Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

Hra NIM

Bakalářská práce

2021 Kristýna Pilařová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Kristýna Pilařová**
Osobní číslo:	**E18357**
Studijní program:	**B6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor:	**Management finančních rizik**
Téma práce:	**Hra NIM**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Práce bude obsahovat popis strategické hry NIM, její matematické řešení a dále rozbor jejích variant a možných rozšíření.

Osnova:
- Teorie her a její význam pro ekonomii a další disciplíny.
- Kombinatorické hry: vymezení, pravidla, příklady.
- Hra NIM: její původ, popis, analýza herních strategií, matematické řešení.
- Rozšíření hry NIM, její varianty a zobecnění.

Rozsah pracovní zprávy: **35**
Rozsah grafických prací: **–**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

BOUTON, Charles L. Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. The Annals of Mathematics. 1901, 3(1/4). DOI: 10.2307/1967631. ISSN 0003486X. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/1967631?origin=crossref.
BERLEKAMP, Elwyn R., John Horton CONWAY a Richard K. GUY. Winning Ways for your Mathematical Plays. 2. vydání. A K Peters, 2004, sv. 1. ISBN 1-56881-130-6.
FERGUSON, Thomas S. Game Theory [online]. 2. vydání. University of California at Los Angeles, 2014 [cit. 2020-06-16]. Dostupné z: https://www.math.ucla.edu/ tom/Game_Theory/Contents.html.
CHVOJ, Martin. Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.
BAKER, M. Real numbers and infinite games, part i. http://mattbakerblog.wordpress.com/2014/07/01/real-numbers-and-infinite-games-part-i/, July 2014.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: **1. září 2020**
Termín odevzdání bakalářské práce: **30. dubna 2021**

L.S.

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D.
děkan

Mgr. Libor Koudela, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2020

Prohlašuji:

Práci s názvem Hra NIM jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 15. 9. 2021 Kristýna Pilařová, v. r.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych ráda poděkovala především svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D. za cenné rady, odborné vedení a vstřícný přístup. Poděkování patří i mé rodině za jejich vždy přítomnou podporu a obětavost. V neposlední řadě bych chtěla své poděkování věnovat svému příteli za jeho nakažlivý optimismus, cenné připomínky a motivaci.

ANOTACE

Práce je věnována matematické hře NIM, která je součástí obsáhle vědní disciplíny teorie her. Obsahem práce je uvedení do oblasti teorie her, rozbor kombinatorické hry NIM a nalezení její vítězné strategie. Závěr práce je věnován hrám s neúplnou informací a jejich využití v aukčních hrách.

KLÍČOVÁ SLOVA

aukce, hra NIM, kombinatorické hry, teorie her

TITLE

NIM Game

ANNOTATION

This bachelor thesis is devoted to the mathematical game, known as NIM, which is part of the extensive scientific discipline of game theory. This dissertation consists of an introduction to game theory, an analysis of the combinatorial game, NIM, and a discussion on its winning strategy. The final part of this thesis is dedicated to games with incomplete information, as well as their uses in auctions.

KEYWORDS

auction, combinatorial games, game theory, NIM game

OBSAH

Seznam ilustrací a tabulek

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Úvod

„Les jeux des enfants ne sont pas des jeux, et les faut juger en eux comme leurs plus sérieuses actions.“

-Michel Eyquem de Montaigne

V dnešním světě jsme si na hru zvykli pohlížet jako na něco dětského, na něco, čím se dá bavit pouze ve volném čase. Pro děti je hra však celým jejich dosavadním životem a velmi vážnou činností. Kdy tedy nastane ten čas, kdy člověk přejde od dětského vnímání, které je celé hrou, k dospělému uvažování? Kdy nastane ten bod zlomu? Pravdou je, že k tomuto jevu v lidském životě nikdy nedojde. I pro dospělého člověka, zcela racionálně uvažujícího, je celý život založen na hře.

Pro každého člověka je požadovaným výsledkem hry určitá výhra, ať už je to zlatá medaile, peněžní výhra či uznání. Podobně se hrají i hry, které nejsou na první pohled tak očividné. Pokud hrajeme například deskovou hru, vycházíme z určitých pravidel hry, ale zároveň i z toho, jak hrají protihráči, z tzv. interakce. Člověk je ale vystaven interakcím denodenně. Jsou to běžné situace našeho života, kdy se snažíme udělat to nejlepší rozhodnutí vědomě, či podvědomě na základě chování jiných lidí. Pokud je tedy každodenní život založen na interakcích s jinými lidmi, je nasnadě uvažovat o těchto situacích jako o hrách. Teorie her je vědní disciplína, která se věnuje právě takovému pohledu na okolní situace. Teorie her, jakožto matematická disciplína, přinesla řadu analýz k nalezení užitečných řešení jednoduchých i složitých interakcí.

Moje práce je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola slouží k uvedení do problematiky teorie her. Osvětlí vývoj teorie her od prvních zmínek až po vytvoření zcela nového vědního odvětví. Uvede přehled základních pojmů a různé způsoby, podle kterých je možné teorii her klasifikovat.

Druhá kapitola se věnuje kombinatorickým hrám, které se řadí mezi jedny z nejsnazších v teorii her. Mezi kombinatorické hry patří například celosvětově známá hra šachy. V této kapitole je uvedeno, jak se kombinatorické hry dělí podle možných tahů hráčů. Jsou zde uvedeny rozdíly mezi partyzánskými a nestrannými hrami. Na nestranné hry dále navazuje třetí a čtvrtá kapitola.

Následující dvě kapitoly jsou v mé práci stěžejní. Třetí kapitola rozebírá hru NIM, nejznámější kombinatorickou hru. Kapitola obsahuje malou vsuvku vysvětlující binární číselnou soustavu. Poté již kapitola pojednává o hře NIM. Nejprve uvede původ hry NIM, který sahá až k dávným hazardním hrám. Poté se věnuje popisu a následně analýze hry NIM. Uvede, jak nalézt výherní strategii pro NIM za pomoci Nim-součtu binárních čísel, a tak představí možnost, jak vyhrát, jakkoliv rozdanou hru. Další způsob řešení nalézá v Sprague-Grundyho funkci.

Jelikož se hra NIM dá různě obměňovat a upravovat, vznikají nové verze této hry. Čtvrtá kapitola obsahuje řešení a výherní strategie několika těchto obměn. Další část této kapitoly pojednává o možnosti využití kombinatorických her v ekonomii.

Poslední pátá kapitola je věnována využití her s neúplnou informací v ekonomii. Kapitola využívá tyto hry k aplikaci na aukčních hrách. Nejprve objasní řešení her s neúplnou informací pomocí bayesovských her. Dále osvětlí, co je to aukce a její možné druhy. Jako poslední část této práce jsem zpracovala možné řešení pro optimální nabídku účastníka aukce.

1 TEORIE HER

Na světě existuje mnoho matematických disciplín, které mohou velmi účinně pomoci při řešení důležitých problémů jak v profesním světě, tak i v běžném životě. Jednou z těchto matematických disciplín při řešení nejrůznějších problémů je teorie her. (Chvoj, 2013, s. 11)

1.1 Uvedení do problematiky teorie her

“Games are characterized by a number of players or decision makers who interact, possibly threaten each other and form coalitions, take actions under uncertain conditions, and finally receive some benefit or reward or possibly some punishment or monetary loss.” (“Hry se vyznačují řadou hráčů nebo činitelů s rozhodovací pravomocí, kteří se vzájemně ovlivňují, možná se i navzájem ohrožují a vytvářejí koalice, jednají za nejistých podmínek a nakonec dostávají nějakou výhodu nebo odměnu, případně nějaký trest či peněžní ztrátu.”) (Ferguson, 2020, s. vii)

Teorie her se nezabývá pouze hrami, které jsou většině z nás velmi dobře známé. Její význam spočívá v zabývání se veškerými situacemi, ve kterých dochází k určitému konfliktu. Takové konfliktní situace můžeme nalézt v běžném životě, ale i v řadě specializovaných odvětví od biologie, přes ekonomii až po politiku a válečné konflikty. (Chvoj, 2013, s. 15)

Uveďme si některé příklady z výše zmiňovaných oblastí:

a) **Situace z běžného života:** spor sourozenců o úklid domácnosti, spor manželů o výběr nového nábytku, smlouvání o výši platu při nástupu do nové práce;
b) **Biologie:** uplatnění v biologii nacházejí tzv. evoluční hry, které jsou inspirované Darwinovou evoluční teorií. Tato teorie je založena na myšlence, že silné a úspěšné mutace mají větší sklony k vytlačení slabších a méně schopných mutací (Chvoj, 2013, s. 41). Dalším příkladem z odvětví biologie je například souboj dvou zvířat o potravu. (Chvoj, 2013, s. 15);
c) **Ekonomie:** zkoumání konkurence dvou podobných firem na trhu, vztah mezi zaměstnanci a zaměstnavatelem, vztah mezi prodávajícím a nakupujícím. (Sawa, 2021, s. 4);
d) **Politika:** teorie her stojí v politické oblasti za politickými kampaněmi, za formováním politických koalic či při vyjednávání mezi státy. (Chvoj, 2013, s. 15)

Zjednodušeně se dá říct, že teorie her je všudypřítomná v situacích, kde dochází k nutnosti dojít k nějakému rozhodnutí. (Chvoj, 2013, s. 15)

Teorie her se stala oblíbenou matematickou disciplínou především z toho důvodu, že umožnila kvantifikovat a matematicky popisovat situace, které se dříve zdály ležet mimo rámec exaktních věd. Přestože pojem „hra" může vzbuzovat dojem, že se nejedná o složitou oblast matematiky, ale pouze o jistou formu zábavy, opak je pravdou. Teorie her si ponechává veškeré složité matematické výpočty, pouze dokáže problematiku formulovat srozumitelným způsobem. (Chvoj, 2013, s. 11)

Pilířem této matematické disciplíny je hledání takzvané rovnovážné strategie. Koncept rovnovážné strategie neboli Nashovy rovnováhy vychází z myšlenky, že hráči, kteří se nacházejí v již rovnovážném stavu, nemají žádný důvod svou strategii měnit, jelikož neexistuje žádná strategie lepší než ta, ve které se již nacházejí (Chvoj, 2013, s. 11). Toto tvrzení předpokládá racionální chování všech účastníků. Racionální účastník maximalizuje svůj užitek právě tehdy, když se chová racionálně. (Chvoj, 2013, s. 25)

1.2 Historické vymezení

I přesto, že teorie her jako taková přichází do podvědomí lidí až ve 20. století, její principy byly využívány již po celá staletí.

