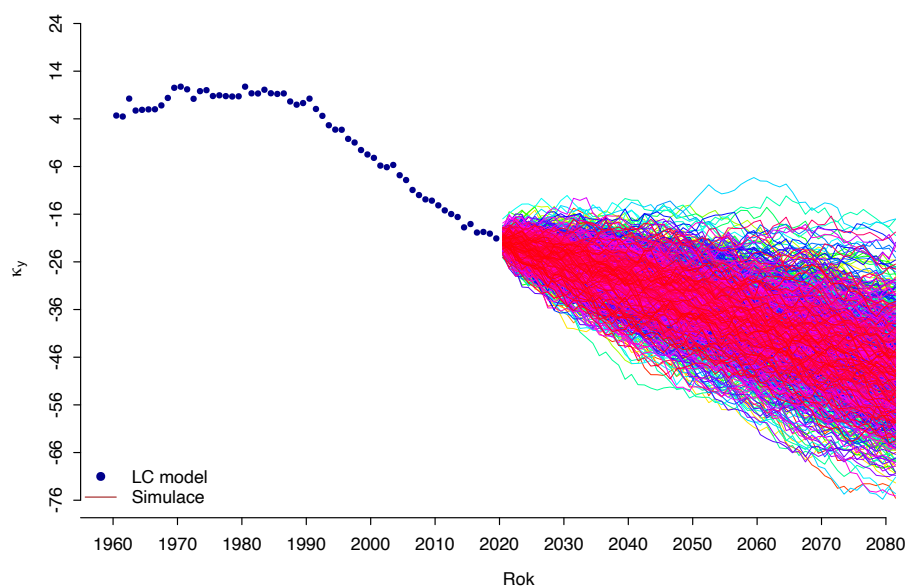
Tabulka 4.4: Simulace parametru κ_y - muži

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
2020	-22,27	-21,31	-22,52	...	-21.26
2021	-21,35	-20,41	-24,00	...	-21.29
2022	-22,85	-23,15	-22,50	...	-22.66
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2081	-54.81	-19.70	-44.53	...	-46.21

Zdroj: Vlastní zpracování

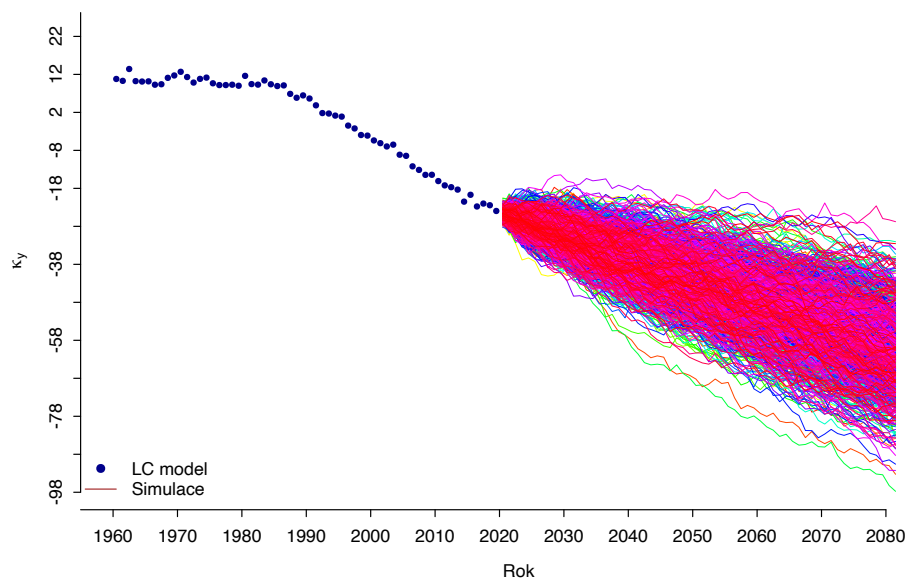
Protože v době psaní této práce byla z HMD dostupná data pouze do roku 2019, v simulacích je tento fakt zohledněn a prvním simulovaným rokem byl rok 2020, a to i přes to, že tento rok je minulostí, stejně jako rok 2021.

Výše uvedeným postupem získáme 1.000 vektorů možných scénářů vývoje parametru κ_y pro muže a 1.000 vektorů možných scénářů vývoje parametru κ_y pro ženy. Grafické zobrazení simulací pro muže lze vidět na Obrázku 4.7 a pro ženy na Obrázku 4.8.



Obrázek 4.7: Simulace vývoje parametru κ_y - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 4.8: Simulace vývoje parametru κ_y - ženy

Zdroj: Vlastní zpracování

Z jednotlivých simulací byly následně určeny 0,5% a 99,5% kvantily. Navíc byl vyjádřen odhad střední hodnoty pomocí aritmetického průměru. Určené kvantily byly uloženy

do nových matic s názvy **Stoc.Sim.Q.m** a **Stoc.Sim.Q.f** dle pohlaví. Řádky těchto matic reprezentují jednotlivé kvantily a sloupce těchto matic reprezentují kalendářní roky. Podoba kvantilové matice pro muže je znázorněna v Tabulce 4.5. Kvantilová matice pro ženy je k dispozici pro vygenerování pomocí přiloženého skriptu.

Tabulka 4.5: Simulované kvantily κ_y - muži

	2020	2021	2022	...	2081
99,5%	-18,60	-17,09	-16,78	...	-22,65
\bar{x}	-21,54	-21,99	-22,41	...	-48,43
0,05%	-24,62	-26,54	-28,27	...	-70,77

4.4 Odhad intenzit úmrtnosti

Odhad matice logaritmů intenzit úmrtností se provádí na základě vztahu 4.1. Metod, jak k této matici dojít, je však více. V kapitole 4.1 byly odhadnuty parametry α_x a β_x . V kapitolách 4.2 a 4.3 byly provedeny odhady parametru κ_y , a to teoreticky a simulačně.

V této práci byly matice logaritmů intenzit úmrtností vyjádřeny dvěma způsoby. Prvním způsobem byla konstrukce jedné matice logaritmů intenzit úmrtností pro každou jednu simulaci časové řady κ_y . Druhým způsobem bylo vytvoření matic logaritmů intenzit úmrtností na základě centrální (BE) předpovědi parametru κ_y . Jako první je popsán postup simulační, tedy vyjádření jedné matice logaritmů intenzit úmrtností pro každou jednu simulaci časové složky. Postup je vyjádřen vztahem

$$\log(m_{x,y})_n = \alpha_x + \beta_x \kappa_{y_n}, \quad (4.11)$$

kde $n = \{1, 2, \dots, 1000\}$ pro každé pohlaví zvlášť reprezentuje jednotlivé simulace, resp. scénáře vývoje časového parametru κ_y .

Při počtu 1.000 simulací vznikne celkem 2.000 matic $\log(\mathbf{m}_{x,y})_n$, a to 1.000 pro muže a 1.000 pro ženy. Tyto matice byly odhadnuty pomocí cyklu *for()* a uloženy ve dvou datových strukturách *array*, nesoucí názvy **mxt.m** pro muže a **mxt.f** pro ženy. V každé úrovni těchto *arrays* je uložena jedna matice $\log(m_{x,y})$. Každá *array* má 1.000 úrovní. Náhled do jedné z 1.000 matic logaritmů intenzit úmrtností pro muže je zobrazen v Tabulce 4.6.

Tabulka 4.6: Logaritmy intenzit úmrtností - muži

	2020	2021	2022	...	2081
50	-5,42	-5,42	-5,41	...	-6,30
51	-5,34	-5,34	-5,33	...	-6,23
52	-5,20	-5,20	-5,19	...	-6,02
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	-0.64	-0.64	-0.64	...	-0.52

Zdroj: Vlastní výpočet

Např. první sloupec Tabulky 4.6 reprezentuje logaritmy měr úmrtností mužů v roce 2020 napříč všemi uvažovanými věkovými kategoriemi v portfoliu klientů, tedy v rozmezí 50 - 99 let. Jedná se však pouze o jednu z 1.000 variant.

Druhý zmiňovaný způsob spočívá v dosazení BE extrapolace parametru κ_y do vztahu 4.1. Výstupem jsou pouhé dvě matice logaritmů intenzit úmrtností, a to jedna pro muže a druhá pro ženy. Tyto matice byly v příloženém skriptu nazvány **BE.mx.m** a **BE.mx.f** dle pohlaví.

4.5 Vytvoření úmrtnostních tabulek

Hodnoty $\log(m_{x,y})$ samy o sobě nejsou příliš vypovídající a je tedy nutné je převést na tabulkové hodnoty $q_{x,y}$, tedy pravděpodobnosti úmrtí x -leté osoby v kalendářním roce y .

V prvním kroku se provede odlogaritmování. Pro následnou transformaci intenzit úmrtností ($m_{x,y}$) na pravděpodobnosti úmrtí ($q_{x,t}$) byl použit transformační vztah

$$q_{x,y} = 1 - e^{-m_{x,y}}. \quad (4.12)$$

Tento transformační vztah se používá ve své jednorozměrné modifikaci např. v [20]. Napříč literaturou lze nalézt i jiné transformační vztahy, např. v [7]. Transformační vztah byl aplikován na všechny matice získané v kapitole 4.4. Jedná se o 1.000 simulovaných matic pro muže a 1.000 simulovaných matic pro ženy, jednu BE matici pro muže a jednu BE matici pro ženy. Tím se získaly matice odhadů pravděpodobností úmrtí (tedy matice $\mathbf{q}_{x,y}$). Pro lepší orientaci ve vzniklých maticích budou BE matice (tedy 2 matice: jedna pro muže a jedna pro ženy) označovány $\mathbf{q}_{BE_{x,y}}$ a zbytek matic (tedy 2.000 matic, které

vznikly na základě simulací) budou označovány jednoduše jako $\mathbf{q}_{x,y}$. Náhled do jedné z 1.000 simulovaných matic $\mathbf{q}_{x,y}$ pro muže je zobrazen v Tabulce 4.7.

Tabulka 4.7: Pravděpodobnosti úmrtí $q_{x,y}$ - muži

	2020	2021	2022	...	2081
50	0,0044	0,0044	0,0045	...	0,0018
51	0,0048	0,0048	0,00498	...	0,0020
52	0,0055	0,0055	0,0056	...	0,0024
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	1	1	...	1

Zdroj: Vlastní výpočet

Tabulka 4.7 reprezentuje pouze jednu z 1.000 matic $\mathbf{q}_{x,y}$, které byly pro muže odhadnuty. Pravděpodobnost úmrtí ve věku 99 let byla pro obě pohlaví a napříč všemi maticemi uměle stanovena na

$$q_{99,y} = 1, \quad (4.13)$$

což koresponduje s maximálním věkem osob v portfoliu popsáním v kapitole 3.1. Ve věku 99 let klienti vystupují z portfolia.

Přirozeně se mohou klienti dožívat i vyšších věků. Výstup z portfolia tedy nemusí nutně znamenat jejich úmrtí. Při modelování úmrtnosti se pro velmi nízké a velmi vysoké věky (hranice se liší a je předmětem individuálního posouzení) užívají jiné metody, které se spojují dohromady. Přeživší klient by tedy vystoupil z tohoto portfolia, ale okamžitě by se objevil v portfoliu jiném.

Všech 2.002 matic vzniklých na základě simulací bylo třeba nějakým způsobem uložit. Protože mají všechny tyto matice $\mathbf{q}_{x,y}$ stejné rozměry (50 řádků reprezentujících věky a 62 sloupců reprezentujících kalendářní roky), jako matice logaritmů měr úmrtností v kapitole 4.4, byla opět zvolena struktura *array*. Matice mužských pravděpodobností úmrtí byly uloženy do *array* s názvem **qxt.m** a matice ženských pravděpodobností úmrtí byly uloženy do *array* s názvem **qxt.f**. BE matice \mathbf{q}_{BE_m} a \mathbf{q}_{BE_f} byly uloženy jako matice pod názvy **BE.qxt.m** a **BE.qxt.f** dle pohlaví.

Zajímavé je porovnat mezi sebou vývoj pravděpodobností úmrtí napříč kalendářními roky. Již z Tabulky 4.7 je vidět velký rozdíl mezi hodnotami q_{2020} a q_{2081} . Stejný trend lze

pozorovat i u ženských pravděpodobností úmrtí. Tabulka 4.8 poskytuje výraznější náhled do tohoto trendu.

Tabulka 4.8: Srovnání $q_{x,y}$ v letech - ženy

	2020	...	2050	...	2080	...
50	0,0019	...	0.0009	...	0.0004	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
70	0,0127	...	0,0056	...	0,0022	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
90	0.1614	...	0.1110	...	0.0722	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
99	1	...	1	...	1	...

Zdroj: Vlastní výpočet

Z Tabulky 4.8 je patrná existence dvou vývojových trendů. Prvním trendem je trend vertikální, znázorňující rostoucí pravděpodobnost úmrtí s rostoucím věkem. Tento trend je dán vyšší tendencí k úmrtí ve vyšších věcích. Druhým trendem je trend horizontální. Záměrně jsou v tabulce uvedeny kalendářní roky 2020, 2050 a 2080. Při srovnání vývoje hodnot $q_{x,y}$ napříč těmito kalendářními roky byl ve všech zobrazených věkových kategoriích zaznamenán pozitivní vývoj ve smyslu klesajících pravděpodobností úmrtí. Nabízí se též zajímavé srovnání mezi Tabulkami 4.7 a 4.8, z nichž je jasně vidět, že ve stejných věkových kategoriích mají muži výrazně vyšší pravděpodobnosti úmrtí než ženy. Tento trend přetrvává i v úmrtnostních prognózách.

Po odhadnutí samotných pravděpodobností úmrtí mužů a žen v jednotlivých letech následuje nutnost vygenerovat individuální úmrtnostní tabulky všem klientům portfólia. Každému klientovi je třeba přiřadit na základě jeho věku a pohlaví jeho „individuální“ charakteristiky $q_{x,y}$, na základě kterých se následně dopočítají charakteristiky $l_{x,y}$.

Pro lepší orientaci v následujícím textu byl princip přiřazování individuálních charakteristik klientům rozdělen do dvou částí. První část se věnuje přiřazování individuálních veličin $q_{x,y}$ a následnému generování individuálních úmrtnostních tabulek ze simulovaných dat. Druhá část se věnuje přiřazování individuálních veličin $q_{x,y}$ a následnému generování individuálních úmrtnostních tabulek z BE odhadů. Postup je v obou případech stejný, liší se pouze v objemu zpracovávaných dat.

- **Simulovaná data**

Jako první je popsán postup přiřazení individuálních pravděpodobností úmrtí z matic $\mathbf{q}_{x,y}$, tedy z matic, které vznikly na základě simulací.

Jak je vidět z Tabulky 4.7, k získání individuální posloupnosti pravděpodobností úmrtí (např.) 50-letého muže je třeba jako první vzít hodnotu v 1. řádku (věk 50) a 3. sloupci (rok 2022). Tato hodnota tedy odpovídá pravděpodobnosti, že se muž, kterému je v roce 2022 50 let, nedožije věku 51 let. Příští rok (tedy v roce 2023) tomuto muži bude však 51 let. Z matice by tedy byla extrahována hodnota ze 2. řádku (věk 51) a 4. sloupce (rok 2023). Postup by byl dále analogický až do věku 99, ve kterém byla uměle pravděpodobnost úmrtí nastavena rovna jedné dle vztahu 4.13. Protože pro muže existuje 1.000 matic pravděpodobností úmrtí $\mathbf{q}_{x,y}$, uvedený postup extrakce individuálních pravděpodobností úmrtí je nutné opakovat tisíckrát. Pro každého člena portfolia je tak evidováno 1.000 individuálních posloupností pravděpodobností úmrtí $\mathbf{q}_{x,y}$. Takto získaných tisíc „individuálních diagonál“ bylo převedeno do podoby sloupcových vektorů, ze kterých byly vytvořeny individuální matice \mathbf{q}_{x,y_i} , kde index $i = \{1, 2, \dots, 10.000\}$ značí i -tého klienta z celkového počtu 10.000 klientů, index x značí věk i -tého klienta a index y značí kalendářní rok, ve kterém je i -tému klientovi právě x let. Náhled do individuální matice pravděpodobností úmrtí \mathbf{q}_{x,y_i} náhodného klienta, 77-letého muže, je zobrazen v Tabulce 4.9.

Tabulka 4.9: Matice \mathbf{q}_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	0,051	0,052	0,050	...	0,051
78	0,056	0,058	0,053	...	0,054
79	0,059	0,059	0,060	...	0,056
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	1	1	...	1

Zdroj: Vlastní zpracování

V Tabulce 4.9 je uveden výběr z individuální matice pravděpodobností úmrtí 77-letého muže. Každá individuální matice pravděpodobností úmrtí má 1.000 sloupců (podle počtu simulací) a n řádků, v závislosti na věku konkrétního klienta. Pro každého klienta byla vygenerována obdobná matice, celkově bylo tedy vygenerováno 10.000 obdobných matic. Opět vyvstává otázka, jak tato data uchovávat. Protože každá individuální matice má

jiný počet řádků v závislosti na věku klienta, datová struktura *array* se nezdála být vhodným řešením. Zvolena byla struktura *list*, konkrétně vznikl list s názvem **QXT.lc** (viz Tabulka 3.2).