1.2.1 Př. n. l. - 16. stol.

Základy teorie her sahají již do starověku. Zmínka o bitvě u Delia, kterou nalezneme ve dvou Platónových textech Lachés a Symposion, obsahuje následující situaci. Voják, který čeká v obraně proti nepřátelskému útoku, uvažuje následovné. Pokud splní rozkaz a zůstane, riskuje možnost, že obrana bude útočníky prolomena a voják bude zraněn, či zabit. Další možností je, že obrana vydrží a pravděpodobně nikdo zraněn nebude. V tomto případě ovšem není vojákova přítomnost zcela zásadní. Pokud však nastane třetí možnost a útočníci bitvu vyhrají, pravděpodobnost zranění či smrti se pro vojáka zvyšují. Z této úvahy lze dojít k závěru, že pro vojáka je nejvíce výhodné utéct bez ohledu na to, kdo je vítězem bitvy. Pokud uvážíme, že každý voják se nachází ve stejné pozici, dojdeme k závěru, že nejlepším východiskem pro vojsko je utéct, čímž by došlo ke ztrátě bitvy jako takové. (Ross, 2019)

Tato úvaha značně ovlivnila strategie vojenských vůdců. Například při dobývání Mexika Španěly v 16. století, španělský dobyvatel Cortéz nechal potopit lodě, na kterých s posádkou připlul ke břehům Mexika. K tomuto činu ho vedla nutnost zabránit jeho mužům v útěku, jelikož měli čelit značné převaze Aztéků. Odstraněním lodí, a tím i možnosti útěku, nechal vojákům jedinou možnost, zůstat a bojovat. Nejenom, že dodal svým vojákům značné odhodlání k boji, také značně znejistil aztécké bojovníky. Z psychologického hlediska, když Cortéz zničil jedinou možnost útěku, dokázal tím, jak velmi si jsou Španělé jistí svou výhrou. Jednalo se tedy o velmi dobře provedený klam. Aztékové se proto stáhli a Cortéz dosáhl snadného vítězství. (Ross, 2019)

Můžeme tedy usuzovat, že teorie her se poprvé, ve své nejzákladnější formě, objevila právě ve vojenském odvětví. Vojenští vůdci měli v průběhu dějin tendenci minimalizovat útěky z řad svých vojáků. Ve většině případů se ústupům bránilo zastřelením. Tato informace pozměnila vojákovo rozhodnutí, jelikož šance na přežití při útěku jsou v tomto momentě minimálně stejně vysoké jako při setrvání na pozici. (Ross, 2019)

Mezi první psané zmínky o situaci podobající se dnešním situacím z teorie her je řešení problému uvedeného v Mišně, sbírce židovského zákona. V této sbírce nalezneme řešení rozdělení peněžní pozůstalosti třem vdovám v závislosti na svatebních smlouvách. Východisko daného problému odpovídá řešení kooperativních her (Walker, 2012, s. 1). Podrobněji se tomuto problému věnuje Magdaléna Hykšová ve sborníku *Matematika v proměnách věků. III* v kapitole *Historické počátky teorie he*r.

1.2.2 17. stol. - 30. léta 20. století

Jelikož teorie her značně souvisí s hazardními hrami, je důležité zmínit významný milník v této oblasti, čímž je objevení teorie pravděpodobnosti. Za tento objev vděčíme především B. Pascalovi a P. De Fermatovi a jejich vzájemné korespondenci započaté v roce 1654. Ve svých dopisech se snažili přijít na řešení hazardních her. (Sheynin, 1977, s. 231)

Další významnou prací je publikace Augustina Cournota Výzkumy matematických principů teorie bohatství z roku 1838. V jedné z kapitol Cournot uvádí speciální případ duopolu a jako řešení do jisté míry využívá Nashovu rovnováhu. (Walker, 2012, s. 1)

V roce 1901 Charles L. Bouton představil hru NIM a její kompletní analýzu ve své publikaci *NIM, A Game with a Complete Mathematical Theory*.

Ve 20. letech 20. století vydal Emile Borel čtyři publikace věnované strategickým hrám, které významně přispěly do oblasti teorie her. Ve svých publikacích se zabýval hledáním optimálních strategií. Ve 30. letech téhož století navrhl F. Zeuthen, ve své knize *Problems of Monopoly and Economics Warfare* řešení vyjednávacího problému. F. Zeuthenovo řešení se později považuje za ekvivalentní Nashovu vyjednávacímu řešení, které John Nash publikoval až v 50. letech. (Walker, 2012, s. 2)

1.2.3 Teorie her jako samostatná vědní disciplína

Teorie her jako nová vědní disciplína se ustanovila vydáním knihy *Theory of Games and Economics Behaviour* v roce 1944. Kniha napsaná J. von Neumannem a O. Morgensternem obsahuje shrnutí do té doby známých poznatků a je obohacena o jejich rozvinutí a systematické rozpracování. Autoři poukázali na podobnost mezi analýzami herních modelů a modelováním rozhodovacích situací v ekonomickém odvětví a možnosti využití těchto poznatků v praxi. Od publikace knihy J. von Neumanna a O. Morgensterna se vývoj teorie her značně urychlil. Velké množství autorů přispělo do této oblasti novými poznatky. (Maňas, 1991, s. 11-12)

Důležitým okamžikem pro teorii her byl leden 1950, kdy organizace Rand Corporation představila hru na základě provedeného experimentu, který se dnes nazývá vězňovo dilema.

Teorii her významně obohatil John Nash. Mezi lety 1950-1953 vydal několik publikací, ve kterých se věnoval nekooperativním hrám a teorii vyjednávání. Ve svých publikacích potvrdil existenci rovnovážné strategie pro hry s více hráči, dnes známé jako Nashova rovnováha. Za tento objev získal v roce 1974 cenu John von Neumann Theory Prize. John Nash se také stal držitelem Nobelovy ceny za ekonomii. (Walker, 2012, s. 3)

V roce 1952 vychází první učebnice zabývající se teorií her, *Introduction to the Theory of Games*, kterou napsal J. C. C. McKinsey. Díky této učebnici došlo k rozšíření teorie her i do dalších oborů.

Významným příspěvkem pro teorii her je objevení tzv. Shapleyovy hodnoty, kterou v roce 1953 navrhl L. Shapley. Shapleyova hodnota nabízí řešení situací, v nichž se hráči mohou seskupovat do koalic. (Maňas, 1991, s. 12)

Jedno z prvním využití teorie her v pojišťovnictví je popsáno v publikaci K. Borche *Application of Game Theory to Some Problems in Automobile Insurance*. Borch zde uvádí, jak by se pomocí teorie her dalo určit pojistné pro různé třídy pojištění. Návrhem je využití

Shapleyho hodnoty pro určení přiměřeného pojistného pro všechny třídy rizika. (Walker, 2012, s. 6)

V roce 1965 se rozvinula nová oblast teorie her, tzv. teorie diferenciálních her. Za vznik této oblasti se považuje vydání knihy R. Isaacse *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. Diferenciální hry se vyvinuly z problému formování a řešení vojenských pronásledovacích her. Kniha R. Isaacse se věnuje strategiím rozhodovacích situací, kde jsou tyto strategie popsány jako funkce času. (Walker, 2012, s. 5, 7)

V průběhu let se teorie her čím dál více rozvíjí. Poznatky z této oblasti pronikají do odborných časopisů, dokonce vznikají časopisy zaměřené pouze na teorii her. Například v roce 1972 byl založen časopis *International Journal of Game Theory*, který je vydáván dodnes. Od roku 1989 také vychází časopis *Games and Economic Behaviour*. (Walker, 2012, s. 8, 10)

V roce 1982 vychází kniha *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, napsaná E. R. Berlekampem, J. H. Conwayem, a R. K. Guyem. Kniha *Winning Ways* přispěla do teorie her představením kombinatorických her. (Lazarus et al., 1999, s. 4)

V České republice se teorii her věnuje například M. Maňas, který v roce 1974 publikoval knihu *Teorie her a optimální rozhodování* nebo v roce 1991 vyšla kniha *Teorie her a její aplikace*. (Maňas, 1991, s. 13)

V únoru roku 1998 J. Grossman a B. Turett publikovali v časopise *Mathematics magazine* úlohu nekonečné hry, která se stala základem pro dokázání nespočetnosti množiny reálných čísel. (Baker, 2014)

V roce 2005 získávají R. J. Aumann a T. C. Schelling Nobelovu cenu za ekonomii. Jejich dílo mělo velký vliv na další rozvoj teorie her. (Nobel Prize Outreach, 2005)

V současné době existuje mnoho odborné literatury zabývající se teorií her. Nové poznatky z nejrůznějších odvětví, kde se teorie her využívá, přibývají každým dnem.

1.3 Základní pojmy

Pro lepší pochopení problematiky teorie her si uvedeme přehled základních pojmů.

Tabulka 1 - Základní pojmy

Hra	Kompletní sada pravidel určující, co je a není povoleno.
Hráči	Aktéři konfliktní situace, hry. Aktéry můžou být jedinci, skupiny jedinců, celé organizace či státy.
Herní pozice	Situace, ve které se hráč musí rozhodnout. (akce, tah).
Strategie	Hráčův plán určující, jaká rozhodnutí učinit na každé možné pozici.
Optimální strategie	Hráč volí takové rozhodnutí, které je pro něj nejvíce vhodné.
Výplata	Jakýkoliv výsledek hry. Výplata může být kladná (zisk), nebo záporná (ztráta).
Racionální chování	Předpoklad, že hráči mají snahu optimalizovat své individuální výplaty.

Zdroj: (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 8)

1.4 Klasifikace her

Jelikož je teorie her velmi obsáhlým odvětvím, postupem času se začlenila do různých oblastí. Tyto oblasti je velmi obtížné přesně specifikovat, a to z toho důvodu, že autoři si pro své práce vytvářejí svá vlastní členění. Nejobecnější členění, uváděné M. Maňasem v knize *Teorie her a její aplikace* (1991), je na **maticové hry**, **kooperativní hry** a **diferenciální hry**. Ve své knize také uvádí možné členění her podle následujících kritérií:

1) Počtu účastníků – hráčů;
2) Přítomnost či nepřítomnost náhodných mechanismů;
3) Informovanost hráčů v okamžiku jejich rozhodování;
4) Počty možných strategií;
5) Způsob generování a dělení výher. (Maňas, 1991, s. 20)

Dalším možným rozdělením teorie her je podle informace, kterou hráči o hře mají k dispozici. Hry podle tohoto kritéria rozdělujeme na:

1) Hry s úplnou a dokonalou informací – Hráči mají k dispozici veškeré informace o hře před jejím začátkem. Jsou jim známa pravidla hry, všechny možné tahy všech hráčů

a jejich výplaty. Hráči mají také dokonalou informaci o stavu hry i o tazích, které byly učiněny (Spaniel, 2016). Mezi tyto hry patří například hry kombinatorické, kterým se věnuje kapitola 2;

2) Hry s nedokonalou informací – Hra s nedokonalou informací je stále hra s úplnou informací, tzn. nevíme, jaké tahy hráči učinili, ale víme, jaké jsou jejich výplaty. Nejznámějším příkladem hry s nedokonalou informací je vězňovo dilema. (Spaniel, 2016);
3) Hry s neúplnou informací – Hráči neví, jaké jsou výplaty protihráčů. Hráči disponují soukromou informací, která není známa ostatním hráčům. Tento typ her se většinou řeší nalezením tzv. bayesovy-nashovy rovnováhy (Spaniel, 2016). Hrám s neúplnou informací se podrobněji věnuje kapitola 5.

Tato práce rozděluje teorii her na klasickou teorii her a na kombinatorickou teorii her. Toto rozdělení bylo uvedeno ve článku *Combinatorial Games under Auction Play* (Lazarus et al.) vydaného v roce 1999 v časopise *Games and Economic Behaviour*.

1.4.1 Klasická teorie her

Klasická teorie her, nazývaná také jako maticová teorie her, navazuje na slavnou knihu J. von Neumanna a O. Morgensterna. Jedná se o hry, ve kterých hráči vykonávají tahy souběžně a výplata je prováděna od jednoho hráče k druhému, v závislosti na tazích hráčů. (Lazarus et al., 1999, s. 230)

Maticové hry jsou definované jako hry v normálním tvaru. Hra v normálním tvaru je tvořena:

1) souborem hráčů N, kde $N = \{1, 2, \dots, N\}$;
2) prostory strategií, $A_1, \dots, An$ jednotlivých hráčů;
3) prostory skutečných výplatních funkcí, $f_1\,(a_1, \dots, a_n), \dots, f_n\,(a_1, \dots, a_n)$, jednotlivých hráčů. (Ferguson, 2020, s. ix)

Pro maticové hry platí, že každá maticová hra má Nashovo rovnovážné řešení ve smíšených strategiích. (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 16)

Nashova rovnováha neboli rovnovážná strategie je optimální strategií hry. V případě odchýlení se od této rovnovážné strategie, nemůže hráč v žádném případě svou pozici vylepšit. (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 16)

Maticové hry je možné dělit na hry s nulovým součtem a na hry s nenulovým součtem.

Hry s nulovým součtem

Hra v normálním tvaru je hrou s nulovým součtem tehdy pokud:

$\sum_{i=1}^{n} f_i\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, kde platí, že $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$

Hra má nulový součet tehdy, pokud součet výplat hráčům je nulový, bez ohledu na to, jaké akce hráči zvolí. (Ferguson, 2020, s. ix-x)

Příkladem hry v normálním tvaru s nulovým součtem je známá hra Kámen-Nůžky-Papír. Matice této hry je uvedena v tabulce č. 2.

Tabulka 2 - Maticová hra s nulovým součtem (Kámen-nůžky-papír)

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	+1	-1
Nůžky	-1	0	+1
Papír	+1	-1	0

Zdroj: (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 15)

Hry s nenulovým součtem

V případě her s nenulovým součtem, součet výplat hráčům není nulový. Nastává zde situace, že výhra jednoho hráče neznamená prohru hráče druhého. Hry s nenulovým součtem se dále dělí na:

- **nekooperativní hry**: Hry, ve kterých hráči nemohou uzavírat závazné dohody. (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 19);
- **kooperativní hry**: Hry, ve kterých hráči mohou uzavírat závazné dohody. Zpravidla hráči spolupracují, pokud oběma stranám spolupráce přinese určitou výhodu. (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 25)

1.4.2 Kombinatorická teorie her

Kombinatorická teorie her byla poprvé představena v knize *Winning Ways for your Mathematical Plays* v roce 1982. Na rozdíl od klasické teorie her se zde hráči v tazích střídají a neexistuje zde žádná skrytá informace. (Lazarus et al., 1999, s. 4)

Kombinatorické hry jsou obsáhlou oblastí teorie her, další kapitola této práce se oblasti kombinatorických her věnuje podrobněji.

2 KOMBINATORICKÉ HRY

Nejjednodušším typem her jsou kombinatorické hry. Jedná se o hry dvou hráčů, které obsahují dokonalou informaci a zároveň nejsou ovlivněny náhodou. Hráči se pravidelně střídají po každém tahu. Výsledkem kombinatorických her je pouze pozice výhry a prohry. Tyto hry jsou určené množinou pozic, včetně počáteční pozice začínajícího hráče a koncové pozice, jejíž dosáhnutí je cílem hry. Koncová pozice je definována jako poloha, ze které není možné provést další tah. Po dosažení koncové polohy se jeden z hráčů stává vítězem a druhý poraženým (Ferguson, 2020, s. 3). V některých komplikovanějších hrách může nastat situace, kdy nelze dosáhnout koncové polohy a dojde k remíze, tedy žádný hráč se nestane vítězem. Tato situace by se téměř vždy měla ošetřit určitým pravidlem, aby se možnost remízy ze hry eliminovala. (Ferguson, 2020, s. 5)

Za kombinatorické hry nelze považovat hry typu: poker, kostky nebo kámen-nůžky-papír z toho důvodu, že neobsahují dokonalou informaci a většinou jsou ovlivněny náhodou. Hry, které splňují výše zmíněná pravidla, lze dělit do dvou skupin. (Ferguson, 2020, s. 5)

2.1 Nestranné hry

První skupinou jsou nestranné hry, ve kterých mají hráči stejné možnosti tahů v dané pozici (Ferguson, 2020, s. 4-5). Princip nestranných her si nejlépe vysvětlíme uvedením příkladu, na kterém budeme demonstrovat pravidla, analýzu a způsob nalezení vyhrávací strategie.