Snahou v této práci bylo postupovat jasně a přehledně tak, aby výsledný velký objem dat byl uložen přehledně a aby operace s takovými daty byla uživatelsky příjemná. Proto se mohou čtenáři zdát popsané kroky až příliš složité a možná neefektivní. Z podstaty věci je patrné, že v souboru klientů existují duplicity vzhledem k věku a pohlaví. V souboru o 10.000 klientech, věkově mezi 50 a 99 lety se s jistotou naleznou lidé, kteří jsou zároveň stejně staří a jsou stejného pohlaví. Takoví lidé mají logicky stejné individuální matice \mathbf{q}_{x,y_i} . Protože však s vysokou pravděpodobností neexistují duplicity vzhledem k věku, pohlaví a výši důchodu zároveň, je vhodné vzhledem k dalšímu postupu uložit data přehledně do listů „per-klient“ a tvářit se, že každý klient je unikátní.

Dalším krokem (po získání individuálních matic pravděpodobností úmrtí) je konstrukce individuálních posloupností \mathbf{l}_{x,y_i} . Jak bylo popsáno v kapitole 3, u každého klienta je uvažován radix $l_{x,y} = 1$. V roce 2022 tedy každý klient začíná s kořenem $l_{x,2022} = 1$. V průběhu let se násobí tato veličina pravděpodobností, že daná osoba se dožije následujícího roku, tedy veličinou $p_{x,y}$. Protože pro každého klienta existuje 1.000 posloupností $q_{x,y}$, resp $p_{x,y}$, výstupem bude 1.000 individuálních posloupností $\mathbf{l}_{x,y}$. Vzniknou tak matice individuálních posloupností \mathbf{l}_{x,y_i} , kde index $i = \{1, 2, \dots, 10.000\}$ značí i – tého klienta z celkového počtu 10.000 klientů, index x značí věk klienta a index y značí kalendářní rok, ve kterém je klientovi právě x let. Podoba těchto posloupností je znázorněna v Tabulce 4.10.

Tabulka 4.10: Matice \mathbf{l}_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	1,000	1,000	1,000	...	1,000
78	0,949	0,948	0,950	...	0,949
79	0,896	0,893	0,899	...	0,898
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	0,021	0,015	0,017	...	0,020

Zdroj: Vlastní zpracování

V Tabulce 4.10 je znázorněna matice \mathbf{l}_{x,y_i} stejného člověka, jako v Tabulce 4.9, tedy 77-letého muže. Tyto 2 tabulky spolu korespondují. Pro každého klienta tak vznikla matice

o n řádcích (v závislosti na klientově věku) a 1.000 sloupcích (podle počtu simulací). Ve věku klienta 99 let, tedy v posledním uvažovaném věku klienta před výstupem z portfólia, je možné si všimnout poměrně zásadních rozdílů v hodnotách $l_{99,y}$. Tyto rozdíly hrají zásadní roli při velkém počtu klientů. Aby byl zachován systém ukládání dat jako v případě individuálních matic q_{x,y_i} , byl za tímto účelem vytvořen *list* nesoucí název **LXT.lc** (viz Tabulka 3.2), v jehož každé úrovni byla uložena jedna individuální matice klienta. Aktuálně existují tedy 2 *listy*, a to **QXT.lc** a **LXT.lc** (viz Tabulka 3.2), které obsahují ve svých stejných úrovních data o stejných klientech. Tedy například 1. úroveň listu **QXT.lc** obsahuje individuální matici q_{x,y_1} prvního klienta z portfólia a stejně tak 1. úroveň listu **LXT.lc** obsahuje individuální matici l_{x,y_1} prvního klienta z portfólia.

V následujícím kroku je třeba jednotlivým klientům přiřadit jejich důchod. Každý klient má vygenerován svůj roční důchod (viz kapitola 3.1). Tato absolutní výše důchodu i -tého klienta bude normována pomocí individuálních matic l_{x,y_i} pomocí vztahu

$$inc_{(x,y)_i} = inc_{(x,y_0)_i} \times l_{(x,y)_i}, \quad (4.14)$$

kde index $i = \{1, 2, \dots, 10.000\}$ značí i – *tého* klienta z celkového počtu 10.000 klientů, x značí věk klienta, y značí kalendářní rok a y_0 značí první uvažovaný kalendářní rok, ve kterém klientovi náleží plná výše důchodu (kterou má sjednanou ve smlouvě). Výstupem užití vzorce 4.14 je 10.000 individuálních důchodových matic inc_{x,y_i} . V Tabulce 4.11 je znázorněna struktura důchodových matic, resp. struktura matice pro vybraného klienta, 77-letého muže. Hodnoty jsou zaokrouhleny na celá čísla.

Tabulka 4.11: Matice inc_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	43.723 Kč	43.723 Kč	43.723 Kč	...	43.723 Kč
78	41.508 Kč	41.454 Kč	41.521 Kč	...	41.512 Kč
79	39.195 Kč	39.060 Kč	39.324 Kč	...	39.271 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	900 Kč	677 Kč	727 Kč	...	878 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

V prvním roce se klientovi vyplácí důchod v plné výši nehledě na simulace. Různé simulované scénáře se tedy projevují až od druhého roku, kdy jsou klienti v portfóliu.

Pro každého klienta byla vygenerována individuální matice inc_{x,y_i} , mající n řádků (v závislosti na klientově věku) a 1.000 sloupců (podle počtu simulací). Protože byla data doposud přehledně ukládána v *listech* (**QXT.lc** a **LXT.lc**, viz Tabulka 3.2), bude i nadále zachováván tento princip ukládání. Vytvoří se *list* s názvem **INC.lc**, ve kterém budou uloženy informace o výši vypláčeného důchodu všech klientů. Tento list (stejně jako listy **QXT.lc** a **LXT.lc**) bude mít 10.000 úrovní (podle počtu klientů v portfoliu), kdy jednotlivé úrovně odpovídají shodným klientům napříč všemi listy.

Posledním krokem je vytvoření matic diskontovaných důchodů. Tyto matice bude sloužit jako podklad pro výpočet čisté současné hodnoty budoucích peněžních toků (*net present value*, NPV). K tomu bude využit vztah (upraven dle [22]):

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+j)^t}, \quad (4.15)$$

ze kterého lze odvodit

$$disCF_{t_i} = \frac{CF_{t_i}}{(1+j)^t}. \quad (4.16)$$

Potom

$$NPV_i = \sum_{t=1}^n disCF_{t_i}, \quad (4.17)$$

kde NPV značí čistou současnou hodnotu budoucích peněžních toků, CF_t značí peněžní tok v roce (čase) t , j značí úrokovou míru (viz dále), $disCF_{t_i}$ reprezentuje diskontovaný budoucí peněžní tok i – *tého* klienta v roce t , CF_{t_i} reprezentuje nediskontovaný peněžní tok i -tého klienta v roce t a NPV_i reprezentuje čistou současnou hodnotu všech budoucích peněžních toků i – *tého* klienta.

Budoucí peněžní toky reprezentují budoucí důchody, které musí pojišťovna vyplácet svým klientům. Úroková míra značí dle [22] roční úrokovou míru platnou pro uvažovaný systém peněžních toků. Jedná se o úrok, kterým je pojišťovna schopna bezrizikově zhodnocovat své finanční prostředky. Tato práce uvažuje úrokovou míru **2%**.

Výše uvedený způsob diskontování je oproti praxi značně zjednodušený, neboť pracuje s fixně stanovenou úrokovou mírou. Reálně je úroková míra proměnlivá. K určování vývoje úrokových měr se tak využívají stochastické generátory úrokových scénářů. Pro jednoduchost a zejména pak pro porovnatelnost jednotlivých přístupů uvažovaných v této práci byl však volen zjednodušený způsob diskontování.

Údaje o budoucích individuálních peněžních tocích jednotlivých klientů (CF_{t_i}) jsou uloženy v listu **INC.lc** (viz Tabulka 4.11). Vyjádříme hodnoty $disCF_{t_i}$ ze vztahu 4.16. Takto vznikne 10.000 matic individuálních diskontovaných důchodů $d.inc_{x,y_i}$ pro každého klienta z celkového počtu 10.000 klientů. Tyto matice jsou následně uloženy do nového listu **D.INC.lc**. Náhled do listu **D.INC.lc**, resp. do jedné z 10.000 matic $d.inc_{x,y_i}$ je zobrazen v Tabulce 4.12. Hodnoty jsou zaokrouhleny na celá čísla.

Tabulka 4.12: Matice $d.inc_{x,y_i}$ náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	43.723 Kč	43.723 Kč	43.723 Kč	...	43.723 Kč
78	40.694 Kč	40.641 Kč	40.707 Kč	...	40.698 Kč
79	37.644 Kč	37.543 Kč	37.798 Kč	...	37.746 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	582 Kč	438 Kč	470 Kč	...	568 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

Ze vzorce 4.15 a při srovnání Tabulky 4.12 s Tabulkou 4.11 je zřejmé, že v prvním roce je diskontovaný i nediskontovaný důchod shodný. Od druhého roku se potom začíná projevovat jak vymírání členů portfólia, tak samotné diskontování.

- **BE matice**

Postup přiřazení individuálních charakteristik q_{x,y_i} , l_{x,y_i} , inc_{x,y_i} a $d.inc_{x,y_i}$ klientům na základě BE matic pravděpodobností úmrtí **BE.qxt.m** a **BE.qxt.f** je obdobný jako v případě simulovaných dat. Protože zde však figurují pouze 2 matice (místo 2.000 matic v případě simulací), je postup značně jednodušší.

Na základě podmínky, zda je klient muž nebo žena, je mu přiřazena patřičná individuální posloupnost q_{x,y_i} . Protože však existuje pouze jedna BE matice pro muže a jedna BE matice pro ženy, výstupem bude pro každého klienta pouze jeden individuální vektor hodnot q_{x,y_i} . Z tohoto vektoru se naprosto stejným způsobem jako v případě simulovaných dat vyjádří individuální vektory l_{x,y_i} , inc_{x,y_i} a $d.inc_{x,y_i}$. Aby byla zachována struktura ukládání dat, byly tyto vektory opět uloženy v listech s názvy **QXT.BE.lc**, **LXT.BE.lc**, **INC.BE.lc** a **D.INC.BE.lc**. V i -tých úrovních jednotlivých listů jsou potom uloženy informace o i -tém klientovi z portfólia.

4.6 Vyhodnocení modelu

Předchozí kapitola se věnovala přiřazování individuálních charakteristik klientům portfolia. Interpretace výsledků obdrženyých na základě BE odhadů matic pravděpodobností úmrtí jsou intuitivní. Každý klient má přiřazený BE odhad budoucího vývoje. V tabulce 4.13 lze nahlédnout do veličin přiřazených i -tému klientovi, 77-letému muži, resp. do i -tých úrovní listů **QXT.BE.lc**, **LXT.BE.lc**, **INC.BE.lc** a **D.INC.BE.lc**.

Tabulka 4.13: Individuální veličiny i -tého klienta na základě BE LC odhadů $q_{x,y}$

	q_{x,y_i}	l_{x,y_i}	inc_{x,y_i}	$d.inc_{x,y_i}$
77	0,052	1,000	43.723 Kč	43.723 Kč
78	0,056	0,948	41.467 Kč	40.653 Kč
79	0,060	0,896	39.161 Kč	37.640 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	0,015	668 Kč	432 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

První sloupec obsahuje klientovu individuální posloupnost q_{x,y_i} , druhý sloupec obsahuje klientovu individuální posloupnost l_{x,y_i} , třetí sloupec obsahuje klientovu individuální posloupnost inc_{x,y_i} a čtvrtý sloupec obsahuje klientovu individuální posloupnost $d.inc_{x,y_i}$. Všechny tyto charakteristiky byly vyjádřeny na základě BE odhadů matic pravděpodobností úmrtí $q_{BE_{x,y}}$.

Dosavadní výsledky získané na základě simulovaných dat je naopak v tuto chvíli těžké interpretovat. Jedná se o poměrně velké množství dat, které je třeba nějakým způsobem zpracovat. Aktuálně pojišťovna disponuje odhadem 1.000 scénářů možného vývoje posloupností $q_{x,y}$ pro každého z 10.000 klientů portfolia. Zpracování těchto dat bylo provedeno stejně jako v sekci 4.3 pomocí kvantilů. Nyní však je možné určit kvantily nejen ze simulované časové řady κ_y , ale i z posloupností $q_{x,y}$, $l_{x,y}$, $inc_{x,y}$ a $d.inc_{x,y}$. Využívané kvantily budou stejné jako předchozí sekci, a to 0,5% a 99,5%. Jako odhad střední hodnoty bude opět použit aritmetický průměr. Tato hodnota bude označována jako střední odhad na základě provedených simulací. Protože mají data ve všech maticích stejnou strukturu, stačí jednoduše aplikovat funkci $quantile()$ v kombinaci s funkcí $mean()$ na jednotlivé matice uložené v listech **QXT.lc**, **LXT.lc**, **INC.lc** a **D.INC.lc**. Výpočet kvantilů je

nutné provést zvlášť pro všech 10.000 klientů v portfoliu. Pro každého klienta budou tedy k dispozici jeho individuální kvantily.

Kvantilové matice byly uloženy do *listů* s odpovídajícími názvy **QXT.lc.Q**, **LXT.lc.Q**, **INC.lc.Q** a **D.INC.lc.Q**. Struktura všech těchto listů je stejná. i -tá úroveň všech doposud vytvořených listů obsahuje matici s informacemi o i -tém klientovi z portfolia. Protože je struktura všech matic obsažených ve výše zmíněných listech shodná, je pro ukázkou uvedena pouze část matice kvantilů individuálních pravděpodobností úmrtí vybraného klienta, 77-letého muže. Tento náhled lze vidět v Tabulce 4.14.

Tabulka 4.14: Náhled na kvantily individuálních pravděpodobností úmrtí i -tého klienta, LC

	77	78	79	...	99
99,5%	0,056	0,063	0,069	...	1
\bar{x}	0,052	0,056	0,060	...	1
0,5%	0,048	0,050	0,052	...	1

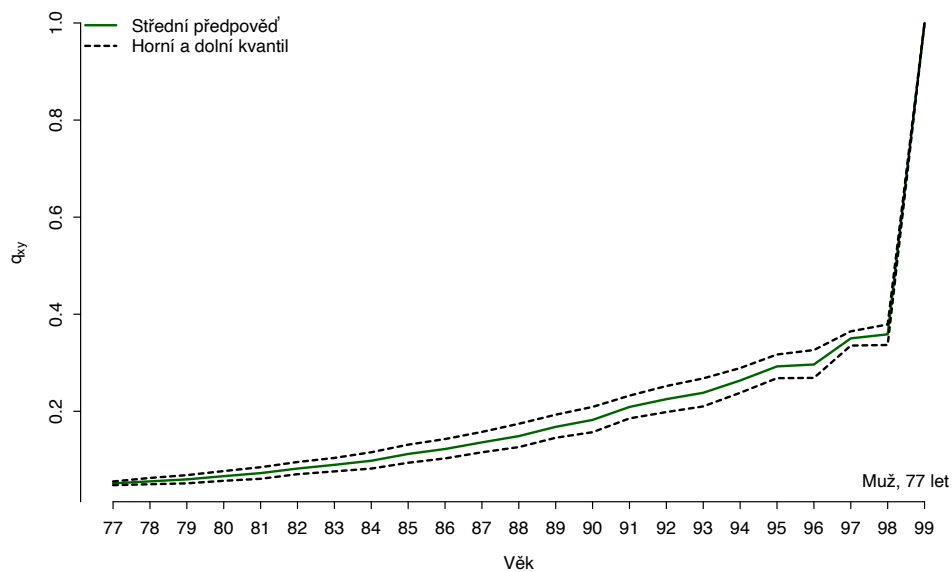
Zdroj: Vlastní zpracování

Horní kvantil v tabulce 4.14 reprezentuje riziko úmrtnosti. Nižší kvantil v tabulce 4.14 reprezentuje riziko dlouhověkosti (*longevity risk*). Riziko úmrtnosti není z hlediska Solventnosti II důležité ve smyslu zvyšování nároků na držený kapitál. V práci je tento kvantil uváděn pouze pro zajímavost a pro symetrii. Dále však nebude směrodatný.

Všechny následující grafy byly vytvořeny ze simulovaných dat a týkají se výhradně náhodně vybraného člověka z portfolia, 77-letého muže. Jako první je uveden graf zobrazující střední odhad individuálních budoucích pravděpodobností úmrtí tohoto člověka spolu s 0,5% a 99,5% kvantily.

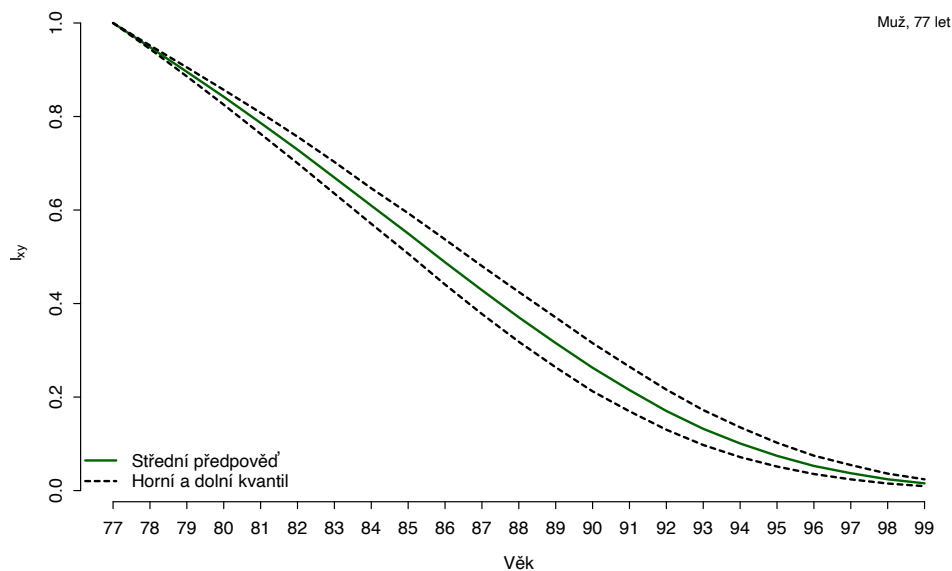
Na Obrázku 4.9 lze vidět pásmo spolehlivosti, ve kterém se bude s pravděpodobností 99,5% úmrtnost tohoto člověka nacházet v následujících letech. Výrazný „skok“ v pravé části grafu je způsobený umělým vsazením čísla 1 k pravděpodobnosti úmrtí v nejvyšším věku (99) podle vztahu 4.13.