Příklad 1

Uvedeme si velmi jednoduchou hru, kterou uvádí T. Ferguson ve své publikaci (2020). V této hře se postupně odebírá 21 sirek z hromádky. Nejprve si zavedeme pravidla, podle kterých se hra hraje. Hra je pro dva hráče, přičemž každý hráč v rámci jednoho tahu odebere minimálně jednu a maximálně tři sirky. Hráči navazují na pozici hry, kterou zanechal hráč při předchozím tahu. Vítězem se stává hráč, který odebere poslední sirku. (Ferguson, 2020, s. 4)

Pro analyzování vyhrávající strategie využijeme metodu zpětné indukce, tedy analyzování hry od konečné pozice po pozici počáteční. Pokud v hromádce zbyly pouze jedna, dvě nebo tři sirky, hráč, který je jako další na tahu, vyhrává odejmutím všech zbylých sirek. (Ferguson, 2020, s. 4)

Z předešlé úvahy tedy vychází, že hromádka o 4 sirkách znamená prohru pro hráče, který je v tahu na řadě. Tento hráč nemá jinou možnost než po svém tahu zanechat pozici 1,2 nebo 3, popsanou v předešlém odstavci. Jinými slovy můžeme říct, že pokud hráč po svém tahu zanechá hromádku o 4 sirkách, vyhrál. (Ferguson, 2020, s. 4)

Obdobně je to se situací, kdy se v hromádce nachází 5,6 nebo 7 sirek. Hráč, který je v tahu na řadě, dosáhne výhry tím, že odebere takový počet sirek, aby v hromádce zanechal čtyři sirky. Jedná se o klíčovou pozici popsanou v předchozím odstavci. Můžeme si zde všimnout jisté periodicity. Pozice 1, 2, 3 jsou stejné jako pozice 5, 6, 7, z čehož vyplývá, že pokud hromádka bude obsahovat 8 sirek, jedná se o stejnou situaci jako s hromádkou obsahující 4 sirky nebo sirku žádnou. Tyto pozice se nazývají klíčové a v tomto případě se tedy jedná o pozice, které jsou násobky čtyř. (Ferguson, 2020, s. 4)

Hráč, který po každém svém tahu zanechá hru v příslušné klíčové pozici, zcela jistě vyhraje. Jedná se o jeho vyhrávající strategii. Ve hře s 21 sirkami je tedy ve vyhrávající pozici ten hráč, který je na tahu jako první a odebere z hromádky jednu sirku. Hráč po svém tahu zanechá 20 sirek, což je násobek čtyř a hráč, který vychází z této klíčové pozice, zcela jistě prohraje. (Ferguson, 2020, s. 4)

Na základě výše zmíněné jednoduché hry můžeme všechny pozice hráčů rozdělit do dvou skupin. Klíčové pozice, které jsou vyhrávající pro hráče, který hrál v předešlém tahu, se nazývají P-pozice. Druhou skupinou jsou N-pozice, tedy pozice neklíčové, které jsou vyhrávající pro hráče, který je momentálně na tahu. (Ferguson, 2020, s. 5)

Pro P-pozice a N-pozice platí následující tři tvrzení. (Ferguson, 2020, s. 6)

1) Všechny konečné pozice jsou P-pozice;
2) Z každé N-pozice existuje alespoň jeden tah do P-pozice;
3) Pro všechny tahy z P-pozice platí, že končí v N-pozici.

Zatím byla uvedena pouze situace, kdy hráč, který provedl poslední tah, vyhrál. Existuje však také varianta kombinatorických her zvaná Misère hra. Hráč, který dosáhl koncové pozice, prohrál. V případě této verze musíme změnit výše zmíněné tvrzení (1). Za koncové pozice se považují N-pozice. Přibližme si na následující analýze příkladu 2, jehož zadání uvedl Ferguson ve své publikaci. (2020, s. 7)

Příklad 2 - Misère hra

Vycházejme z prvního příkladu. Hráč, který odebere poslední sirku, prohrál. Pokud víme, že žádná sirka v hromádce je N-pozice, pak je snadné si odvodit, že hromádka o 2, 3 nebo 4 sirkách je P-pozice.

Koncová pozice je tedy hromádka s žádnou sirkou. Víme, že koncová pozice se v případě Misère hry označuje jako N-pozice. Pokud je pozice 0 N-pozicí, pak pozice 1 je P-pozicí. Hráč, který vychází ze situace, kde je pouze jedna sirka, nemá jinou možnost, než odebrat poslední sirku a tím prohrát. Stejnou úvahou dojdeme k závěru, že 2, 3, 4 jsou N-pozice. Hráč je schopen se z těchto pozic, odebráním příslušného povoleného počtu sirek, dostat na P-pozici. Zmíněnou analýzu můžeme rozepsat následujícím způsobem.

Tabulka 3 - Analýza N a P-pozic

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
pozice	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	...

Zdroj: (vlastní zpracování)

Pokud si příslušné P-pozice zapíšeme jako P = {1, 5, 9, 13, 17, 21}, zjistíme, že se jedná o posloupnost $a_n = 4n + 1$, kde $n \geq 0$.

Počáteční pozicí je hromádka o 21 sirkách, jedná se o P-pozici. Číslo 21 je násobkem čtyř plus 1. Vyhrávající strategie v tomto případě je taková, že hráč nebude hrát jako první, a pokud se bude držet výše zmíněné analýzy a po každém svém tahu zanechá hru v P-pozici, zcela jistě vyhraje.

Příklad 3 - Hra 31

V této hře budeme narozdíl od předchozích příkladů 1 a 2 hodnoty přičítat.

Mějme na stole rozloženo 24 karet, kde od každé barvy (tzn. srdce, listy, žaludy, kule) je na stole 6 karet v rozmezí eso - 6. Uvažujeme, že eso nabývá hodnoty 1. Hráči postupně odebírají karty. Hodnota právě odebrané karty se vždy připočte k součtu hodnot karet odebraných v předchozích tazích. Hra dosáhne koncové pozice ve chvíli, kdy je dosažen součet 31. Hráč, který této koncové pozice dosáhl, se stává vítězem. (Ferguson, 2020, s. 7)

Pozice 31 je tedy koncová pozice, proto ji označíme jako P-pozici. Každá další P-pozice bude o 7 menší. Všechny pozice mezi P-pozicemi označíme za N-pozice, protože hráč, který vychází z těchto pozic, vyhraje tím, že přidá takovou kartu, jejíž hodnota po přičtení k stávajícímu součtu dá hodnotu 31.

Pro přehlednost si N-pozice a P-pozice zapíšeme do následujících dvou množin.

N = {30, 29, 28, 27, 26, 25, 23, 22, 21, 20, 19, 18, …}

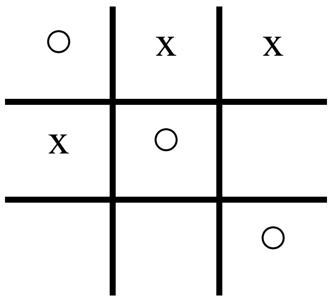
P = {31, 24, 17, 10, 3}

Nejlepší šanci na výhru má začínají hráč. Počáteční pozice je 0, což je N-pozice. Začínající hráč v pozici 0 přidá kartu s hodnotou 3, čímž po svém tahu zanechá P-pozici. Všechny možné tahy následujícího hráče vedou pouze do N-pozic. Pokud začínající hráč v průběhu hry neprovede žádnou chybu a po svých tazích vždy zanechá hru v P-pozici, jeho výhra je jistá.

2.2 Partyzánské[1] hry

Druhou skupinou jsou partyzánské hry, které jsou velmi oblíbené ve společnosti. V této skupině her má každý z hráčů k dispozici odlišné možnosti tahů. Mezi klasické partyzánské hry patří například šachy nebo dáma, kde každý z hráčů má k dispozici odlišnou barvu figurek. (Ferguson, 2020, s. 3)

Jednoduchým příkladem partyzánské hry jsou například piškvorky viz obrázek č.1. Každému hráči je přidělena možnost vepsat kolečko nebo křížek do hracího pole. Ani jeden z hráčů nemůže využít protihráčova znaku ve svůj prospěch.



Obrázek 1 - Piškvorky

Zdroj: vlastní zpracování

[1] Jako partyzánské nazýváme takové hry, které nejsou nestranné.

3 Hra NIM

NIM je nejznámější z kombinatorických her. Víceméně je jednoduché ji hrát, pokud dva hráči mají k dispozici několik malých předmětů jako např. sirky, kamínky, korálky či mince. Nalezení výherní strategie pro NIM již ale není tak jednoduché jako v předchozí kapitole. Namísto analyzování hry pomocí zpětné indukce se pro nalezení výherní strategie v NIM využívá binární soustavy. Než se začneme věnovat hře NIM jako takové, je vhodné si připomenout převod desítkové soustavy do binární.

3.1 Číselné soustavy

Desítková a binární soustava jsou jedny z nejvyužívanějších číselných soustav, se kterými se můžeme setkat. Číselnou soustavou rozumíme určitá pravidla pro zápis hodnot za pomocí číslic. Tato podkapitola slouží k čtenářovu připomenutí binární soustavy a jejího převodu ze soustavy desítkové.

3.1.1 Převod desítkové soustavy do binární

Dvojková soustava pro zápis hodnot využívá pouze znaky 0 a 1. I přesto, že binární soustava využívá pouze dva znaky k zápisu hodnot, lze v této soustavě vyjádřit jakékoliv reálné číslo. Zápis čísla získáme součtem postupných mocnin čísla 2. V dalším kroku zapíšeme 1 tam, kde se mocnina v daném řádu nachází, a 0 zapisujeme pro ty mocniny, které chybí. V tabulce č. 4 je ukázán převod prvních deseti čísel desítkové soustavy do dvojkové.

Tabulka 4 - Převod desítkové soustavy do binární

zápis hodnoty v desítkové soustavě	Postup převodu	zápis hodnoty v binární soustavě
0	$0 \cdot 2^0$	0000
1	$1 \cdot 2^0$	0001
2	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0010
3	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0011
4	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0100
5	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0101
6	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0110
7	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0111
8	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1000
9	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1001

Zdroj: (vlastní zpracování)

Stejně jako v desítkové, tak i v binární soustavě lze provádět různé matematické operace, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. Pro pochopení následujících kapitol je důležité vysvětlit princip sčítání binárních čísel.

3.1.2 Sčítání binárních čísel

Součet binárních čísel funguje obdobně jako součet čísel v desítkové soustavě. Vysvětleme si princip sčítání na praktickém příkladu:

Mějme čísla 9 a 11. Využijeme postupu uvedeného v předchozí kapitole a daná čísla převedeme do binární soustavy.