Obrázek 4.10 znázorňuje střední předpověď spolu s 0,5% a 99,5% kvantily individuální posloupnosti l_{x,y_i} náhodného klienta, 77-letého muže.



Obrázek 4.9: Kvantily individuální posloupnosti q_{x,y_i} náhodného klienta

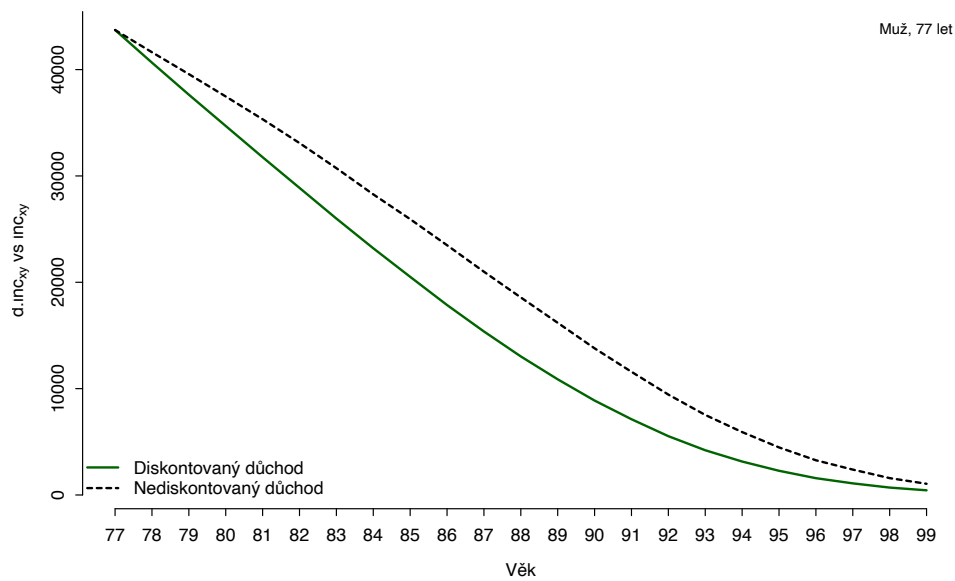
Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 4.10: Kvantily individuální posloupnosti l_{x,y_i} náhodného klienta

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obrázku 4.11 jsou zobrazeny střední hodnoty diskontovaných a nediskontovaných individuálních budoucích důchodů klienta.



Obrázek 4.11: Střední hodnoty posloupností inc_{x,y_i} & $d.inc_{x,y_i}$ náhodného klienta

Zdroj: Vlastní zpracování

Veškeré počínání v předchozích kapitolách týkajících se LC modelu směřovalo ke kvantifikaci rizika plynoucího ze spravování portfolia klientů.

V tuto chvíli jsou pro vyhodnocení LC modelu, resp. pro provedení kvantifikace rizika na základě LC modelu, stěžejní informace uložené v *listech* **D.INC.lc** a **D.INC.BE.lc**, tedy budoucí diskontované závazky vůči klientům. Pro co nejmenší ztrátu informací byla nejprve vyjádřena výše budoucích závazků individuálně vůči každému z klientů zvlášť.

Jako první byl vyjádřen součet budoucích závazků vůči klientům pomocí simulovaných hodnot pravděpodobností úmrtí. Data uložená v *listu* **D.INC.lc** obsahují částky vyjádřené pomocí odhadu střední hodnoty a pomocí vyššího i nižšího kvantilu. Vyšší kvantil reprezentuje vyšší úmrtnost (tzv. riziko úmrtnosti). Nižší kvantil reprezentuje riziko dlouhověkosti (*longevity risk*). Pro určování výše kapitálu, který pojišťovna musí dle regulace držet, není úvaha rizika úmrtnosti relevantní. Riziko úmrtnosti totiž znamená pro subjekty vyplácející anuitu „pozitivní“ riziko. Regulace Solventnost II nebere „pozitivní“ rizika v úvahu, proto vyšší kvantil úmrtnosti nebude od této chvíle relevantní ani pro tuto práci. Vyjádří se tedy *array* dimenze $1 \times 2 \times 10.000$, kde každá úroveň reprezentuje jednoho klienta a v každé úrovni se nachází součet středních odhadů budoucích závazků

vůči jednotlivým klientům a součet odhadů budoucích závazků vůči klientům vyjádřený z 0,5%-ního kvantilu úmrtnosti⁶. Tato *array* byla pojmenována **money.sim.lc**.

Analogicky jako v případě simulovaných dat byla provedena kvantifikace rizika pomocí BE odhadů. Byly tedy provedeny součty hodnot z *listů* **D.INC.BE.lc**. Byla vytvořena *array* s názvem **money.BE.lc**, v jejíž každé úrovni se nachází součet BE odhadů budoucích závazků vůči jednotlivým klientům a součet stresových budoucích závazků vůči jednotlivým klientům⁷.

Srovnání variant lze vidět v tabulce 4.15. BE odhad reprezentuje hodnoty, které byly zkonstruovány na základě prognózy středních hodnot časové řady κ_y . S touto hodnotou jsou srovnávány dlouhodobé scénáře, které byly vyjádřeny pomocí standardní formule (snížení BE odhadu úmrtnosti o 20%) a simulací (99,5%, resp. 0,5% kvantil simulovaných scénářů).

Tabulka 4.15: Kvantifikace rizika pomocí standardní formule a interního modelu

klient č.	BE	riziko dlouhodobosti	
		standardní formule	interní model
1	379.015 Kč	422.447 Kč	403.986 Kč
2	437.283 Kč	472.016 Kč	461.218 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮
5.000	728.981 Kč	794.508 Kč	767.821 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮
10.000	772.646 Kč	835.973 Kč	829.763 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

V tabulce 4.15 je uveden dílčí výstup této práce, konkrétně výstup kvantifikace rizika „per-klient“ pomocí LC modelu.

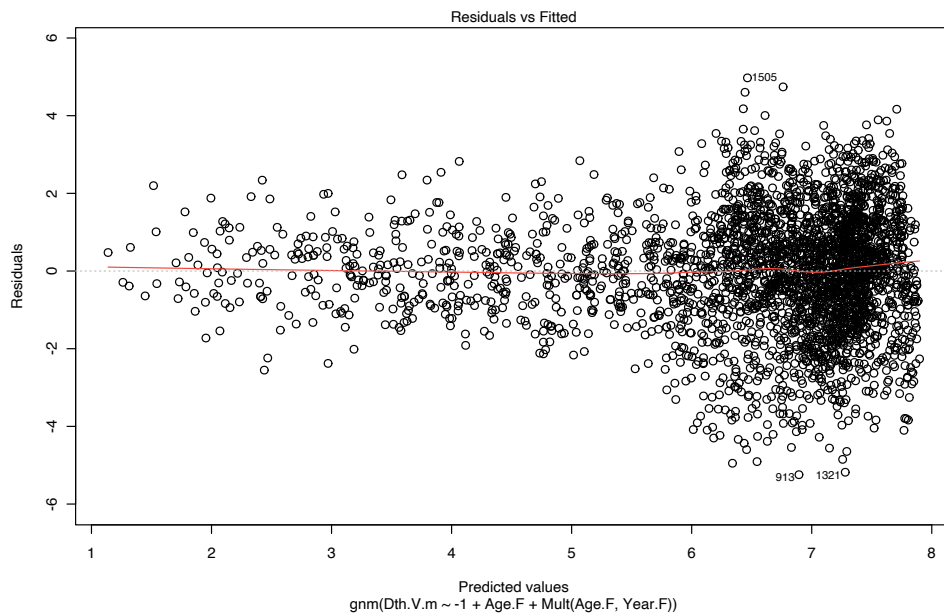
⁶99,5% kvantil úmrtnosti reprezentuje zmíněné riziko úmrtnosti, které není pro práci relevantní. Převráceným kvantilem je kvantil 0,5%, který odpovídá chtěnému riziku dlouhodobosti v souladu se Solventnost II.

⁷Stresové závazky byly vyjádřeny podle standardní formule jako snížení BE odhadu úmrtnosti o 20 procentních bodů.

4.7 Posouzení kvality LC modelu

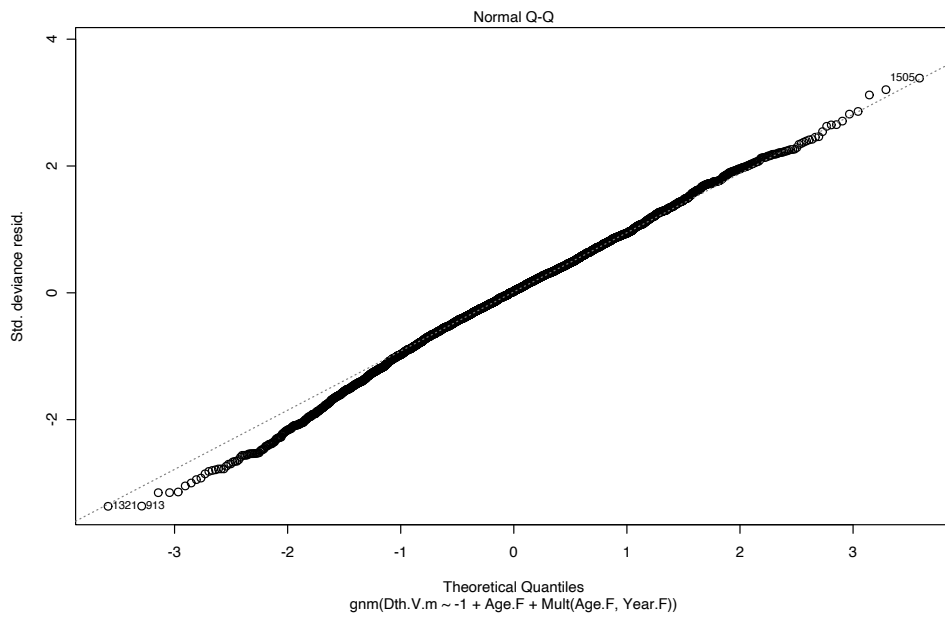
Lee-Carterův model a jeho odhadnuté parametry lze využít pro modelování počtu úmrtí postupem popsaným v [4]. Analýzu reziduí mezi skutečnými a modelovými počty úmrtí lze využít pro posouzení kvality odhadů LC modelu. Výsledky této analýzy reziduí jsou v práci prezentovány v grafické podobě.

Obrázek 4.12 reprezentuje hodnoty reziduí pro všechny počty úmrtí mužské populace, získané pomocí LC modelu. Model dobře vystihuje reálná data, pokud regresní funkce reziduí (červená čára) je rovnoběžná s osou x bodě 0.



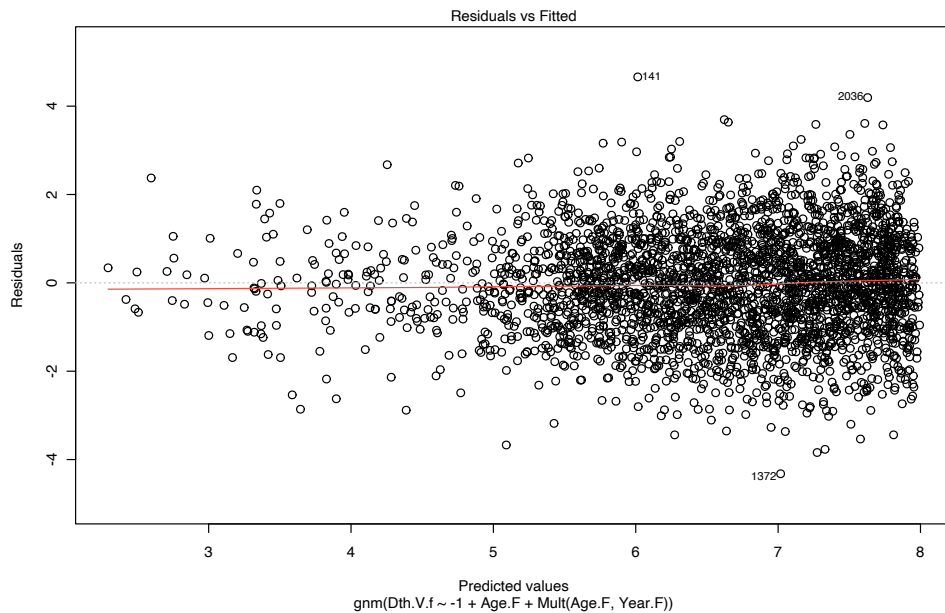
Obrázek 4.12: Analýza reziduí pro mužská data 1

„Na principu porovnání kvantilů uspořádaného výběru s teoretickými kvantily předpokládaného rozdělení jsou založeny grafy typu Q-Q (Quantile-Quantile).“ [23] Na Obrázku 4.13 je vidět tzv. Quantile-Quantile graf pro rezidua počtu úmrtí mužské populace. Pakliže byl model vhodně zvolen, hodnoty standardizovaných reziduí by měly mít normované normální rozdělení. Graf porovnává kvantily normovaného normálního rozdělení (osa x) s kvantily rozdělení standardizovaných reziduí (osa y).

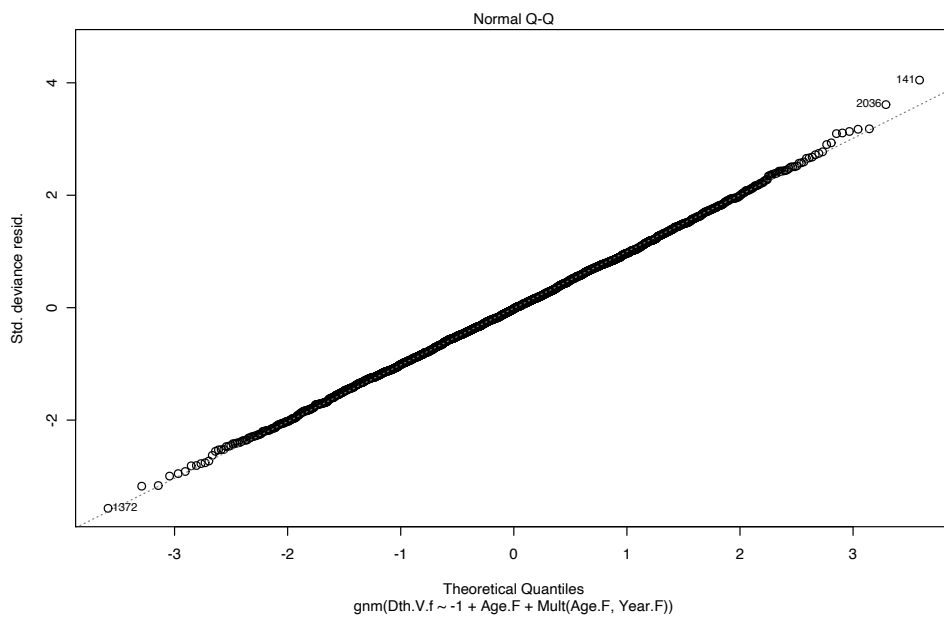


Obrázek 4.13: Analýza reziduí pro mužská data 2

Obrázky 4.14 a 4.15 jsou analogií pro ženskou populaci.



Obrázek 4.14: Analýza reziduí pro ženská data 1



Obrázek 4.15: Analýza reziduí pro ženská data 2

Na základě analýzy reziduí je zřejmé, že uvažovaný LC model pro muže i ženy má určité rezervy. I přesto jsou výstupy modelu v práci využívány. Analýza reziduí může však sloužit jako poklad pro rozhodování o vhodnějším modelu.

5 APLIKACE CAIRNS-BLAKE-DOWDOVA MODELU

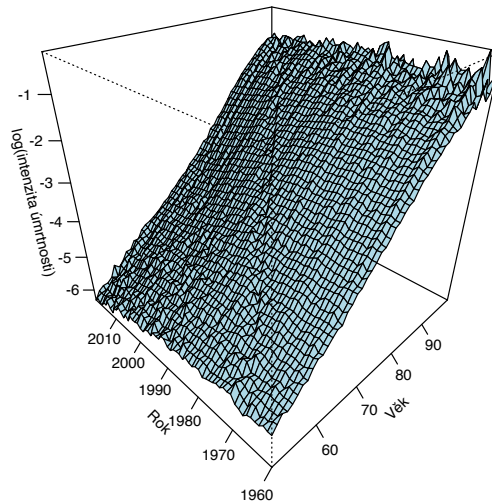
Druhým stochastickým modelem, který byl aplikován na data pro Českou republiku je tzv. CBD model. Tento název nese po svých tvůrcích, resp. akronym CBD reprezentuje první písmena příjmení tvůrců modelu. Tvůrci modelu byli Andrew J. G. Cairns, David Blake a Kevin Dowd. První verze modelu byla publikována v [24] v roce 2006.

Model je podle [4] definován jako

$$\log(\mu_{x+1/2,y+1/2}) = \kappa_y^{(1)} + \kappa_y^{(2)}(x - \bar{x}). \quad (5.1)$$

Stejně jako v případě LC modelu je předmětem modelování logaritmus intenzity úmrtnosti osoby ve věku $x + 1/2$ v kalendářním roce $y + 1/2$. Analogicky jako v kapitole 4 bude v následujícím textu pro přehlednost uvažována varianta úmrtí x -leté osoby v kalendářním roce y . Parametry $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ reprezentují vektory závislé na čase, proměnná x značí klientův věk a proměnná \bar{x} značí průměrný věk v portfoliu klientů.

Předmětem CBD modelu jsou logaritmy intenzit úmrtností. Intenzita úmrtnosti se přibližně určí dle vztahu 1.17. Tento vztah lze aplikovat na dosud známá data. Pro celý CBD model budou uvažována shodná data, na kterých byl kalibrován LC model, tedy data o úmrtích a centrálních expozicích vůči riziku pro muže a ženy v České republice v letech 1960-2019. V sekci 4 byl na Obrázku 4.1 zobrazen vývoj logaritmů mužských intenzit úmrtností. Na Obrázku 5.1 lze pro porovnání vidět vývoj logaritmů ženských intenzit úmrtností.



Obrázek 5.1: Ženská intenzita úmrtnosti, Česká republika

Zdroj: Vlastní zpracování podle [4]

5.1 Odhad parametrů modelu

Prvním krokem při aplikaci modelu je odhad parametrů, resp. kalibrace modelu. Do modelu vstupují pouze 2 neznámé parametry, a to vektory $\boldsymbol{\kappa}_y^{(1)}$ a $\boldsymbol{\kappa}_y^{(2)}$. Odhad parametrů probíhá rutinně dle [4]. K odhadu parametrů byly za předpokladu, že se počet úmrtí řídí Poissonovým rozdělením pravděpodobností, použity zobecněné lineární modely. K tomuto byla použita implementovaná funkce $glm()$ v softwaru R. Náhled do způsobu odhadu lze vidět v úryvku skriptu níže. Veškeré detaily lze dohledat v literatuře.

```

# Converting data to vectors
Dth.V.m = c(Dth.m); Exp.V.m = c(Exp.m)
Dth.V.f = c(Dth.f); Exp.V.f = c(Exp.f)

# Obtain model matrix for CBD model
X1 = kronecker(diag(n.y), rep(1, n.x))
Age.mean = AGE - mean(AGE) # (x-xprum) vektor o~delce n.x
X2 = kronecker(diag(n.y), Age.mean)
X = cbind(X1, X2)
rm(X1,X2)

# Fitting the model
CBD.Male = glm(Dth.V.m ~ -1 + X,
               offset = log(Exp.V.m),
               family = poisson)

```

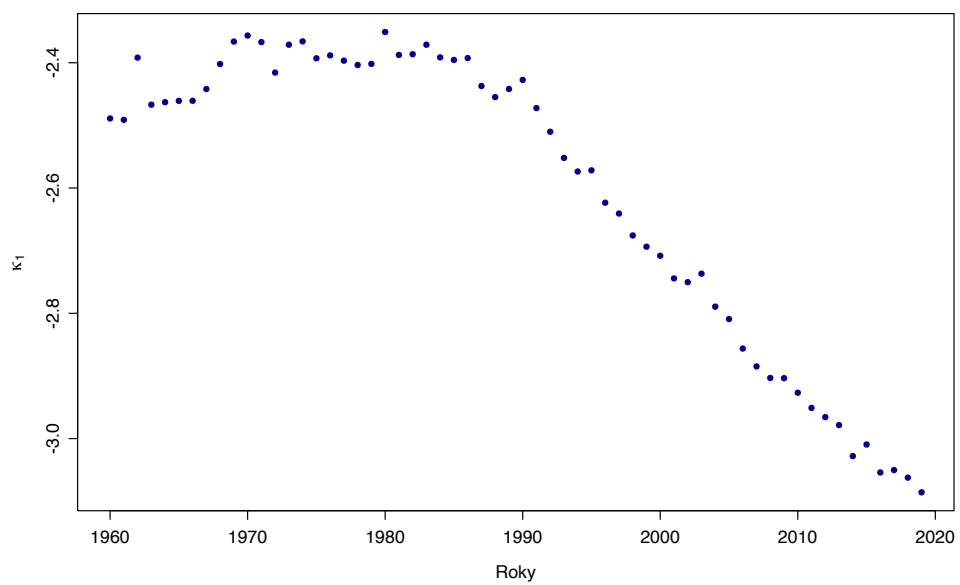
Náhled do odhadnutých parametrů je vidět v Tabulce 5.1.

Tabulka 5.1: Odhad parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$

	$\kappa_y^{(1)}$		$\kappa_y^{(2)}$	
	muži	ženy	muži	ženy
1960	-2,489	-2,860	0,091	0,108
1961	-2,491	-2,869	0,092	0,109
1962	-2,392	-2,789	0,094	0,113
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2019	-3,086	-3,646	0,096	0,119

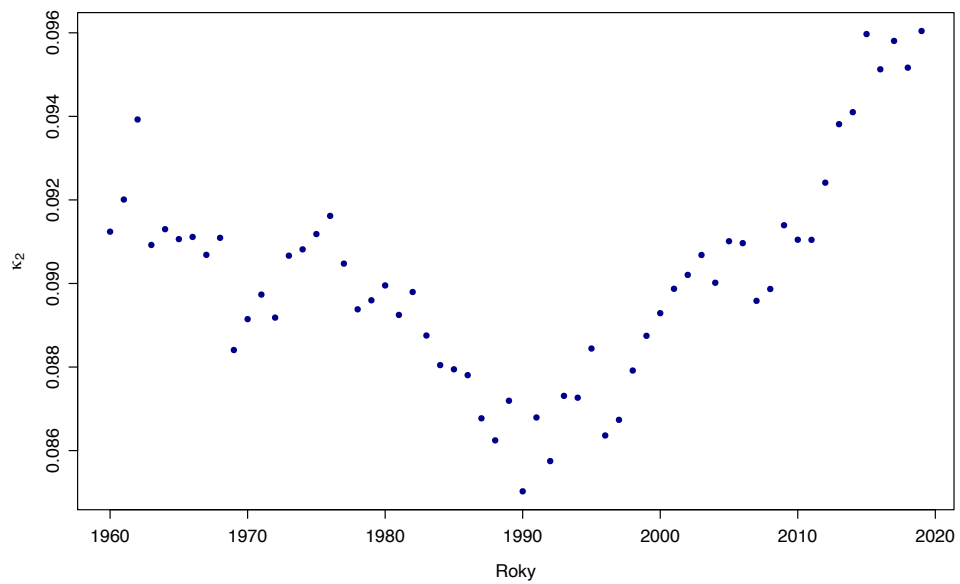
Zdroj: Vlastní zpracování

Grafické znázornění odhadu parametrů $\kappa_y^{(1)}$ pro muže je možné vidět na Obrázku 5.2. Zobrazení odhadu parametrů $\kappa_y^{(2)}$ pro muže je možné vidět na Obrázku 5.3.



Obrázek 5.2: Odhad parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



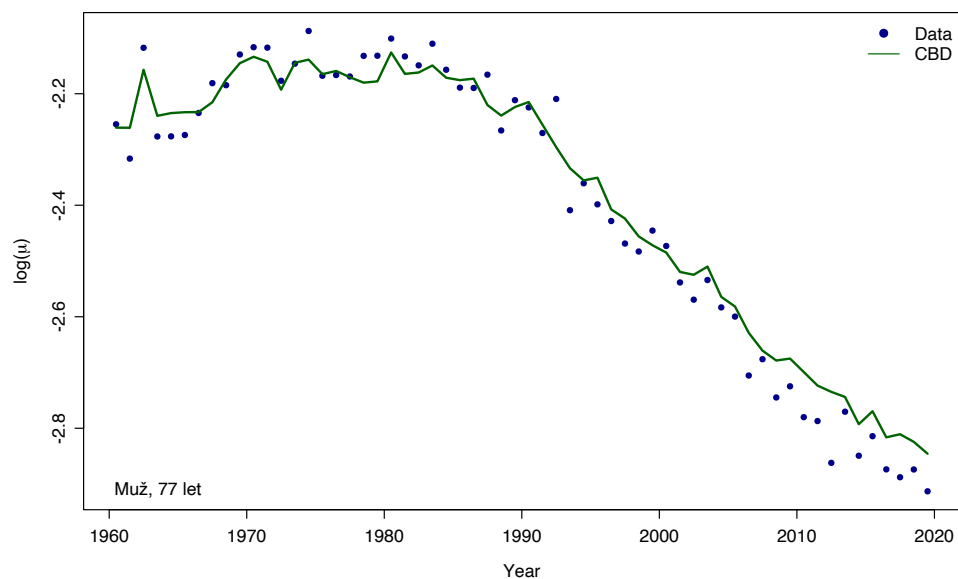
Obrázek 5.3: Odhad parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

Po odhadu všech parametrů modelu je možné ze známých dat zkonstruovat podle vztahu 5.1 logaritmy intenzit úmrtností ex post (tzv. *fitted values*), resp. jejich logaritmy a následně provést srovnání s hodnotami skutečně naměřenými (tzv. *observed values*). Náhled do číselného porovnání je zobrazen v Tabulce 5.2. Grafické porovnání je pro vybranou osobu (muž, 77 let) zobrazeno na Obrázku 5.4.

Tabulka 5.2: Porovnání modelu a skutečných dat

	data	CBD
1960	-2,255	-2,261
1961	-2,314	-2,261
1962	-2,118	-2,157
⋮	⋮	⋮
2019	-2,913	-2,846



Obrázek 5.4: Pozorované hodnoty vs CBD model

Zdroj: Vlastní zpracování

Po rychlém vizuálním zhodnocení pro náhodně vybraného člověka se zdá, že model vykazuje dobrou shodu s reálnými daty. K objektivnímu zhodnocení však slouží diagnostika modelu, které se věnuje kapitola 5.7.

5.2 Extrapolace časové složky

Aby bylo možné pomocí CBD modelu vytvářet prognózy úmrtnosti, je třeba provést extrapolaci časové složky modelu. Časovou složkou se rozumí parametry modelu závislé na čase, tedy vektory $\boldsymbol{\kappa}_y^{(1)}$ a $\boldsymbol{\kappa}_y^{(2)}$, které se dle [4] vnímají jako korelované časové řady (lze částečně vidět i z jejich průběhů, viz Obrázky 5.2, 5.3). V sekci 5 byly odhadnuty parametry pro roky 1960 - 2019 (poslední rok, pro který byla dostupná data z [18]). V článku [24] byla k extrapolaci časové složky pro CBD model využita dvojrozměrná náhodná procházka s driftem. Stejný postup používá například [4] a stejný postup byl využit i v této práci. Dvojrozměrná náhodná procházka s driftem má podle [4] tvar

$$\boldsymbol{\kappa}_y = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\kappa}_{y-1} + \boldsymbol{\epsilon}_y \quad (5.2)$$

pro $y = 2, 3, \dots, n_y$, kde n_y reprezentuje počet prognózovaných let. Podoba dvojrozměrné náhodné procházky s driftem je analogická jako v jednorozměrném případě (viz vztah 4.2). Proměnná $\boldsymbol{\mu}$ reprezentuje *drift* a proměnná $\boldsymbol{\epsilon}_y$ reprezentuje náhodnou chybu pocházející z dvojrozměrného normálního rozdělení $\mathbf{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\mathbf{0}$ je matice nulových středních hodnot a $\boldsymbol{\Sigma}$ je matice rozptylů. Diference dvojrozměrné náhodné procházky mají podle [4] podobu

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\kappa}_y &= \boldsymbol{\kappa}_y - \boldsymbol{\kappa}_{y-1} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}_y. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Potom $\Delta \boldsymbol{\kappa}_y$ pro $y = 2, 3, \dots, n_y$ jsou nezávislé veličiny s rozdělením $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (tento fakt bude využit v kapitole 5.3 při simulování budoucího vývoje časových řad), přičemž

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

kde σ_1^2 je rozptyl řady $\boldsymbol{\kappa}_y^{(1)}$, σ_2^2 je rozptyl řady $\boldsymbol{\kappa}_y^{(2)}$ a $\sigma_{1,2}$ je kovariance mezi oběma řadami. Odhad vektoru středních hodnot se provede pomocí vztahu

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_2^{n_y} \Delta \boldsymbol{\kappa}_y}{n_y - 1}. \quad (5.5)$$

Pro odhad vektoru $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ byly použity implementované funkce *diff()* pro výpočet diferencí řad a *mean()* pro výpočet průměru. Výsledné vektory byly uloženy do matic s názvy **Mu.m** a **Mu.f** dle pohlaví.

Odhad matice rozptylů se provede pomocí vztahu

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n_y - 2} \sum_2^{n_y} (\Delta \kappa_y - \hat{\mu})(\Delta \kappa_y - \hat{\mu})'. \quad (5.6)$$

Pro výpočet odhadu matice rozptylů byly použity funkce *diff()* pro výpočet diferencí řady, *var()* pro výpočet výběrového rozptylu a *cov()* pro výpočet kovariancí. Vypočítané veličiny byly uloženy do matice o rozměrech 2×2 (dle podoby 5.4). Matice pro muže byla uložena pod názvem **Sigma.m** a matice pro ženy byla uložena pod názvem **Sigma.f**. Odhady parametrů (pro muže index m , pro ženy index f) lze vidět v následujících vztazích.

$$\hat{\mu}_m = \begin{bmatrix} -0,01012 \\ 0,00008 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\hat{\mu}_f = \begin{bmatrix} -0,01332 \\ 0,00019 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\hat{\Sigma}_m = \begin{bmatrix} 0,00088 & 0,00001 \\ 0,00001 & 0,00000 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\hat{\Sigma}_f = \begin{bmatrix} 0,00093 & 0,00002 \\ 0,00002 & 0,00000 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Pomocí kombinace funkcí *diff()* a *corr()* byly taktéž vyjádřeny korelační koeficienty $\hat{\rho}$ mezi řadami $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ pro muže a ženy.

$$\hat{\rho}_m = 0,295 \quad (5.11)$$

$$\hat{\rho}_f = 0,512 \quad (5.12)$$

V kapitole 4 při LC modelu byla prováděna extrapolace parametru κ_y na 62 let. Tento časový interval bude zachován i pro CBD model. Tento časový úsek byl určen v závislosti na minimálním a maximálním věku klientů v portfoliu (viz sekce 3.1). Extrapolace časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ spočívá v kumulování odhadnutých hodnot $\hat{\mu}$ k posledním známým hodnotám κ_y podle vztahu

$$\hat{\kappa}_{n_y+m} = \kappa_{n_y} + m\hat{\mu}. \quad (5.13)$$

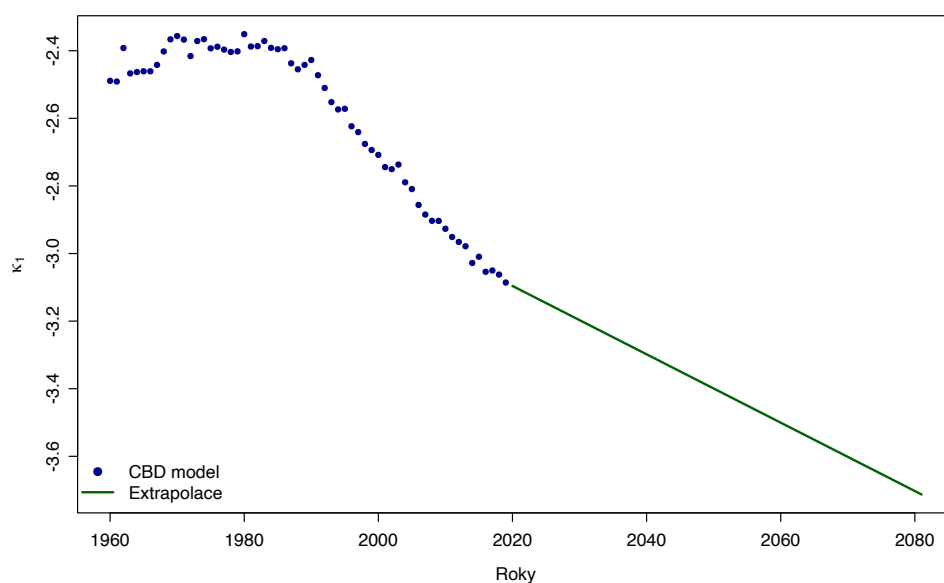
S použitím vztahu 5.13 se vyjádří centrální prognóza obou časových řad.