9 => 1001

11 => 1011

Tato dvě čísla zapíšeme rovnoměrně pod sebe do sloupců a podtrhneme.

1 0 0 1

1 0 1 1

Nyní, obdobně jako v desítkové soustavě, sčítáme dvě čísla ležící pod sebou. Sčítání začínáme zprava. Výsledkem součtu může být 0, 1 nebo 2. V případě 0 a 1, zapisujeme jako výsledek právě tato čísla. Komplikace se vyskytuje, pokud součet vyjde 2. V této situaci zapisujeme jako výsledek 0 a do dalšího sloupce přenášíme 1.

1 0 0 1

1 0 1 1

1 0 1 0 0

3.2 Původ hry

Hru NIM pojmenoval, popsal a analyzoval Ch. L. Bouton ve své práci *"Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory."* Někteří odborníci se domnívají, že název NIM je archaické anglické slovo a znamená "vzít". (Dartcy, 1995)

Sám Bouton ale neuvádí původ jména ani historické pozadí této hry. Pouze se zmiňuje o hře Fan-Tan (čínské hazardní hře) jako o obdobě hry NIM.

První písemná známka o hře podobné NIM se nachází v rukopisu *"De Viribus Quantitatis"* od italského matematika Fra Lucy Bartolomea de Pacioliho. V první části této sbírky nalezneme Problém XXXIIII, který dává za úkol dokončit libovolné číslo před protivníkem, aniž by hráč použil větší číslo, než je určeno. Pacioli zde navrhuje příklad, kdy se dva hráči snaží docílit čísla 30 přidáváním čísel od 1 do 6. V této hře se objevují určité znaky Boutonova NIMu. V průběhu staletí navazují na Pacioliho práci různí matematikové s vlastními verzemi a řešeními této hry. Žádný z nich ale nedokázal dodat hře jasnou podobu a analýzu tak jako právě Bouton v roce 1901. (Rougetet, 2014, s. 359)

Vzhledem k faktu, že Boutonova analýza výherní strategie pro NIM je založena na binární soustavě, netrvalo dlouho a hra NIM byla aplikovaná do programování. V roce 1940 byl sestrojen Nimatron, první počítač, který měl v sobě naprogramovanou výherní strategii NIMu. Tento počítač odehrál 100 000 her proti lidským hráčům a vyhrál v 90 % her. (Dartcy, 1995)

3.3 Popis hry

NIM je hra určena pro dva hráče. Princip této hry spočívá v odebírání předmětů ze tří hromádek umístěných na hrací ploše. Předměty v hromádkách můžou být libovolné, stejně tak jako jejich počet v každé z nich. Označme počty předmětů v hromádkách x_1, x_2 a x_3. Pravidla hry jsou následující:

- Hráči se pravidelně střídají po každém tahu;
- Hráč, který je na řadě, si zvolí libovolnou hromádku pro svůj tah;
- Z vybrané hromádky je povinen odebrat alespoň jeden předmět a nejvýše může odebrat jednu celou hromádku;
- Všechny odebrané předměty za jeden tah mohou pocházet pouze z jedné hromádky;
- Hráč, který odebere poslední předmět či předměty na hrací ploše, vyhrává. (Ferguson, 2020, s. 11)

Stejně jako kombinatorické hry zmiňované v kapitole 2, má i NIM svou výherní strategii. Pokud by se hrála NIM $(0, 0, x)$, kde $x > 0$, jedná se v zásadě o NIM s jednou hromádkou a řešení by bylo poměrně jednoduché. Vyhrál by ten hráč, který odebere celou hromádku. Tudíž jakákoliv situace $x > 0$ je v tomto případě N-pozicí. Uvažujme NIM se dvěma hromádkami $(0, x_2, \; x_3)$, kde $x_2 \; a \; x_3 > 0$. Koncová pozice hry je (0, 0, 0), tzn. $x_2 = \; x_3$, je tedy zřejmé, že P-pozicí je jakákoliv situace, kdy v hromádkách je stejný počet předmětů. Různý počet v hromádkách je N-pozice. Z kapitoly 2 již víme, že z každé N-pozice je možné docílit P-pozice, tedy i pozice koncové (0, 0, 0). Pro NIM se třemi hromádkami je nalezení výherní strategie poněkud komplikovanější. V tomto případě již neplatí, že stejný počet předmětů v hromádkách je P-pozicí. (Ferguson, 2020, s. 11)

3.4 Analýza strategie

Bouton (1901) dokázal existenci tzv. bezpečné kombinace. Bezpečná kombinace má podle Boutona znamenat určitý soubor čísel, který po svém tahu hráč zanechá, druhý hráč pak nebude schopen vyhrát za předpokladu, že první hráč neudělá v průběhu hry žádnou chybu. Bezpečnou pozicí tedy rozumíme P-pozici, podle terminologie využívané v kapitole 2. N-pozice pak v této kapitole označujeme jako nebezpečné pozice.

Bezpečnou pozici nalezneme využitím tzv. NIM-součtu binárních čísel. Kapitola 3.1.2 obsahovala vysvětlení součtu dvou binárních čísel. NIM-součet se od normálního součtu binárních čísel liší pouze tím, že v něm nedochází k přenosu cifry do následujícího sloupce, pokud součet pod sebou ležících čísel dosahuje hodnoty 2 či výše. V případě NIM-součtu zapisujeme jako výsledek 0 tam, kde je součet pod sebou ležících čísel sudý, a 1 tam, kde je součet čísel lichý. Bezpečná kombinace nastane, pokud NIM-součet počtu předmětů v hromádkách bude roven nule pro každý sloupec. V případě, že NIM-součet pro některý ze sloupců nevyjde nulový, nazýváme tuto pozici jako nebezpečnou. (Bouton, 1901, s. 36)

Nyní dokažme, že NIM s dvěma hromádkami je v bezpečné pozici právě tehdy, když obě hromádky mají stejný počet předmětů.

Hypotéza: NIM-součet čísel 10 a 10 je roven 0.

Důkaz:

1 0 1 0

1 0 1 0

0 0 0 0

NIM-součet pro každý sloupec vychází 0. Hra se nachází v bezpečné pozici.

Na obrázku č. 2 je zobrazen příklad bezpečné kombinace a příklad nebezpečné kombinace pro NIM o třech hromádkách.

1 1 0 1	1 0 1 0
0 1 0 0	0 0 1 0
1 0 0 1	1 1 0 1
0 0 0 0	**0 1 0 1**

Obrázek 2 - Příklad bezpečné pozice (vlevo) a nebezpečné pozice (vpravo)

Zdroj: vlastní zpracování

Z obrázku je zřetelné, že (13, 4, 9) je kombinací bezpečnou. Bouton (1901, s. 36) ve své práci dále uvádí, že pokud jsou dána dvě čísla, je vždy jasně stanovené číslo třetí tak, aby společně tvořily bezpečnou kombinaci.

V Boutonově publikaci nalezneme dva teorémy, ve kterých jako první udává obecné principy výherní strategie.

Teorém I: *„Pokud hráč A zanechá po svém tahu bezpečnou kombinaci, hráč B není schopen po svém tahu bezpečnou kombinaci zanechat."* (Bouton, 1901, s. 36)

Tato hypotéza je založena na faktu, že pokud je hra v bezpečné pozici, pak počty předmětů ve dvou hromádkách jednoznačně definují počet předmětů ve třetí hromádce. (Bouton, 1901, s. 36)

Uvažujme bezpečnou pozici (13, 4, 9), kterou po svém tahu zanechal první hráč. Binárně situace vypadá následovně:

1 1 0 1

0 1 0 0

1 0 0 1

Nyní je na řadě druhý hráč, který je povinen odebrat předmět či předměty z jedné hromádky. Jakkoliv druhý hráč sníží počet ve zvolené hromádce, nemá možnost po svém tahu zanechat v hromádce takový počet předmětů, který je definován počtem v ostatních hromádkách.

Nechme druhého hráče odebrat 3 předměty z první hromádky, tzn. na (10, 4, 9). Situace po hráčově tahu bude vypadat následovně:

1 0 1 0

0 1 0 0

$\underline{1\ 0\ 0\ 1}$

0 1 1 1

Nim-součet čísel není nulový, tudíž se hra ocitá v nebezpečné pozici.

Teorém II: „*Pokud hráč A po svém tahu zanechá bezpečnou pozici a hráč B odebere určitý počet předmětů z jedné hromádky, hráč A může vždy odebrat určitý počet předmětů z jedné ze zbývajících dvou hromádek a znovu dosáhnout bezpečné kombinace.*“ (Bouton, 1901, s. 36)

První hráč, který je teď znovu na řadě, je schopen docílit bezpečné pozice odebráním určitého počtu předmětů z konkrétní hromádky.