Tabulka 5.3: Extrapolace parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$

	muži		ženy	
	$\kappa_y^{(1)}$	$\kappa_y^{(2)}$	$\kappa_y^{(1)}$	$\kappa_y^{(2)}$
2020	-3,0959	0,0961	-3,6591	0,1190
2021	-3,1058	0,0962	-3,6724	0,1191
2022	-3,1161	0,0963	-3,6858	0,1193
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2081	-3,7129	0,1011	-4,4714	0,1303

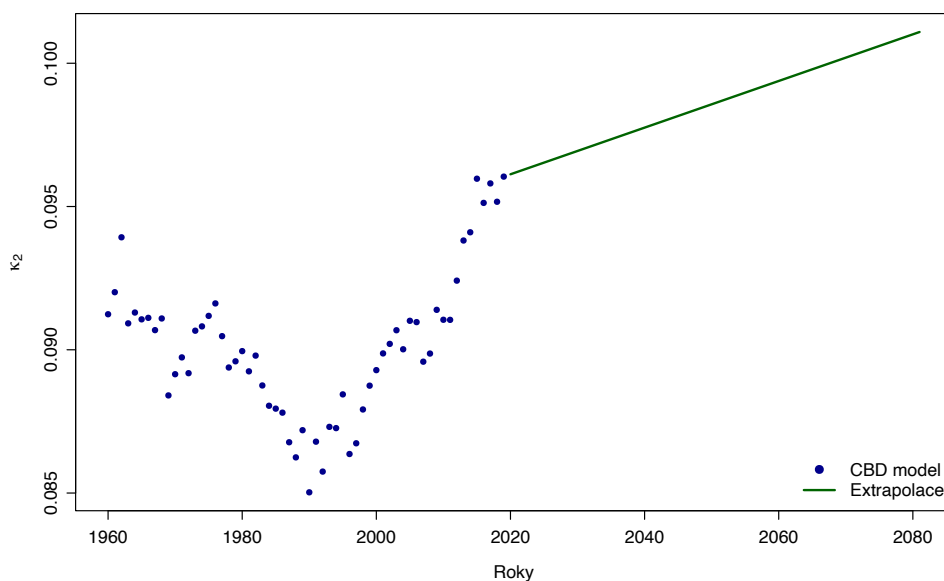
Zdroj: Vlastní zpracování

Extrapolované časové řady byly uloženy do matic s názvy **Kappa.f.m** a **Kappa.f.f** dle pohlaví. Grafický vývoj časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ pro muže je možné vidět na Obrázcích 5.5 a 5.6.



Obrázek 5.5: Extrapolace parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 5.6: Extrapolace parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

S pomocí takto extrapolovaných parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ je již možné pomocí vztahu 5.1 konstruovat logaritmy intenzit úmrtností pro budoucí kalendářní roky. Hlavním zdrojem dat pro konstrukce logaritmů intenzit úmrtností jsou však simulované hodnoty časových řad. Simulace jsou předmětem kapitoly 5.3.

5.3 Simulace časových složek

Předmětem simulací je možný budoucí vývoj parametrů, které jsou závislé na čase, tedy parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ zvlášť pro muže a pro ženy. Jak již bylo uvedeno, na tyto parametry je pohlíženo jako na korelované časové řady, jejichž difference pochází z dvojrozměrného normálního rozdělení s parametry podle vztahů 5.7 - 5.10.

V případě LC modelu bylo provedeno 1.000 simulací. V případě CBD modelu bude tento počet simulací zachován. Platí, že skript je připraven provádět libovolný počet simulací v závislosti na výpočetním výkonu. Prvním krokem je vygenerování hodnot z dvojrozměrného normálního rozdělení. K tomuto účelu byla použita funkce *mvnorm()* z knihovny *MASS*. Protože uvažujeme 1.000 simulací na 62 let dopředu, je třeba vygenerovat 1000×62 dvojic, tedy celkem $2 \times (1000 \times 62)$ hodnot. První hodnota z dvojice patří k první časové řadě, tedy parametru $\kappa_y^{(1)}$ a druhá hodnota z dvojice se řadí ke druhé

časové řadě, tedy parametru $\kappa_y^{(2)}$. Matice takto vygenerovaných hodnot byly uloženy do matic zvlášť pro jednotlivé parametry. Pro parametr $\kappa_y^{(1)}$ byly hodnoty uloženy do matic s názvy **k1.m** a **k1.f** dle pohlaví. Hodnoty parametrů $\kappa_y^{(2)}$ byly uloženy do matic s názvy **k2.m** a **k2.f** dle pohlaví. Náhled do matic simulovaných diferencí pro muže je vidět v Tabulce 5.4.

Tabulka 5.4: Simulované hodnoty diferencí pro parametr $\kappa_y^{(1)}$ - muži

	2020	2021	2022	...	2081
Simulace 1	-0,6372	-0,0445	-0,0316	...	0,0210
Simulace 2	0,0007	0,0271	0,0717	...	-0,0493
Simulace 3	0,0041	-0,0127	0,0017	...	-0,0331
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Simulace 1.000	-0,0203	0,0189	-0,0228	...	-0,0011

Zdroj: Vlastní zpracování

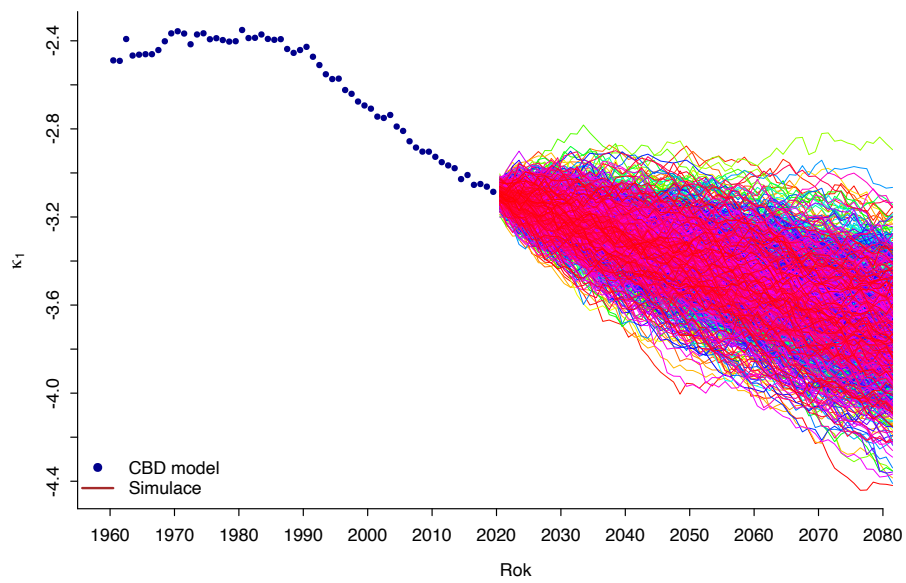
Takto získané diference je následně nutné nakumulovat k posledním odhadnutým hodnotám $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ (poslední odhadnuté hodnoty lze vidět v Tabulce 5.1). Za tímto účelem byla ve skriptu použita kombinace funkcí *apply()* a *cumsum()*. Pro pohodlnější manipulaci s daty byly matice simulovaných diferencí **k1.m** a **k1.f** transponovány. Výsledné matice o rozměrech 62×1000 , ve kterých řádky reprezentují budoucí roky a sloupce reprezentují simulace, byly uloženy do nových matic s názvy **k1.sim.m**, **k2.sim.m**, **k1.sim.f**, a **k2.sim.f** dle pohlaví. V Tabulce 5.5 je zobrazen náhled do mužské matice jednotlivých scénářů parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$.

Tabulka 5.5: Simulace parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ - muži

	$\kappa_y^{(1)}$				
	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
2020	-3,1495	-3,0850	-3,0817	...	-3,1060
2021	-3,1940	-3,0579	-3,0944	...	-3,0871
2022	-3,1629	-2,9863	-3,0927	...	-3,1099
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2081	-3,2489	-3,7944	-3,9545	...	-3,7632
	$\kappa_y^{(2)}$				
	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
2020	0,0973	0,0946	0,0955	...	0,0971
2021	0,0972	0,0951	0,0941	...	0,0968
2022	0,09852	0,0967	0,09484	...	0,0961
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2081	0,1027	0,0987	0,1052	...	0,1066

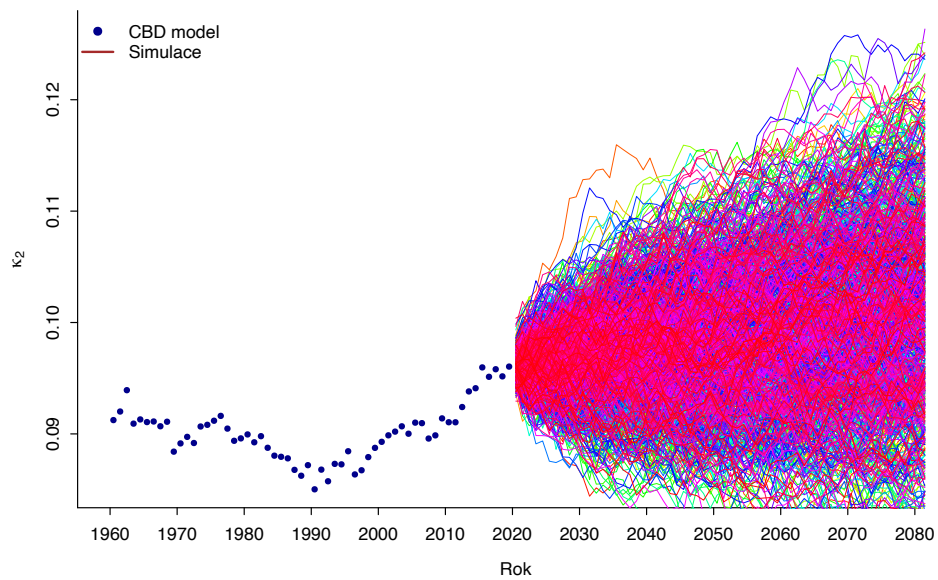
Zdroj: Vlastní zpracování

Protože v době psaní této práce byla v HMD [18] dostupná data pouze do roku 2019, v simulacích je tento fakt zohledněn. Stejně jako v případě simulací v LC modelu v kapitole 4.3, první simulovaný rok je 2020, a to i přes to, že tento rok je v minulosti, stejně jako rok 2021. K dispozici je nyní 4.000 vektorů možných scénářů budoucího vývoje parametrů (1.000 pro každý z parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ pro muže a ženy). Na Obrázcích 5.7 a 5.8 je zobrazen grafický průběh simulací pro mužské parametry κ .



Obrázek 5.7: Simulace parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 5.8: Simulace parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

Podobně vypadá grafický průběh pro ženské parametry κ_y . Tyto grafy jsou dostupné v příloženém skriptu.

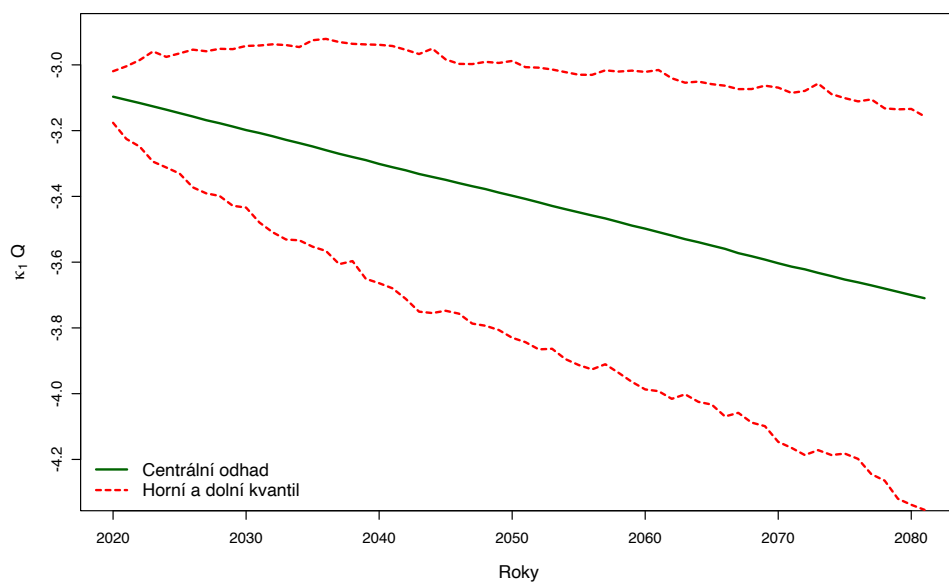
Následně byly ze simulovaných hodnot vyjádřeny kvantily. Stejně jako v případě LC modelu v kapitole 4.3 byl zde určeny 0,5% kvantil, 99,5% kvantil a následně průměr, reprezentující střední hodnotu. Data pro výpočet kvantilů a průměru jsou uložena v maticích **k1.sim.m**, **k2.sim.m**, **k1.sim.f** a **k2.sim.f**, kde jednotlivé simulace jsou uloženy ve sloupcích. Kvantily a průměr tedy budou určovány z jednotlivých řádků těchto matic. K výpočtu kvantilů a průměru byla užitá funkce *quantile()* s funkcí *mean()*. Výsledné kvantily a průměry byly následně uloženy do nových matic s názvy **k1Q.sim.m**, **k2Q.sim.m**, **k1Q.sim.f** a **k2Q.sim.f**. Podoba kvantilových matic, resp. kvantilové matice pro muže pro parametry $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ je znázorněna v Tabulce 5.6.

Tabulka 5.6: Simulované kvantily $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$

		2020	2021	2022	...	2081
$\kappa_y^{(1)}$	99,5%	-3,0210	-3,0044	-2,9945	...	-3,1381
	\bar{x}	-3,0958	-3,1077	-3,1187	...	-3,7111
	0,5%	-3,1725	-3,2261	-3,2489	...	-4,2732
$\kappa_y^{(2)}$	99,5%	0,0986	0,0996	0,1008	...	0,1225
	\bar{x}	0,0961	0,0961	0,0962	...	0,1009
	0,5%	0,0933	0,0921	0,0916	...	0,0791

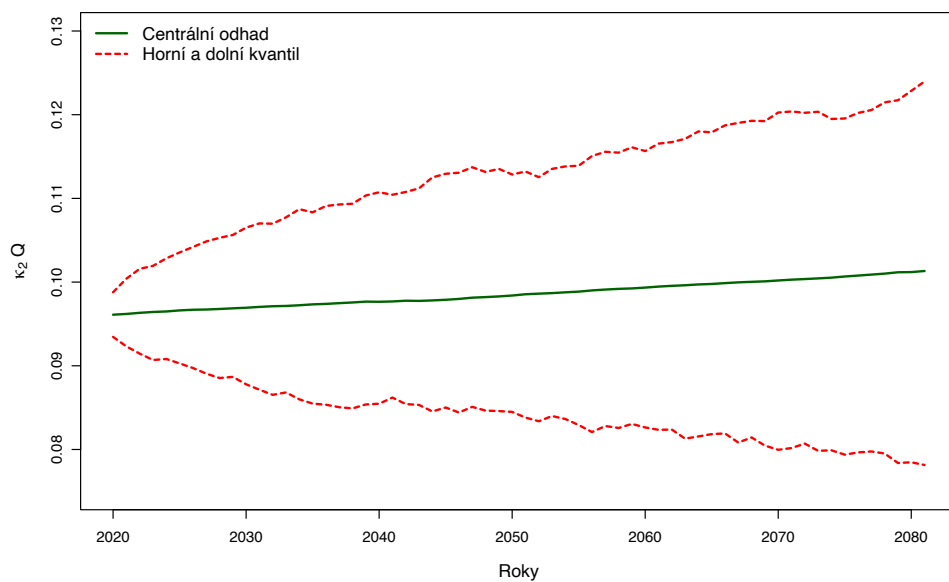
Zdroj: Vlastní zpracování

Získané kvantily je také možné graficky zobrazit. Na Obrázku 5.9 je možné vidět 0,5%-ní a 99,5%-ní kvantily simulací mužského parametru $\kappa_y^{(1)}$ spolu se střední hodnotou odhadnutou pomocí aritmetického průměru. Na Obrázku 5.10 je možné vidět 0,5%-ní a 99,5%-ní kvantil simulací mužského parametru $\kappa_y^{(2)}$ spolu se střední hodnotou, odhadnutou pomocí aritmetického průměru. Obrázky zobrazující vývoj kvantilů ženských parametrů jsou dostupné k vygenerování v přiloženém skriptu. Kvantily ze simulovaných hodnot mohou být dosazením do vztahu 5.1 využity ke konstrukci matic logaritmů intenzit úmrtností.



Obrázek 5.9: Simulované kvantily parametru $\kappa_y^{(1)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování



Obrázek 5.10: Simulované kvantily parametru $\kappa_y^{(2)}$ - muži

Zdroj: Vlastní zpracování

5.4 Odhad intenzit úmrtnosti

Konstrukce matic logaritmů intenzit úmrtností probíhá pomocí vztahu 5.1. V kapitole 5.1 byly odhadnuty vektory parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ ex-post. V kapitole 5.2 byla provedena extrapolace těchto parametrů na 62 let dopředu a v sekci 5.3 bylo pro každou ze dvou časových řad provedeno 1.000 simulací možného budoucího vývoje.

Pro CBD model byl zachován shodný postup jako u LC modelu. První metodu reprezentuje konstrukce jedné matice logaritmů intenzit úmrtností pro každou jednu simulaci časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$. Druhou metodu reprezentuje vytvoření dvou matic logaritmů intenzit úmrtností zvlášť pro muže a pro ženy na základě BE odhadů extrapolovaných parametrů $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$.

Jako první je popsán postup simulační, tedy vyjádření jedné matice logaritmů intenzit úmrtností pro každou jednu simulovanou variantu. Postup je vyjádřen vztahem

$$\log(m_{x,y})_n = \kappa_{y_n}^{(1)} + \kappa_{y_n}^{(2)}(x - \bar{x}) \quad (5.14)$$

pro $n = \{1, 2, \dots, 1000\}$ pro obě pohlaví zvlášť.