Výběr hromádky, ze které hráč bude odebírat za účelem dosažení bezpečné pozice, probíhá následovně:

Hráč provede NIM-součet hry v dosavadní pozici. Za předpokladu, že hra se nachází v nebezpečné pozici, v jejím NIM-součtu se bude nacházet jedna či více jedniček. Hráč hledá 1 v tom sloupci, jehož NIM-součet je jednička nejvíce vlevo. Taková jednička totiž vyjadřuje nejvyšší mocninu dvojky právě toho čísla, které je zapotřebí zmenšit. Nalezenou 1 ve sloupci hráč změní na 0 a směrem doprava upravuje čísla tak, aby mu vycházela bezpečná kombinace. Po úpravě binárního čísla hráč odebere z dané hromádky přesně tolik předmětů, aby počet v hromádce byl shodný s upraveným binárním číslem. (Bouton, 1901, s. 36)

Z předchozího příkladu tedy vyplývá, že první hráč bude odebírat z druhé hromádky, a to přesně jeden předmět. Hráč zanechal hru v následující bezpečné pozici:

$$\begin{array}{c} 1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1 \\ \underline{1\,0\,0\,1} \\ \mathbf{0\,0\,0\,0} \end{array}$$

Hráči se nadále budou střídat v tazích, a pokud první hráč neudělá v průběhu hry chybu ve výpočtu kolik předmětů a z jaké hromádky odebrat, jistě vyhraje.

Nyní se objasnilo, že výherce hry závisí na tom, kdo jako první zanechá bezpečnou kombinaci. Když se vrátíme na úplný začátek hry, dokážeme říct, který z hráčů s největší pravděpodobností vyhraje. Pokud hra začíná v bezpečné kombinaci, začínající hráč po svém tahu zanechá nebezpečnou pozici. Z toho je zřejmé, že druhý hráč, se správnou strategií, vyhraje. Pokud je hra ze začátku v nebezpečné pozici, první hráč je schopen svým tahem docílit pozice bezpečné, a pokud si ji udrží, vyhrává. (Bouton, 1901, s. 37)

Výhra prvního hráče tedy závisí na tom, zda hra bude rozdána v bezpečné, nebo nebezpečné pozici. Bouton ve své práci uvádí matematické řešení výpočtu umístění bezpečné kombinace v začátku hry. Předpokladem pro výpočet je fakt, že počet předmětů v hromádkách je určen náhodou, každá hromádka obsahuje méně než 2^n a více než 0 předmětů ($0 < x_1 < 2^n; 0 < x_2 < 2^n; 0 < x_3 < 2^n$).

Výpočet pro počet různých hromádek je:

$$\frac{2^{n-1}(2^{2n} - 1)}{3}$$

Za stejných podmínek pak vypočítáme počet bezpečných kombinací:

$$\frac{(2^{n-1} - 1)(2^n - 1)}{3}$$

Šance na hru začínající v bezpečné kombinaci vypočítáme jako:

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}(2^n + 1)}$$

Analýza výherní strategie pro 4 a více hromádek se již nijak neliší od analýzy pro hru se třemi hromádkami. Nim-součet lze provést s jakýmkoliv počtem hromádek. (Bouton, 1901, s. 39)

Hra NIM je unikátní v tom, že pomocí analýzy její výherní strategie můžeme definovat výherní strategii jakékoliv nestranné kombinatorické hry.

3.5 Analýza strategie pomocí Sprague-Grundyho funkce

Sprague-Grundyova hypotéza: Jakákoliv pozice nestranné kombinatorické hry je ekvivalentní k NIM o jedné hromádce o libovolném počtu předmětů. (Rao, 2019)

Pro důkaz této hypotézy definujme Sprague-Grundyho funkci $g: X \to \{0, 1, 2, \dots\}$, kde X je množina možných pozic.

Sprague-Grundyho funkce:

$$g\ (x) = \min\ \{n \geq 0 : n\ \neq g\ (y)\ pro\ y\ \in F\ (x)\}$$

Jinými slovy hodnota Sprague-Grundyho funkce (dále zkratka SG hodnota) $g(x)$ je nejmenší kladné celé číslo, které se nevyskytuje mezi hodnotami F(x), které reprezentují možné dosažitelné pozice z pozice x. Funkci lze zapsat také jako:

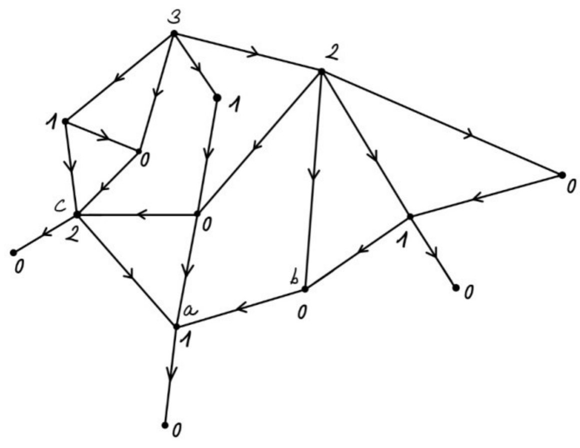
$$g(x) = \text{mex}\ \{g(y) : y\ \in F(x)\},$$

kde pojem mex (minimální vyloučená hodnota z množiny nezáporných celých čísel) je definován jako nejmenší nezáporné celé číslo, které není v množině. (Rao, 2019)

Pro každou konečnou pozici platí že $g(x) = 0$, tudíž pro každou P-pozici platí, že $g(x) = 0$.

Pro každou pozici x, kde $g(x) \neq 0$ platí, že existuje alespoň jeden tah na pozici y, kde $g(y) = 0$. (Ferguson, 2020, s. 20)

Výše uvedené poznatky si nyní vysvětleme na následující graficky znázorněné hře. Ve hře je cílem nalézt induktivní metodou všechny SG hodnoty pro vrcholy grafu. Nejprve přiřadíme 0 ke všem koncovým pozicím (pozicím, ze kterých není možné se posunout dále), pak pomocí induktivní metody přiřazujeme SG hodnoty k ostatním vrcholům podle výše zmíněné definice SG funkce.



Obrázek 3 - Grafická hra

Zdroj: vlastní zpracování

Příklad vyplnění grafu na obrázku č. 3. Z vrcholu a je pouze jedna možnost tahu, a to do koncové pozice 0, z toho plyne, že nejmenší kladné číslo kromě 0 je 1. U vrcholu b je to podobně. Zde je opět pouze jedna možnost tahu, a to do vrcholu a, kterému byla přiřazena SG hodnota 1, proto k vrcholu b přiřazujeme hodnotu 0. Z vrcholu c máme dvě možnosti tahu, do 0 nebo 1, proto k vrcholu c přiřazujeme číslo 2 jako nejmenší kladné číslo mimo 0 a 1. Tímto způsobem nakonec přiřadíme SG hodnoty ke všem vrcholům grafu.

Nyní si pojďme SG funkci analyzovat na NIM. Uvažujme NIM o jedné hromádce obsahující 6 sirek, přičemž můžeme odebrat 1, 2 nebo 3 sirky. Množina možných tahů je definována jako $S = \{1, 2, 3\}$. Podle definice Sprague-Grundyho funkce uvedené výše můžeme hru zapsat ve tvaru:

$g(6) = \text{mex}\ \{g(5), g(4), g(3)\}$, dále rozepisujeme jako:

$g(5) = \text{mex}\ \{g(4), g(3), g(2)\}$,

$g(4) = \text{mex}\ \{g(3), g(2), g(1)\}$,

$g(3) = \text{mex}\ \{g(2), g(1), g(0)\}$, z této pozice nejprve určíme hodnotu $g(0)$:

$g(0) = \text{mex}\ \{\} = 0$ (Pokud v hromádce není žádná sirka, jedná se o koncovou pozici, tudíž není možnost dalšího tahu, nejmenší hodnota je tedy 0).

$g(1) = \{0\} = 1$ (Z jedné sirky mohu táhnout pouze na $g(0)$ tzn.na SG hodnotu 0, nejnižší hodnota, která není zapsána v množinové závorce, je 1).

$g(2) = \{0, 1\} = 2$ (Možné tahy jsou buď na $g(1)$, nebo na $g(0)$. Nejnižší hodnota je 2).

$g(3) = \{0, 1, 2\} = 3$ (Nejmenší číslo nezahrnuté v množině $\{0, 1, 2\}$ je 3).

$g(4) = \{1, 2,3\} = 0$ (Podle množiny S možných pohybů, se mohu dostat na $g(3)$, $g(2)$, nebo $g(1)$. Nejmenší číslo, které není v množině $\{1, 2, 3\}$, je 0). Analogicky vyřešíme zbývající pozice.

$g(5) = \{2, 3, 0\} = 1$

$g(6) = \{1, 0, 3\} = 2$

Výše bylo zmíněno, že $g(x) = 0$ je P-pozice, resp. pozice bezpečná pro zanechání. V tomto případě se jedná o $g(4)$. Hráč, který v našem případě začíná na pozici $g(6)$, může vyhrát, pokud odebere dvě sirky.

Tabulka 5 - Grundyho škála pro S = {1, 2, 3}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…
g(x)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	…

Zdroj: (Ferguson, 2020, s. 21)

Ve škále je vidět periodicita (0, 1, 2, 3). Každá škála, pro jakýkoliv set tahů, má svou periodicitu. Následující tabulka č. 5 zobrazuje NIM-sekvence pro všechny kombinace do 5.