Při počtu 1.000 simulací vznikne celkem 2.000 matic $\log(\mathbf{m}_{x,y})$, a to 1.000 pro muže a 1.000 pro ženy. Tyto matice byly stejně jako v případě LC modelu v kapitole 4.4 odhadnuty pomocí cyklu *for()* a uloženy v datových strukturách *array*, nesoucí názvy **mxt.m** pro muže a **mxt.f** pro ženy. V každé úrovni těchto *arrays* byla uložena jedna matice logaritmů intenzit úmrtností. Celkem bylo do každé *array* uloženo 1.000 matic $\log(\mathbf{m}_{x,y})$. Náhled do jedné z 1.000 matic pro muže je zobrazen v Tabulce 5.7.

Tabulka 5.7: Logaritmy intenzit úmrtností - muži

	2020	2021	2022	...	2081
50	-5,533	-5,576	-5,577	...	-5,765
51	-5,436	-5,479	-5,478	...	-5,662
52	-5,339	-5,381	-5,380	...	-5,559
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	-0,766	-0,812	-0,749	...	-0,733

Zdroj: Vlastní zpracování

Druhý způsob spočívá obdobně jako u LC modelu v prostém dosazení BE odhadu budoucího vývoje časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$ do vztahu 5.1. Výstupem jsou pouhé dvě matice

$\log(\mathbf{m}_{x,y})$, jedna pro muže a jedna pro ženy. Tyto matice byly v příloženém skriptu uloženy pod názvy **BE.mx.m** a **BE.mx.f**.

5.5 Vytvoření úmrtnostních tabulek

Hodnoty $\log(m_{x,y})$ samy o sobě nenesou velikou vypovídající hodnotu. Stejně jako v případě LC modelu v kapitole 4.5 je třeba tyto hodnoty převést na tabulkové hodnoty $q_{x,y}$, tedy pravděpodobnosti úmrtí x -leté osoby v kalendářním roce y . Postup bude shodný s postupem uvedeným v kapitole 4.5.

Jako první se provede odlogaritmování všech hodnot uložených v *arrays* **mxt.m** a **mxt.f**. Odlogaritmované hodnoty se za použití vztahu 4.12 transformují na tabulkové hodnoty $q_{x,y}$. Výsledkem je 2.000 matic pravděpodobností úmrtí $\mathbf{q}_{x,y}$, kde prvních tisíc patří mužům a druhých tisíc patří ženám. Tyto matice byly obdobně jako v kapitole 4.5 uloženy do nových *arrays* s názvy **qxt.m** a **qxt.f** dle pohlaví. Náhled do jedné z matic z *array* **mxt.m** (tedy do jedné z matic pravděpodobností úmrtí pro muže) je zobrazen v Tabulce 5.8.

Tabulka 5.8: Matice pravděpodobností úmrtí $\mathbf{q}_{x,y}$ - muži

	2020	2021	2022	...	2081
50	0,0039	0,0038	0,0038	...	0,0031
51	0,0044	0,0042	0,0042	...	0,0035
52	0,0048	0,0046	0,0046	...	0,0038
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	1	1	...	1

Zdroj: Vlastní zpracování

Stejně jako v případě LC modelu byla pravděpodobnost úmrtí ve věku 99 let podle vztahu 4.13 uměle nastavena rovna jedné. V maticích pravděpodobností úmrtí je opět možné sledovat zajímavé trendy vývoje. Popsán bude stejně jako v kapitole 4.5 trend horizontální a vertikální. Tabulka 5.9 si klade za cíl tyto trendy částečně ukázat.

Tabulka 5.9: Srovnání $q_{x,y}$ v letech - ženy

	2020	...	2050	...	2080
50	0,0014	...	0,0007	...	0,0004
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
70	0,0153	...	0,0096	...	0,0065
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	0,1547	...	0,1188	...	0,1004
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	...	1	...	1

Zdroj: Vlastní zpracování

V Tabulce 5.9 je jasně vidět pozitivní vývoj (klesající trend) pravděpodobností úmrtí v čase. Tento trend je v této práci označován trendem horizontálním. Dále je vidět rostoucí pravděpodobnosti úmrtí s rostoucím věkem. Tento trend je přirozený a v této práci je označován jako trend vertikální. Nabízí se též zajímavé srovnání mezi Tabulkami 5.8 a 5.9, z nichž je ve stejných věkových kategoriích vidět výrazně nižší pravděpodobnosti úmrtí žen, než mužů. Tento trend přetrvává i v prognózách úmrtnosti.

Po odhadnutí matic pravděpodobností úmrtí je třeba po vzoru postupu v kapitole 4.5 vygenerovat klientům individuální úmrtnostní tabulky. Stěžejní charakteristikou pro toto generování jsou opět veličiny $q_{x,y}$, na základě kterých se dopočítají všechny ostatní potřebné složky individuálních úmrtnostních tabulek klientů.

Pro lepší orientaci v následujícím textu byl princip přiřazování individuálních charakteristik klientům rozdělen do dvou částí. První část se věnuje přiřazování individuálních veličin $q_{x,y}$ a následnému generování individuálních úmrtnostních tabulek ze simulovaných dat. Druhá část se věnuje přiřazování individuálních veličin $q_{x,y}$ a následnému generování individuálních úmrtnostních tabulek z BE odhadů. Postup je v obou případech analogický jako v kapitole 4.5.

- **Simulovaná data**

Jako první je popsán postup přiřazení individuálních pravděpodobností úmrtí z matic $\mathbf{q}_{x,y}$, tedy z matic, které vznikly na základě simulací. V tomto případě probíhá obdobná extrakce klientových diagonál na základě klientových charakteristik (tzn. věk a pohlaví). Stejně jako v případě LC modelu vznikne pro každou osobu v portfoliu matice individuálních posloupností \mathbf{q}_{x,y_i} pro $i = \{1, 2, \dots, 10.000\}$. Každá z těchto matic obsahuje 1.000

sloupců (dle počtu simulací). Náhled do individuální matice i -tého klienta, 77-letého muže, je vidět v Tabulce 5.10.

Tabulka 5.10: Matice q_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	0,0561	0,0559	0,0567	...	0,0552
78	0,0595	0,0637	0,0625	...	0,0600
79	0,0629	0,0687	0,0657	...	0,0650
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	1	1	...	1

Zdroj: Vlastní zpracování

Pro každého klienta je evidována obdobná matice. Matice mají počet řádků v závislosti na klientově věku. Počet sloupců matic je stanoven počtem simulací. Každý sloupec těchto matic reprezentuje jeden možný scénář a odpovídá jedné simulaci časové složky.

Pro ukládání individuálních matic pravděpodobností úmrtí byl zachován stejný princip jako v případě LC modelu. Byl tedy vytvořen *list* s názvem **QXT.cbd** (viz Tabulka 3.2), v jehož každé úrovni byla uložena jedna matice klienta. Úrovně tohoto listu korespondují s pořadovým číslem klienta v matici **data** (viz kapitola 3.1) a s úrovněmi v listu **QXT.lc**. Např. klient s pořadovým číslem 1 je uložen na prvním řádku datové matice **data** a jeho individuální matice pravděpodobností úmrtí jsou uloženy v prvních úrovních listů **QXT.lc** a **QXT.cbd** (dle metody odhadu, resp. použitého modelu). Zachováním tohoto postupu je následně velmi jednoduché porovnávat výstupy jednotlivých modelů mezi sebou.

Následujícím krokem je vytvoření individuálních matic l_{x,y_i} . Pro každého klienta byla vygenerována matice o stejných rozměrech jako matice q_{x,y_i} . Náhled do matice náhodně vybraného klienta, 77-letého muže, je zobrazen v Tabulce 5.11.

Tabulka 5.11: Matice l_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	1	1	1	...	1
78	0,9439	0,9441	0,9443	...	0,9449
79	0,8877	0,8839	0,8844	...	0,8881
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	0,0354	0,0252	0,0237	...	0,0396

Zdroj: Vlastní zpracování

Pro každého z 10.000 klientů portfolia vzniká individuální matice l_{x,y_i} . Tyto matice byly uloženy do listu s názvem **LXT.cbd** (viz Tabulka 3.2).

Jako další byly dle stejného postupu jako v kapitole 4.5 vytvořeny listy **INC.cbd** a **D.INC.cbd**. List **INC.cbd** obsahuje individuální matice nediskontovaných důchodů jednotlivých klientů inc_{x,y_i} v jednotlivých letech jejich života při zohlednění pravděpodobnosti, se kterou v daném roce již nebudou naživu (viz vztah 4.14). List **D.INC.cbd** obsahuje individuální matice diskontovaných důchodů jednotlivých klientů inc_{x,y_i} . (Koncovka „.cbd“ značí odhad pomocí CBD modelu.) Diskontování probíhá na základě vztahu 4.16. Náhled do listů **INC.cbd** a **D.INC.cbd**, resp. do individuální matice inc_{x,y_i} a inc_{x,y_i} náhodně vybraného klienta, 77-letého muže, je zobrazen v Tabulkách 5.12 a 5.13. Částky jsou zaokrouhleny na celé koruny.

Tabulka 5.12: Matice inc_{x,y_i} náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	43.723 Kč	43.723 Kč	43.723 Kč	...	43.723 Kč
78	41.270 Kč	41.278 Kč	41.245 Kč	...	41.312 Kč
79	38.813 Kč	38.648 Kč	38.667 Kč	...	38.831 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1.549 Kč	1.100 Kč	1.035 Kč	...	1.730 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

Tabulka 5.13: Matice $d.inc_{x,y_i}$ náhodného klienta

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	...	Simulace 1.000
77	43.723 Kč	43.723 Kč	43.723 Kč	⋮	43.723 Kč
78	40.461 Kč	40.468 Kč	40.436 Kč	⋮	40.502 Kč
79	37.305 Kč	37.147 Kč	37.166 Kč	⋮	37.323 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1.002 Kč	712 Kč	669 Kč	...	1.119 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

- **BE matice**

Postup přiřazení individuálních charakteristik $q_{x,y}$ klientům na základě BE matic pravděpodobností úmrtí a následné generování individuálních úmrtnostních tabulek je analogické jako v předchozích sekcích. Zdrojem dat pro přiřazování individuálních pravděpodobností úmrtí jsou agregované matice **BE.qxt.m** a **BE.qxt.f**. Protože pro každé pohlaví existuje pouze jedna BE matice, výstupem přiřazení bude pro každého klienta pouze jedna individuální posloupnost q_{x,y_i} . Z tohoto vektoru se naprosto stejným způsobem vyjádří ostatní veličiny individuální úmrtnostní tabulky, tedy l_{x,y_i} , inc_{x,y_i} a $d.inc_{x,y_i}$. Pro zachování logiky ukládání dat byla data uložena v listech s názvy **QXT.BE.cbd**, **LXT.BE.cbd**, **INC.BE.cbd** a **D.INC.BE.lc**. V i -tých úrovních jednotlivých listů jsou potom uloženy informace o i -tém klientovi z portfólia.

5.6 Vyhodnocení modelu

V předchozí kapitole byly vytvořeny individuální úmrtnostní tabulky všech klientů v portfóliu. Interpretace výsledků obdržných na základě BE odhadů jsou intuitivní. Každý klient má přiřazený jeden BE odhad budoucího vývoje. V tabulce 5.14 lze nahlédnout do veličin přiřazených i -tému klientovi, 77-letému muži, resp. do i -tých úrovní listů

- **QXT.BE.cbd**,
- **LXT.BE.cbd**,
- **INC.BE.cbd**,
- **D.INC.BE.cbd**.

Tabulka 5.14: Individuální veličiny i -tého klienta na základě BE CBD odhadů $q_{x,y}$

	q_{x,y_i}	l_{x,y_i}	inc_{x,y_i}	$d.inc_{x,y_i}$
77	0,056	1,000	43.723 Kč	43.723 Kč
78	0,061	0,944	41.279 Kč	40.470 Kč
79	0,066	0,887	38.770 Kč	37.264 Kč
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	1	0,025	1.097 Kč	710 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

Dosavadní výsledky na základě simulovaných dat je v tuto chvíli těžké interpretovat. Jedná se o 1.000 možných scénářů vývoje pro každého z 10.000 klientů. Analogicky jako v předchozích kapitolách budou tato data vyhodnocena pomocí kvantilů. V tuto chvíli však je možné určit kvantily nejen ze simulovaných časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$, ale i z celkových individuálních úmrtnostních tabulek jednotlivých klientů. Chtěné kvantily budou jako v předchozích kapitolách kvantily 0,5% a 99,5%. Jako odhad střední hodnoty byl použit aritmetický průměr.

Kvantilové matice byly obdobně jako u LC modelu uloženy pod názvy **QXT.cbd.Q**, **LXT.cbd.Q**, **INC.cbd.Q** a **D.INC.cbd.Q**. Struktura všech těchto *listů* je stejná. i -tá úroveň všech doposud vytvořených *listů* obsahuje matici s informacemi o i -tém klientovi z portfólia. Protože je struktura všech matic obsažených ve výše zmíněných listech shodná a protože v kapitole 4.6 byla uvedena kvantilová matice individuálních pravděpodobností úmrtí klienta, bude pro případ CBD modelu zobrazen výběr z matice individuálních posloupností l_{x,y_i} . Tento náhled lze spatřit v tabulce 5.15.

Tabulka 5.15: Náhled do kvantilů individuálních posloupností l_{x,y_i} náhodného klienta, CBD

	77	78	79	...	99
99,5%	1	0,940	0,878	...	0,006
\bar{x}	1	0,944	0,887	...	0,028
0,5%	1	0,948	0,896	...	0,077

Zdroj: Vlastní zpracování

Horní kvantil v tabulce 5.15 reprezentuje riziko úmrtnosti. Jak již bylo vysvětleno dříve, tento kvantil nebude předmětem dalších úvah. Dolní kvantil reprezentuje chtěné riziko dlouhověkosti.

Dále bude provedena kvantifikace rizika pomocí výstupů získaných pomocí CBD modelu. Stěžejní informace ke kvantifikaci rizika se nachází v *listech*

- **D.INC.cbd** a
- **D.INC.BE.cbd**.

Jedná se o diskontované budoucí závazky vůči klientům vyjádřené pomocí (a) BE a (b) simulací. Součet částek v těchto *listech* je prostředek ke kvantifikaci rizika dlouhověkosti spojeného s daným portfoliem klientů.

Součty diskontovaných závazků „per-klient“ byly uloženy do datových struktur *array* s názvy **money.sim.cbd** (pro simulovaná data) a **money.BE.cbd** (pro BE odhady).

Srovnání variant lze vidět v tabulce 5.16. BE odhad reprezentuje hodnoty, které byly zkonstruovány na základě střední předpovědi časových řad $\kappa_y^{(1)}$ a $\kappa_y^{(2)}$. S touto hodnotou jsou porovnávány dlouhověkostní scénáře, které byly vyjádřeny (a) pomocí standardní formule (odpovídá snížení BE odhadu úmrtnosti o 20 procentních bodů) a (b) pomocí simulovaných dat (99,5%, resp. 0,5% kvantil simulovaných scénářů).

Tabulka 5.16: Kvantifikace rizika pomocí standardní formule a interního modelu, CBD

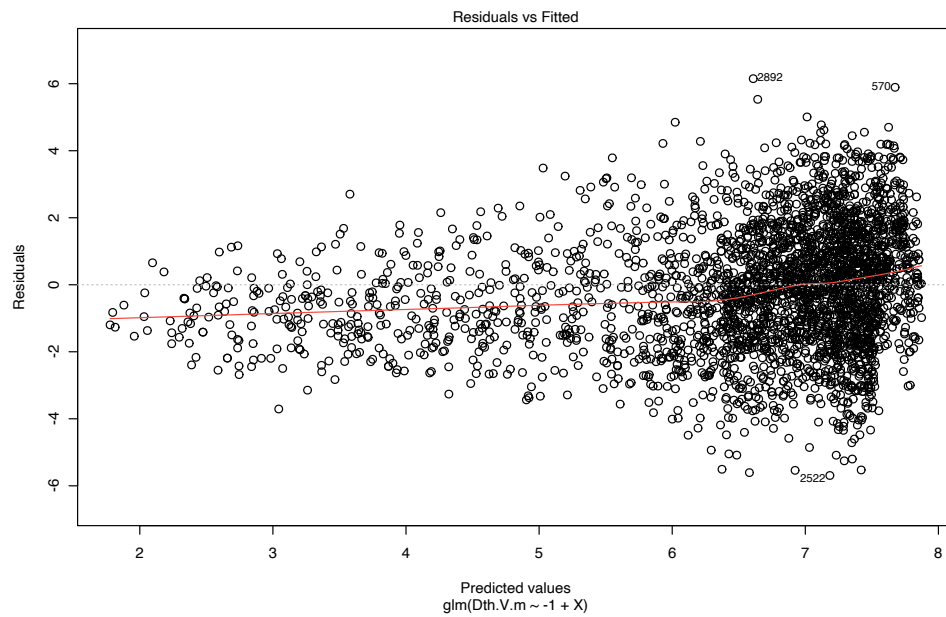
klient č.	BE	riziko dlouhověkosti	
		standardní formule	interní model
1	376.361 Kč	421.821 Kč	419.572 Kč
2	433.903 Kč	470.334 Kč	473.372 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮
5.000	728.523 Kč	796.725 Kč	796.295 Kč
⋮	⋮	⋮	⋮
10.000	767.660 Kč	832.959 Kč	844.307 Kč

Zdroj: Vlastní zpracování

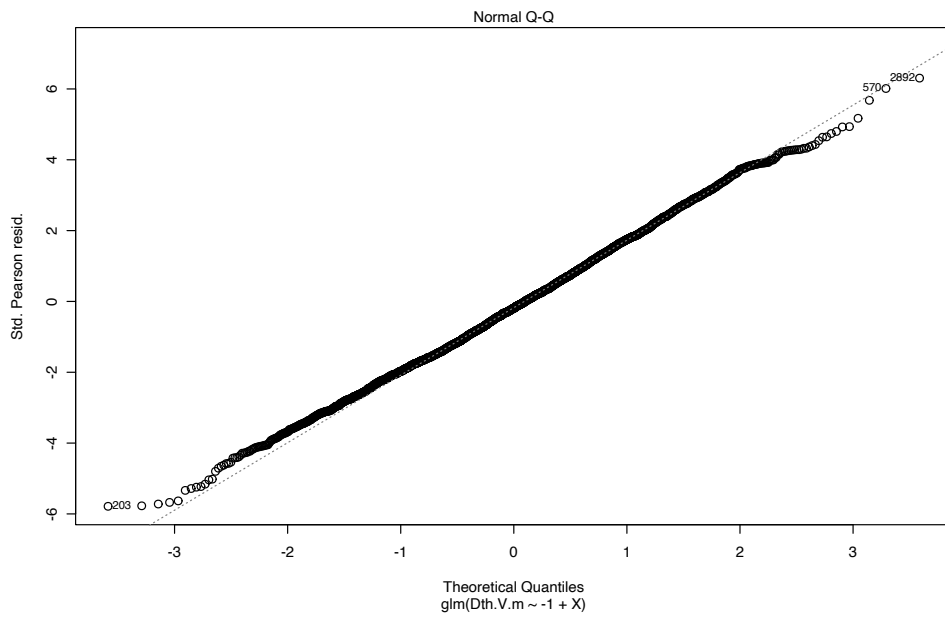
Vyhodnocení pro oblast řízení rizik je provedeno v kapitole 6.1.

5.7 Posouzení kvality CBD modelu

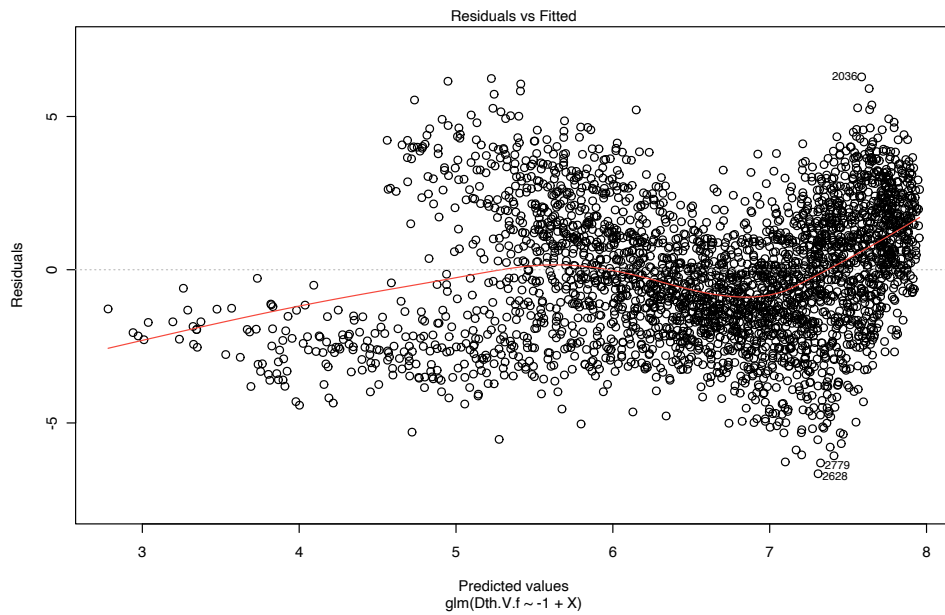
Pro posouzení kvality CBD modelu byla znovu využita rezidua mezi skutečnými a modelovými počty úmrtí, získanými pomocí CBD modelu. Výsledky analýzy reziduí pro mužskou populaci prezentují Obrázky 5.11, 5.12 a pro ženskou populaci Obrázky 5.13, 5.14. Interpretace výsledků analýzy reziduí je obdobná jako v případě LC modelu.



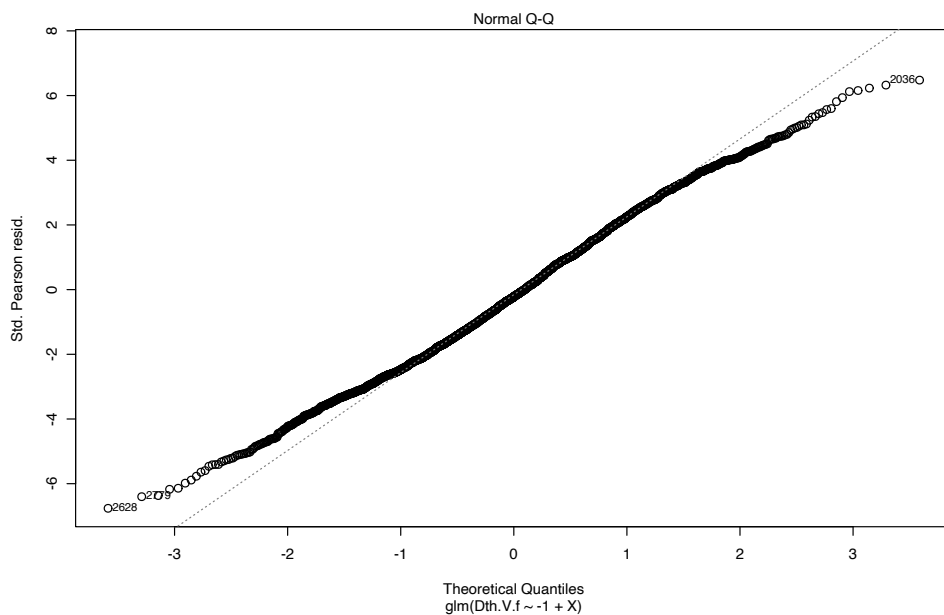
Obrázek 5.11: Analýza reziduí pro mužská data 1



Obrázek 5.12: Analýza reziduí pro mužská data 2



Obrázek 5.13: Analýza reziduí pro ženská data 1



Obrázek 5.14: Analýza reziduí pro ženská data 2

Obrázek 5.13 signalizuje horší kvalitu CBD modelu pro ženskou populaci.

Na základě analýzy reziduí je zřejmé, že uvažovaný model má rezervy. Výsledky získané tohoto modelu byly v práci přesto využity. Analýza reziduí i zde může sloužit jako poklad pro rozhodování o použití vhodnějšího modelu.

6 VYUŽITÍ VÝSLEDKŮ MODELŮ

V kapitolách 4 a 5 byly pomocí dvou různých přístupů získány individuální matice pravděpodobností úmrtí klientů, na základě kterých byly zkonstruovány individuální úmrtnostní tabulky klientů. Při zpracovávání skriptů byla snaha, aby byly názvy důležitých proměnných intuitivní a aby následné srovnávání výsledků bylo snadné. Předmětem této kapitoly je využití a srovnání nejdůležitějších výsledků získaných aplikací dvou stochastických modelů úmrtnosti. Detailní porovnání všech proměnných lze provést s pomocí příložených skriptů (viz Tabulka 3.1).

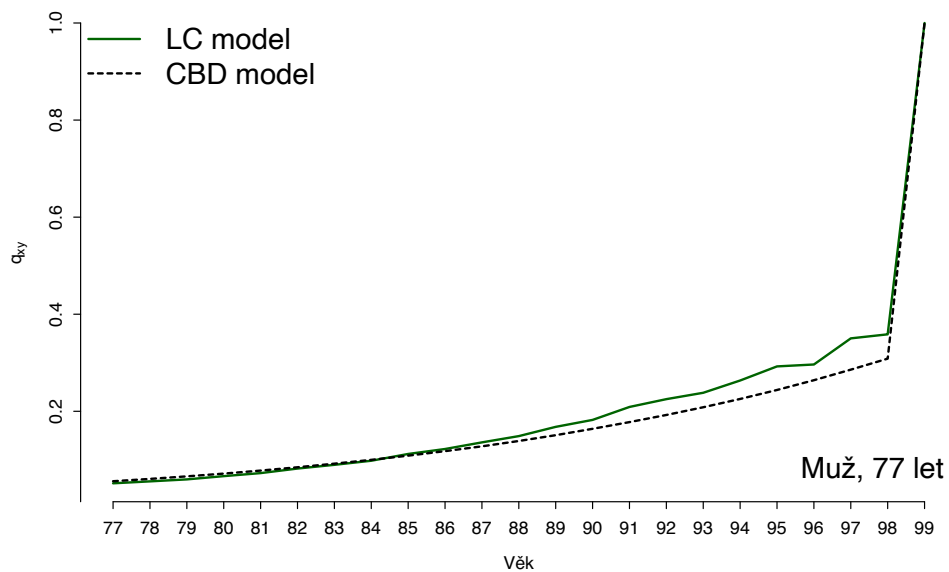
První srovnávanou veličinou jsou individuální vektory pravděpodobností úmrtí \mathbf{q}_{x,y_i} náhodného klienta, 77-letého muže. Srovnání lze vidět v Tabulce 6.1. Pomocí obou stochastických modelů byl vytvořen tzv. BE odhad. Snížením BE odhadů o 20 procentních bodů se získaly odhady stresových pravděpodobností úmrtí (riziko dlouhověkosti) dle standardní formule Solventnost II. Riziko dlouhověkosti bylo kvantifikováno i pomocí simulovaných dat, resp. jako 99,5%-ní kvantily pravděpodobností úmrtí, stanovených na základě simulací. Tyto hodnoty jsou v Tabulce 6.1 uloženy pod názvem interní model.

Tabulka 6.1: Porovnání individuálních vektorů \mathbf{q}_{x,y_i}

	LC model			CBD model		
	BE	dlouhověkost		BE	dlouhověkost	
		standardní formule	interní model		standardní formule	interní model
77	0.052	0.041	0.048	0.056	0.045	0.050
78	0.056	0.045	0.050	0.061	0.049	0.055
79	0.060	0.047	0.052	0.066	0.053	0.058
80	0.066	0.053	0.057	0.072	0.058	0.061
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	1	1	1	1	1	1

Zdroj: Vlastní zpracování

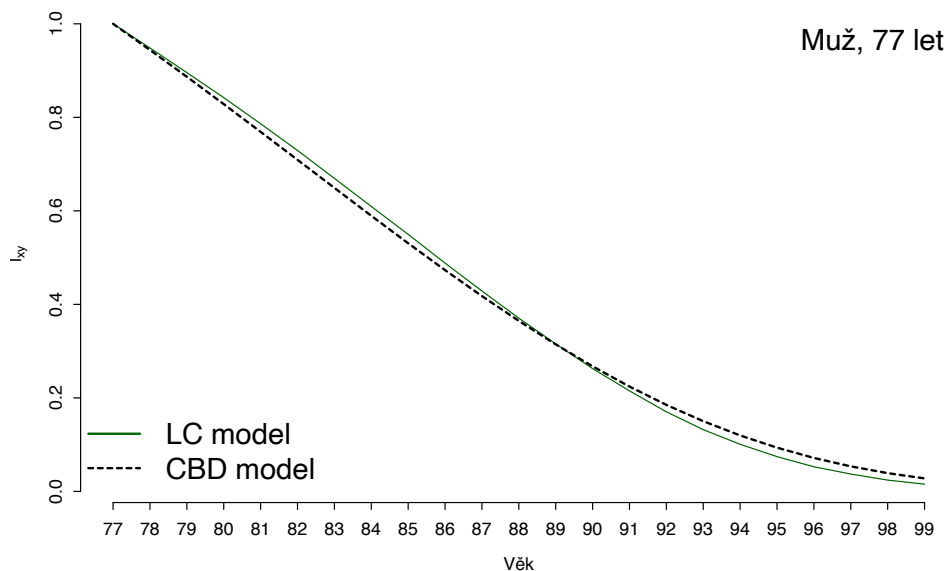
Grafické porovnání individuálních vektorů pravděpodobností úmrtí \mathbf{q}_{x,y_i} náhodně vybraného klienta, 77-letého muže, lze vidět na Obrázku 6.1. Protože by zobrazení všech kvantilů u obou uvažovaných modelů bylo nepřehledné, jsou pro oba modely zobrazeny pouze BE odhady.



Obrázek 6.1: Porovnání individuálních vektorů q_{x,y_i}

Zdroj: Vlastní zpracování

Z Obrázku 6.1 je patrné, že CBD model má (v tomto případě) tendenci podhodnocovat pravděpodobnosti úmrtí ve vyšším věku vybraného člověka. To je patrné i z Obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: Porovnání individuálních vektorů l_{x,y_i}

Zdroj: Vlastní zpracování

V Tabulce 6.2 je uvedeno porovnání výše diskontovaných budoucích závazků vůči celému portfoliu klientů plynoucích z jednotlivých přístupů k modelování.

Tabulka 6.2: Srovnání kapitálových požadavků dle jednotlivých modelů

(v mil. Kč)	riziko dlouhověkosti		
	BE	standardní formule	interní model
LC	7.802,87	8.394,70	8.264,32
CBD	7.795,23	8.407,32	8.499,70

Zdroj: Vlastní zpracování

Jak je patrné z tabulky 6.2, většina hodnot se pro oba modely a pro oba přístupy příliš neliší. Rozdílu si lze všimnout u interního CBD modelu. Již analýza reziduí CBD modelu provedená v kapitole 5.7 napovídala, že model má své rezervy. Pakliže by se na základě zpětného testování (*backtesting*) ukázalo, že CBD model nedává dobré výsledky, bylo by možné buď od modelu upustit, příp. použít kombinaci několika modelů.

Pojišťovna může mít z různých důvodů zájem sledovat očekávané počty žijících klientů ve spravovaném portfoliu v průběhu budoucích let. Všechny výpočty, které byly provedeny v minulých kapitolách umožňují sestavit tuto prognózu. Stačí pouze sečíst charakteristiky $l_{x,y}$ napříč budoucími kalendářními roky. Toto sečtení bylo provedeno zvlášť pro LC a CBD model a zvlášť pro BE odhady, stresové BE odhady a simulované kvantily.

Data o vymírání klientů byla uložena v maticích

- **1.BE.lc**,
- **1.sim.lc**,
- **1.BE.cbd**,
- **1.sim.cbd**,

kde „BE“ značí odhady na základě BE a „sim“ značí odhady na základě simulací. Prognóza postupu vymírání byla stanovena na 50 budoucích let.

Náhled do jedné z výše uvažovaných matic, matice **1.BE.lc** lze vidět v tabulce 6.3.

Tabulka 6.3: Ukázka vymírání portfolia, LC model

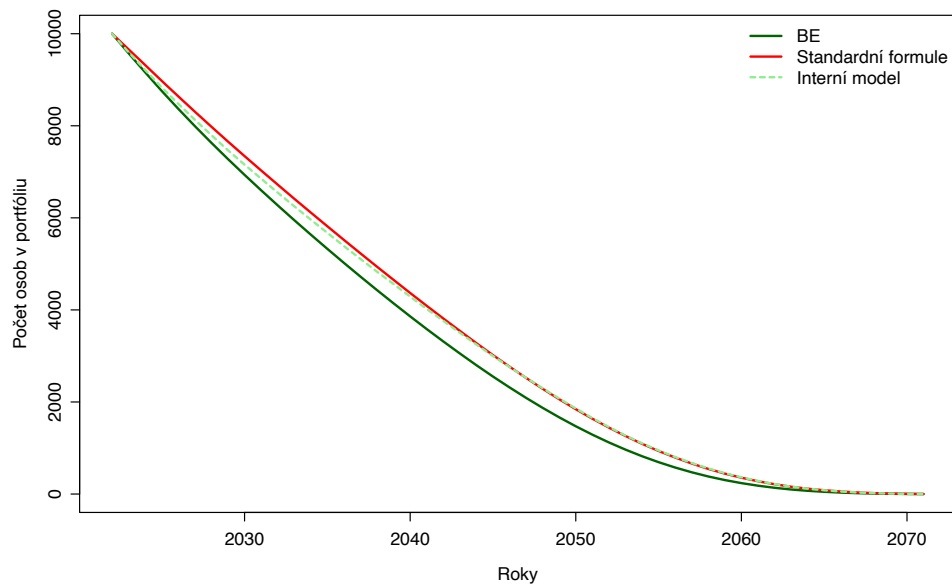
	2022	2023	2024	...	2071	2072
1	1	0,948	0,896	...	0	0
2	1	0,981	0,961	...	0	0
3	1	0,990	0,979	...	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮
10.000	1	0,998	0,994	...	0	0

Zdroj: Vlastní zpracování

V tabulce 6.3 jsou uvedeny výstřižky informací o 1., 2., 3. až 10.000. (tedy posledním) klientovi z portfolia. Aniž by byly známy věky těchto klientů, z posledních sloupců tabulky 6.3 je zřejmé, že žádný z těchto klientů v roce 2072 již nebude součástí portfolia. Vyplývá to z nastavení minimálního věku pro vstup do portfolia (50 let), maximálního věku (99 let) a délkou prognózovaného období (50 let).

Analogická matice vymírání byla zkonstruována pro CBD model.