Tabulka 6 - NIM-sekvence

Subtraction set (with optional extras)	nim-sequence	period
1(3 5 7 9 11 ...)	$\dot{0}\dot{1}01\ldots$	2
2(6 10 14 18 ...)	$\dot{0}01\dot{1}0011\ldots$	4
1 2(4 5 7 8 10 11 ...)	$\dot{0}1\dot{2}012\ldots$	3
3(9 15 21 27 ...)	$\dot{0}0011\dot{1}000111\ldots$	6
2 3(7 8 12 13 17 18 ...)	$\dot{0}011\dot{2}00112\ldots$	5
1 2 3(5 6 7 9 10 11 13 ...)	$\dot{0}12\dot{3}0123\ldots$	4
4(12 20 28 36 ...)	$\dot{0}000111\dot{1}00001111\ldots$	8
1 4(6 9 11 14 16 19 ...)	$\dot{0}101\dot{2}01012\ldots$	5
2 4(3 8 9 10 14 15 16 ...)	$\dot{0}0112\dot{2}001122\ldots$	6
3 4(10 11 17 18 24 25 ...)	$\dot{0}0011\dot{1}2\ldots$	7
1 3 4(6 8 10 11 13 15 17 ...)	$\dot{0}10123\dot{2}0101232\ldots$	7
1 2 3 4(6 7 8 9 11 12 13 14 ...)	$\dot{0}123\dot{4}01234\ldots$	5
5(15 25 35 45 ...)	$\dot{0}00001111\dot{1}0000011111\ldots$	10
2 5(9 12 16 19 23 26 ...)	$\dot{0}01102\dot{1}0011021\ldots$	7
3 5(4 11 12 13 19 20 21 ...)	$\dot{0}001112\dot{2}00011122\ldots$	8
2 3 5(4 9 10 11 12 16 17 18 19 ...)	$\dot{0}01122\dot{3}0011223\ldots$	7
4 5(13 14 22 23 31 32 40 ...)	$\dot{0}0001111\dot{2}000011112\ldots$	9
1 4 5(3 7 9 11 12 13 15 17 19 ...)	$\dot{0}101232\dot{3}01012323\ldots$	8
2 4 5(3 9 10 11 12 16 17 18 19 ...)	$\dot{0}01122\dot{3}0011223\ldots$	7
1 2 3 4 5(7 8 9 10 11 13 14 15 16 ...)	$\dot{0}1234\dot{5}012345\ldots$	6

Zdroj: (Berlekamp et al., 2004, s. 84)

Využitím Sprague-Grundyho funkce lze analyzovat NIM o libovolném počtu hromádek. Stačí hru uvažovat jako součet libovolného počtu NIM her o jedné hromádce. Sprague-Grundyho hodnotu můžeme také definovat jako NIM-součet převedený zpět do desítkové soustavy.

Hypotéza: Je dáno n kombinatorických her $G_1(X_1, F_1), G_2\ (X_2, F_2), \dots, G_n\ (X_n, F_n)$. Pokud je každá z her kombinatorická, pak je možné definovat jejich kombinaci jako kombinatorickou hru G, která je jejich součtem, tedy $G(X, F) = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$. (Rao, 2019)

X specifikuje všechny možné pozice $X_1 \cdots X_n$ a vypočítá se jako $X = X_1 \times \cdots \times x_n$. Za předpokladu, že je hra v pozici $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, množina následujících možných pozic je definována jako:

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\} \cup \{x_1\} \times F_2(x_2) \times \dots \times \{x_n\} \cup \dots \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times F_n(x_n)$$

Konečná pozice je určena jako kartézský součin všech konečných pozic jednotlivých her. (Rao, 2019)

Součet her je možné počítat pomocí NIM-součtu Sprague-Grundyho funkcí jednotlivých her.

Hypotéza: Jestliže g_i je Sprague-Grundyho funkcí hry G_i, kde $i = 1, \cdots, n$, potom $G = G_1 + \ldots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci $g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \oplus$ [2] $\ldots \oplus g_n(x_n)$. (Ferguson, 2020, s. 28)

Zmíněnou definici aplikujme na příkladě č. 4.

Příklad 4

Hra NIM o třech hromádkách o velikostech (7, 6, 4), přičemž S = {1, 2, 3}. První hromádka je hra v pozici *g*(7), druhá v *g*(6) a třetí v *g*(4) . Nyní analyzujeme, ve které pozici se hra nachází pomocí součtu Sprague-Grundyho hodnot jednotlivých hromádek.

g(7) = 3, *g*(6) = 2, *g*(4) = 0, takže

$3 \oplus 2 \oplus 0 = 1$, výsledek není nulový tzn. pozice je nebezpečná a hráč, který je na řadě, má vyhrávací strategii.

Hráčovým cílem je dosáhnout nulového součtu SG hodnot. V tomto případě je to:

[2] $\oplus$ je logická operace XOR značící vylučovací disjunkci.

$2 \oplus 2 \oplus 0 = 0$, tudíž je potřeba odebrat 1 sirku z první hromádky. Hráč zanechává bezpečnou pozici a za předpokladu racionálních hráčů v příštích několika kolech vyhraje.

Analýza zmíněná v této kapitole se dá využít pro analýzu jakýchkoliv nestranných kombinatorických her. Stačí o nestranné hře uvažovat jako o hromádce v NIMu. Stejně tak, pokud hrajeme několik nestranných her zároveň, se dá výherní strategie analyzovat pomocí součtu SG hodnot. Tím jsme dokázali platnost Sprague-Grundyovy hypotézy. (Ferguson, 2020, s. 29)

Hra NIM se dá modifikovat do různých verzí. V následující kapitole si uvedeme možnosti rozšíření této hry.

4 VARIANTY HRY NIM

4.1 Misère NIM

Misère NIM je asi nejznámější variantou hry NIM. Od normální verze hry se liší pouze v tom, že hráč odebírající poslední předmět z hrací plochy prohrál. V kapitole 2 příklad 2, byla uvedena podobná kombinatorická hra. Na tomto příkladu bylo uvedeno, že koncová pozice je N-pozicí. Stejně tak to platí v případě misère NIMu, situace (0, 0, 0) je zde nebezpečnou N-pozicí. Cílem hráče je svými tahy donutit protihráče k odebrání posledního předmětu. I pro tuto variantu NIMu Bouton (1901, s. 39) ve své publikaci uvádí výherní strategii. Analýza výherní strategie je stejná jako pro normální NIM, až do té doby, kdy je situace ve tvaru $(1, 1, x)$ nebo $(1, 0, x)$, kde $x > 1$.

Pro docílení výherní pozice (0, 0, 1) je nutné hromádku o $x > 1$ předmětech zmenšit na $x = 1$, pro situaci $(1, 1, x)$, nebo $x = 0$, pro situaci $(1, 0, x)$. Cílem je tedy dosáhnout lichého počtu hromádek obsahující pouze jeden předmět. Hráč, který takovou pozici zanechá, jistě vyhrál.

Představme si hru hráče A a hráče B. Oba postupují ve hře jako při normálním NIMu, přičemž hráč A po sobě až doposud zanechával bezpečnou kombinaci. Nyní se hra ocitá v situaci (1, 6, 1) a hráč A podle analýzy zmíněné v předchozím odstavci odebere z druhé hromádky 5 předmětů a zanechá tak hru v situaci (1, 1, 1). Nyní je na řadě hráč B a již nyní je zřejmé, že nemá možnost vyhrát, jelikož je povoleno odebírat pouze z jedné hromádky. Hráč B tedy odebere jeden předmět z libovolné hromádky a zanechává hru v pozici (1, 0, 1). Nyní hráč A odebere také jeden předmět z libovolné hromádky a nedává protihráči jinou možnost než odebrat poslední předmět.

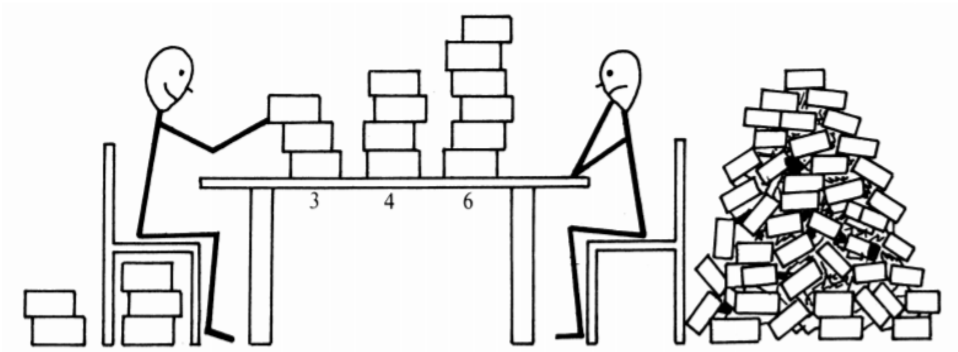
Stejně jako pro NIM v normálním tvaru je i zde postup nalezení výherní strategie stejný pro libovolný počet hromádek. (Bouton, 1901, s. 39)

Doposud jsme se zabývali hrou NIM pouze s možností odebírání z hromádek. Jak by se ale situace změnila, pokud bychom začali hromádky i zvyšovat? Odhadem řekněme, že přidávání do hromádek je stejné, jako když z hromádek odebíráme, tudíž se výherní strategie nijak nemění.

Hypotéza: Jakákoliv situace $(x_1, x_2 + n, x_3)$ je N-pozicí, pokud (x_1, x_2, x_3) je P-pozice a $n \neq 0$.