Na Obrázku 6.3 lze vidět odhad vymírání členů portfolia stanovený pomocí LC modelu, a to na základě BE odhadů, standardní formule a interního modelu. Obrázek pro CBD model vypadá analogicky, proto není v práci uváděn.



Obrázek 6.3: Vymírání portfolia, LC model

Zdroj: Vlastní zpracování

6.1 Stanovení $SCR_{longevity}$

Regulace Solventnost II ukládá pojišťovnám povinnost vytvářet tzv. solventnostní kapitálový požadavek, SCR. Postup výpočtu SCR pro potřeby řízení rizika dlouhověkosti je stanoven jako rozdíl mezi stresovým scénářem a BE odhadem budoucího vývoje.

V práci byly vyjádřeny dva BE odhady budoucích závazků, jeden pomocí LC modelu, druhý pomocí CBD modelu. Tyto BE odhady byly v předcházejících kapitolách podrobeny stresovým scénářům. První způsobem stresového testování byl podle standardní formule, tedy snížením pravděpodobností úmrtí o 20 procentních bodů. Druhý způsob stresového testování bylo vyjádřením 99,5%, resp. 0,5% kvantilu simulovaných dat vývoje úmrtnosti. Oba přístupy by měly být ekvivalentní, protože standardní formule je plošně kalibrována se spolehlivostí 99,5%.

Proměnná $SCR_{longevity}$ značí výši solventnostního kapitálového požadavku v souvislosti s rizikem dlouhověkosti pro celé portfólio klientů. Výpočet $SCR_{longevity}$ je podle [16] stanoven jako rozdíl stresového scénáře a BE odhadu. V Tabulce 6.4 je výše $SCR_{longevity}$ vyjádřena.

$$SCR_{longevity} = NPV_{longevity} - NPV_{BE} \quad (6.1)$$

Tabulka 6.4: Solventnostní kapitálový požadavek SCR

(v mil. Kč)	BE	Riziko dlouhověkosti		$SCR_{longevity}$	
		Standardní formule	Interní model	Standardní formule	Interní model
LC model	7.802,87	8.394,70	8.264,32	591,83	461,45
CBD model	7.795,23	8.407,32	8.499,70	612,09	704,47

Zdroj: Vlastní zpracování

V druhém sloupci tabulky 6.4 jsou uvedeny BE odhady budoucích závazků. Ve třetím sloupci jsou porovnány stresové scénáře pomocí obou stochastických modelů a obou variant výpočtu, tedy pomocí standardní formule a interního modelu. V pátém a šestém sloupci tabulky je vyjádřena výše solventnostního kapitálového požadavku dle jednotlivých variant výpočtu.

Z tabulky 6.4 je patrné, že nejnižší $SCR_{longevity}$ plyne z užití LC modelu v kombinaci se simulacemi. Nejvyšší $SCR_{longevity}$ naopak plyne z užití CBD modelu v kombinaci se simulacemi.

Po provedení všech výpočtů se musí pojišťovna rozhodnout, kterou výši $SCR_{longevity}$ bude akceptovat. Z tabulky 6.4 plynou 4 možné varianty.

Pokud by se pojišťovna rozhodla držet v rámci technické rezervy $SCR_{longevity}$ ve výši 704,47 mil. Kč (tedy v nejvyšší kalkulované výši), znamenalo by to ostražitý postup, pomocí kterého by pojišťovna snížila pravděpodobnost problémů s úhradou svých závazků v budoucnosti. Zároveň by však držením peněz v rezervách přišla o možnost tyto peníze zhodnocovat, vyplatit na dividendách, apod.

Pakliže by se pojišťovna rozhodla držet v rámci technické rezervy $SCR_{longevity}$ ve výši 461,45 mil. Kč (tedy v nejnižší možné kalkulované výši), znamenalo by to agresivnější přístup, který by oproti ostražitému přístupu znamenal vyšší pravděpodobnost problémů s úhradou závazků v budoucnosti. Zároveň by však bylo možné finanční prostředky investovat, vyplatit na dividendách apod.

Při rozhodování je možné pozorovat odlišné zájmy zainteresovaných stran. Zainteresovanými stranami se rozumí zejména akcionáři, management pojišťovny, zaměstnanci a pojištění.

Obecně lze říci, že strany, které nějakým způsobem participují na zisku pojišťovny, mají větší sklon volit agresivnější varianty. Lze tedy očekávat, že akcionáři, a to zejména akcionáři minoritní, budou hlasovat pro nižší hodnoty SCR. Majoritní akcionáři a pravděpodobně i management pojišťovny také participují na zisku, nicméně mají ve společnosti vyšší míru zodpovědnosti a sledují i jiné zájmy, než výplatu dividend. Snaží se zajistit stabilní fungování, dobrou reputaci apod. Proto se dá očekávat, že majoritní akcionáři a management pojišťovny by volil jednu ze středních variant SCR. Poslední skupinou jsou zaměstnanci a pojištěné osoby. Jedná se o skupiny zainteresovaných osob, které většinou nemohou ovlivnit rozhodnutí pojišťovny, nicméně stále mohou mít na situaci názor. Dá se předpokládat, že pojištěné osoby preferují jistotu stabilního pojistitele. Zájem pojištěných je čerpat výhody, kvůli kterým si sjednali pojištění či jiný produkt. Proto by pravděpodobně volili vyšší varianty SCR.

Všechny čtyři varianty výše $SCR_{longevity}$ jsou však přípustné.

ZÁVĚR

V souladu s cílem diplomové práce byly zvoleny a aplikovány dva stochastické modely úmrtnosti, jejichž výstupy byly využity k prognóze úmrtnosti s aplikacemi v oblasti řízení rizik.

V úvodu práce byly popsány základní demografické pojmy zasazené do kontextu oblasti řízení rizik životní pojišťovny s akcentem na regulaci Solventnost II. Následoval popis vybraných stochastických modelů úmrtnosti, Lee-Carterova modelu a Cairns-Blake-Dowdova modelu.

V rámci jejich aplikace byly pomocí programovacího jazyka R na základě dat o úmrtnosti v České republice odhadnuty parametry těchto modelů.

Na základě odhadnutých parametrů byla pomocí extrapolace časových složek modelů provedena predikce budoucího vývoje úmrtnosti v České republice do roku 2081.

Na parametry závislé na čase bylo v rámci obou modelů pohlíženo jako na časové řady. Tyto časové řady byly v případě LC modelu modelovány jako jednorozměrné náhodné procházky s driftem a v případě CBD modelu jako dvojrozměrné náhodné procházky s driftem.

Prognózy budoucích úmrtností byly použity ke kvantifikaci potřebné výše kapitálu spojené s držením portfólia klientů, kterým je doživotně vyplácen důchod. Za tímto účelem bylo vygenerováno fiktivní portfólio klientů o počtu 10.000 osob. Každému klientovi byl náhodně přidělen rok narození a výše důchodu. Na základě odhadnutých parametrů modelů a vytvořených prognóz byla pro každého klienta vytvořena individuální úmrtnostní tabulka, obsahující zejména posloupnost pravděpodobností úmrtí a další charakteristiky.

Aplikace v oblasti řízení rizik spočívala v kvantifikaci rizika dlouhověkosti jako možného scénáře budoucího vývoje. Kvantifikace tohoto rizika byla provedena na bázi vyjádření čisté současné hodnoty budoucích závazků vůči portfóliu klientů. Na základě kvantifikace rizika dlouhověkosti byla následně kalkulována výše solventnostního kapitálového požadavku $SCR_{\text{longevity}}$ pro životní pojišťovny.

K vyjádření solventnostního kapitálového požadavku $SCR_{\text{longevity}}$ dle regulace Solventnost II byly využity dvě metody. Nejprve byl kalkulován solventnostní kapitálový požadavek pomocí tzv. standardní formule Solventnosti II, následně byly využity vlastní interní modely. Podle standardní formule bylo riziko dlouhověkosti vyjádřeno snížením nejlepších

odhadů úmrtností o 20 procentních bodů. Interní model spočíval ve vybrání 0,5%-ních kvantilů ze simulovaných scénářů pravděpodobností úmrtí klientů. Pomocí získaných dat byly vytvořeny čisté současné hodnoty závazků vůči klientům. Z takto kvantifikovaného rizika byl dle směrnice Solventnost II vyjádřen solventnostní kapitálový požadavek jako rozdíl mezi hodnotou závazků stresových scénářů a hodnotou závazků nejlepších odhadů.

Výstupem práce je několik odhadnutých hodnot solventnostního kapitálového požadavku. V závěru práce je uveden krátký komentář k možným úvahám pojišťovny při volbě konkrétní výše solventnostního kapitálového požadavku $SCR_{longevity}$.

Práce byla zpracována užitím programovacího jazyka R. Pro účely vyhotovení práce bylo vytvořeno či přepracováno několik skriptů, které jsou k práci přiloženy.

POUŽITÁ LITERATURA

1. COUGHLAN, Guy; EPSTEIN, David; ONG, Alen; SINHA, Amit; PORTOCARRERO, Javier Hevia; GINGRICH, Emily; KHALAF-ALLAH, Marwa; JOSEPH, Praveen. *Life Metrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks* [online]. JPMorgan, 2007 [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/340738356_LifeMetrics_A_toolkit_for_measuring_and_managing_longevity_and_mortality_risks.
2. *Stochastické modelování úmrtnosti pro více populací*. Praha, 2016. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
3. CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, c2006. ISBN 80-86929-11-6.
4. MACDONALD, Angus S.; RICHARDS, Stephen J.; CURRIE, Iain D. *Modelling mortality with actuarial applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. ISBN ISBN978-1-107-04541-5.
5. *Metodické poznámky* [online]. Praha: Český statistický úřad, 2012-2016 [cit. 2022-04-11]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/documents/10180/45948536/13011917m.pdf/239eede8-9f79-4da2-996f-df0c3fce2669?version=1.0>.
6. *Úmrtnostní tabulky za ČR, regiony soudržnosti a kraje - 2019-2020* [online]. Praha: Český statistický úřad, 2021 [cit. 2022-04-11]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni-tabulky-za-cr-regiony-soudrznosti-a-kraje-i09aftm7w4>.
7. *Metodika užívaná ČSÚ od roku 2018* [online]. Praha: Český statistický úřad, 2018 [cit. 2022-04-09]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/documents/10180/97385476/13016518m.pdf/f05ade4b-562a-4438-9e97-7dac0850bd28?version=1.1>.
8. *Life Expectancy at Birth: Total Years, Czech Republic* [online]. Washington: The World Bank, 2022 [cit. 2022-04-20]. Dostupné z: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?locations=CZ>.
9. *Hodnocení zdravotního stavu (Studie HELEN, Vybrané ukazatele demografické a zdravotní statistiky): odborná zpráva za rok 2005* [online]. Praha: Státní zdravotní ústav, 2006 [cit. 2022-04-20]. ISBN 80-707-1270-8.

10. *Risk analysis in finance and insurance*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. ISBN 1-58488-429-0.
11. ŘEZÁČ, František. *Řízení rizik v pojištnictví* [online]. Brno: Masarykova univerzita, Ekonomicko-správní fakulta, 2011 [cit. 2022-04-20]. ISBN 978-80-210-5637-4.
12. *Zákon č. 277/2009 Sb. Zákon o pojištnictví*. [B.r.].
13. *Solventnost II* [online] [cit. 2021-10-17]. Dostupné z: https://www.historie.cnb.cz/cs/regulace_a_dohled/regulace_a_dohled_v_oblasti_financniho_trhu_ii/solventnost_ii.html.
14. CIPRA, Tomáš. *Riziko ve financích a pojištnictví: Basel III a Solvency II*. Vydání I. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-24-8.
15. *Stochastic Modeling: Theory and reality from an actuarial perspective*. 1. vyd. Canada: International Actuarial Association, 2010. ISBN 978-0-9813968-1-1.
16. *SMĚRNICE EVROPSKÉHO PARLAMENTU A RADY 2009/138/ES o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II)*. Evropský parlament a Rada Evropské unie, 2009.
17. *The R Project for Statistical Computing* [online]. 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: <https://www.r-project.org>.
18. *Human Mortality Database* [online]. University of California, Berkeley (USA), a Max Planck Institute for Demographic Research (Germany), 2022 [cit. 2022-03-17]. Dostupné z: <https://www.mortality.org>.
19. LEE, Ronald D.; CARTER, Lawrence R. *Journal of the American Statistical Association: Modeling and Forecasting U.S. Mortality* [online]. 1992 [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/2290201>.
20. SLAVÍČEK, Ondřej; JINDROVÁ, Pavla. Využití Lee-Carterova modelu pro predikci střední délky života. *Scientific Papers of the University of Pardubice. Series D, Faculty of Economics* [online]. 2013, roč. 18, č. 26, s. 170–179 [cit. 2022-04-09]. ISSN 1211555X. Dostupné z: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true%5C&db=a9h%5C&an=87309403%5C&scope=site>.
21. ARLT, Josef; ARLTOVÁ, Markéta. *Ekonomické časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1319-9.

22. CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: HZ, 1995. ISBN 80-901-9180-0.
23. PACÁKOVÁ, Viera. *Aplikovaná pojistná statistika*. Vydání první. [Pardubice]: Univerzita Pardubice, 2019. ISBN 978-80-7560-259-6.
24. CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; DOWD, Kevin. *Journal of Risk and Insurance: A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration* [online]. 2006 [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: <http://www.macs.hw.ac.uk/~andrewc/papers/jri2006e.pdf>.
25. DOWD, Kevin; CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; COUGHLAN, Guy D.; EPSTEIN, David; KHALAF-ALLAH, Marwa. *North American Actuarial Journal: Backtesting Stochastic Mortality Models: an ex post evaluation of multiperiod-ahead Density Forecasts* [online]. 2010 [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/769998e0a65ea348c1257052003eb94f/e6158fd2566f5ddcc125780600434cbc/%5C\\$FILE/LM_backtesting_models_dec2010.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/769998e0a65ea348c1257052003eb94f/e6158fd2566f5ddcc125780600434cbc/%5C$FILE/LM_backtesting_models_dec2010.pdf).
26. *Seznam penzijních fondů* [online]. Praha: Česká národní banka, 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: https://www.cnb.cz/cs/statistika/menova_bankovni_stat/seznamy-instituci-pro-potreby-menove-a-financni-statistiky/seznam-pf/index.html.
27. *Modely úmrtnosti v životním pojištění*. Brno, 2019. bakalářská. Masarykova univerzita.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A - Tvorba listu QXT	105
Příloha B - Tvorba listu LXT	106
Příloha C - Tvorba INC listu	107
Příloha D - tvorba D.INC listu	108

PŘÍLOHA A - TVORBA LISTU QXT

Níže je zobrazen skript, pomocí kterého byl generován *list* individuálních matic pravděpodobností úmrtí. Jedná se o proceduru v rámci LC modelu.

```
QXT.lc <- list()
for(i in 1:nrow(data)){
  QXT.lc[[i]] <- NA
}
for(i in 1:nrow(data)){
  klient.age <- data[i,2]
  klient.sex <- data[i,3] #0=m, 1=f
  klient.income <- data[i,5]
  klient.row <- klient.age - mn.age + 1
  mtx <- matrix(rep(NA, (mx.age - klient.age + 1)*N.Sim),
               nrow = (mx.age-klient.age+1))
  rownames(mtx) <- klient.age:mx.age
  colnames(mtx) <- paste("Simulace", 1:N.Sim)
  if(klient.sex == 0){
    klient.qxt <- qxt.m
  } else {
    klient.qxt <- qxt.f
  }
  for(j in 1:N.Sim){
    a~<- klient.qxt[, ,j]
    a~<- a[klient.rw:nrow(a),]
    a~<- diag(a)
    mtx[,j] <- a
    mtx[nrow(mtx),] <- 1
    rm(a)
  }
  QXT.lc[[i]] <- mtx
  rm(mtx)
}
```

PŘÍLOHA B - TVORBA LISTU LXT

```
LXT.lc <- list()
for(i in 1:nrow(data)){
  LXT.lc[[i]] <- NA
}
for(i in 1:nrow(data)){
  a~<- QXT.lc[[i]]
  b <- matrix(rep(NA, nrow(a)*ncol(a)), nrow=nrow(a))
  rownames(b) <- rownames(QXT.lc[[i]])
  colnames(b) <- colnames(QXT.lc[[i]])
  b[1,] <- 1
  for(j in 1:(nrow(b)-1)){
    b[j+1,] <- b[j,]*(1-a[j,])
  }
  LXT.lc[[i]] <- b
  rm(b)
}
```

PŘÍLOHA C - TVORBA INC LISTU

```
INC.lc <- list()
for(i in nrow(data)){
  INC.lc[[i]] <- NA
}

for(i in 1:nrow(data)){
  klient.income <- data[i,5]
  INC.lc[[i]] <- LXT.lc[[i]] * klient.income
  rm(klient.income)
}
```

PŘÍLOHA D - TVORBA D.INC LISTU

```
urok <- 0.02 #diskontni urokovva mira

D.INC.lc <- list()
for(i in 1:nrow(data)){
  D.INC.lc[[i]] <- NA
}

for(i in 1:nrow(data)){
  a~<- INC.lc[[i]]
  b <- matrix(rep(NA, nrow(a)*ncol(a)), nrow=nrow(a))
  rownames(b) <- rownames(a)
  colnames(b) <- colnames(a)
  b[1,] <- a[1,]
  for(j in 1:(nrow(b))){
    b[j,] <- a[j,]/((1+urok)^(j-1))
  }
  D.INC.lc[[i]] <- b
  rm(b)
}
```