Důkaz provedeme na následujícím příkladu, který je uveden v knize *“Winning Ways for your mathematical Plays.”* (Berlekamp et al., 2004)

4.2 Poker-NIM



Obrázek 4 - Poker-NIM

Zdroj: (Berlekamp et al., 2004, s. 53)

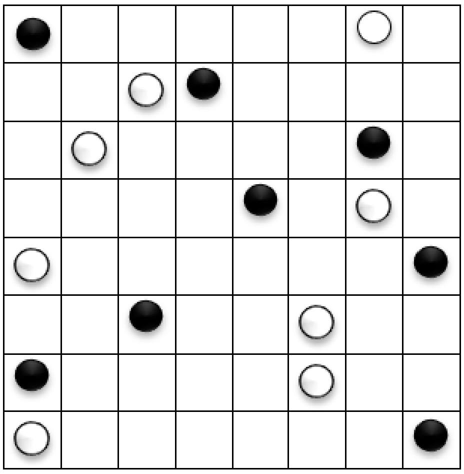
Dva hráči hrají zdánlivě normální NIM s hromádkami pokerových žetonů. Tato varianta NIMu je navíc obohacena o možnost hromádku zvyšovat o libovolný počet žetonů, který daný hráč získal odebíráním v předchozích kolech. Stále je platné pravidlo, že odebírat a přidávat žetony je povoleno pouze v rámci jedné hromádky. Obrázek 4 demonstruje rozehranou hru momentálně se nacházející v pozici (3, 4, 6). Hráči také mají k dispozici několik žetonů odebraných při předchozích tazích. (Berlekamp et al., 2004, s. 53)

Hráč A (vlevo) je na řadě, a jelikož zná princip výherní strategie, zanechá hru v bezpečné situaci (2, 4, 6). Hráč B (vpravo) ve svém tahu přidá 50 žetonů do druhé hromádky a zanechá pozici (2, 54, 6). Je jasné, že hráč B má k dispozici poměrně velké množství žetonů, ne však nekonečné. Hráč A po správné úvaze odebere oněch 50 žetonů z druhé hromádky a vrátí tak pozici do (2, 4, 6). Z toho vyplývá, že ať hráč B přidá jakýkoliv počet žetonů do jakékoliv hromádky, hráč A stejný počet v dalším tahu odebere a zanechá původní bezpečnou kombinaci. Dříve či později Hráči B žetony dojdou a bude muset hru dohrát jako normální NIM. Hráč A nemá zapotřebí žetony přidávat, neboť zanechal bezpečnou pozici a jeho cílem je ji zanechat. Z tohoto rozboru vyplývá, že přidávání předmětů do hromádek nijak výrazně neovlivňuje průběh hry. Pouze oddálí nevyhnutelnou prohru hráče zanechávajícího nebezpečnou pozici. (Berlekamp et al., 2004, s. 54)

Na základě rozboru hry hypotézu přijímáme. Pokud je hra v bezpečné pozici, každá změna libovolné hromádky vede k pozici nebezpečné, respektive nezáleží na tom, zda se libovolná hromádka zmenší, či zvětší.

Dále se hra NIM dá modifikovat na hru v partyzánském stylu. Partyzánské kombinatorické hry jsou pospány v části 2. 3.

4.3 Northcottova hra



Obrázek 5 - Pozice v Northocottově hře

Zdroj: (vlastní zpracování)

Northcottova hra je hrána na šachovnici 8x8 a každý hráč má k dispozici vlastní barvu figurek. Na šachovnici jsou figurky rozmístěny tak, že v každém řádku je jedna černá a jedna bílá figurka. Hráči se střídají v tazích, přičemž můžou figurkami hýbat doprava a doleva. Jedinou podmínkou je, že hráč nesmí s figurkou přeskočit figurku protihráče. Hra končí ve chvíli, kdy jeden z hráčů nemá možnost dalšího kroku. Hráč prohrává, pokud není schopen s figurkami dále pohybovat (pohyb je zamezen figurkami protihráče). Je možné i tuto hru analyzovat pomocí NIM? (Berlekamp et al., 2004, s. 54)

I přesto, že hra se zdánlivě NIM nepodobá, se dá na NIM lehce převést. Mezi Northocottovou hrou a NIM existují následující podobnosti:

- Koncová pozice v této hře je situace, kdy jsou figurky jedné barvy uvězněné barvou druhou tzn. není mezi nimi žádná mezera. Koncovou pozici je tedy možné zapsat jako (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). Pokud žádné mezery znamenají koncovou pozici, tak ostatní mezery musejí znamenat předchozí pozice hry;
- Pravidla tahů. Hráči mohou pohybovat figurkami pouze v rámci jednoho řádku. Jinak řečeno, velikost mezery mezi figurkami je možné zmenšit či zvětšit pouze v jednom řádku.

Převést hru do NIM tvaru je tedy poměrně jednoduché. Stačí mezery mezi figurkami v řádku vnímat jako ony hromádky v normálním NIMu.

Je nutné podotknout, že pokud hráči neznají vyhrávací strategii, hra se často může zdát bez konce. Pokud je ovšem alespoň jeden z hráčů obeznámen se strategií, dokáže dojít ke konci hry poměrně rychle. (Berlekamp et al., 2004, s. 54)

Na obrázku 4 je uvedena hra v pozici (5, 0, 4, 1, 6, 2, 4, 6). Podle postupu dosažení výherní strategie pro klasický NIM dojdeme k závěru, že uvedená pozice je nebezpečná, a také, že máme více možností, jak dosáhnout bezpečné pozice.

Zřejmý tah by byl snížit mezeru buď v prvním, třetím, pátém, nebo šestém řádku na velikost 3, 2, 0, nebo 0 políček mezi figurkami. Jelikož mezery se dají i zvětšovat, naskýtá se zde i možnost šestou mezeru zvětšit na 4 políčka mezi figurkami.

Podle logické úvahy bychom se ale vždy měli snažit mezery zmenšovat, a tím se přibližovat k hráčově figurce s cílem uvěznit ji u okraje šachovnice. Nicméně občasný ústup od protihráčovy figurky může znamenat zmatení protihráče a zamezení odhalení strategie protihráčem. (Berlekamp et al., 2004, s. 55)

4.4 Využití kombinatorických her v ekonomii

První kapitola této práce se zmiňovala o rozsáhlém využití teorie her v různých odvětví. Zejména v ekonomii nalézá velmi bohaté využití. Ekonomie převážně navazuje na Neumannovo a Morgensternovo pojetí teorie her. Kombinatorické hry, pro svou dokonalou a úplnou informaci, nemají v ekonomii ani v jiných směrech příliš velké využití. Nicméně existuje několik publikací, které poukazují na možné využití kombinatorických her v ekonomii. V příspěvku *The Economist's View of Combinatorial Game*s (Berlekamp, 1996) nalezneme popis konkurenčních aukcí, ve kterých se především jedná o převod tzv. „daně“

mezi hráče. Jedná se o využití klasické teorie her společně s kombinatorickou. Berlekamp na konkurenčních aukcích poukazuje na existenci určitého průměru pozice tzn. hodnoty hraní černého spíše než bílého. Dalším tématem Berlekampovy práce je výpočet teploty za využití generalizovaných termografů, přičemž výpočet “teploty hry“ určuje hodnotu dalšího tahu. Za předpokladu, že se součet her hraje optimálně, zmíněný průměr a teplota přesně určují konečné skóre hry.

V publikaci *Combinatorial Games under Auction Play* (Lazarus et al., 1999) nalezneme několik her, které navazují na grafové hry. Podobně jako v předchozím případě se zde jedná o hry, ve kterých hráči nabízí určitou hodnotu výměnou za možnost dalšího tahu. Zajímavým poznatkem je, že kombinatorické hry nalézají využití také v lineárním programování.

Je nutné podotknout, že kombinatorická teorie her je odvětví, ve kterém je prozatím množství poznatků skryto. Nicméně se jedná o velmi rozsáhlou oblast, ve které je stále co objevovat. I přesto, že výše zmíněné publikace obsahují velmi zajímavá témata, rozebírání jednotlivých poznatků, her a využití by výrazně přesahovalo rámec bakalářské práce.

Tato část poukazovala na možnost využití spojení klasické a kombinatorické teorie her v ekonomii. Rozsáhlé využití v ekonomii mají hry s neúplnou informací, proto se následující kapitola věnuje právě těmto hrám a jejich využití v aukcích.

5 HRY S NEÚPLNOU INFORMACÍ

V ekonomii se často setkáváme se situací, kdy někteří hráči disponují počátečními soukromými informacemi, které jsou podstatné při rozhodování ostatních hráčů (Dudnyk, 2014, s. 1). Soukromou informaci, kterou hráč disponuje, nazýváme typem hráče. Toto spojení poprvé uvedl J. C. Harsanyi. Takovýto typ her s neúplnou informací se označuje jako bayesovské hry. Každý hráč zná pouze svůj skutečný typ. Zároveň zná všechny možné typy ostatních hráčů a jejich pravděpodobnostní rozdělení. (Dlouhý a Fiala, 2007, s. 68-69)

V bayesovských hrách se předpokládá existence soukromé informace. Jedná se o takovou informaci, která není známa ostatním hráčům. Do této doby existovala jedna strategie na jednoho hráče. Pokud ovšem uvažujeme hráče, který má soukromou informaci, pak ostatní hráči jeho strategii neznají. Nicméně v bayesovských hrách uvažujeme dalšího fiktivního hráče, „Přírodu“. Tento fiktivní hráč přiřazuje každému hráči možné typy hráče v závislosti na soukromé informaci. Počet hráčů se nám v bayesovksých hrách zvyšuje o typy hráčů.

V každé konečné hře s neúplnou informací existuje alespoň jedna bayesova-nashova rovnováha, za předpokladu, že všichni hráči mají stejné apriorní názory na pravděpodobnostní rozdělení tahu „Přírody“. V tom případě totiž získáváme hru s úplnou, ale nedokonalou informací.

Bayesovká hra je určena:

- Množinou hráčů $\{1, 2, \ldots, N\}$;
- Množinou prostorů strategií $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, kde jakékoliv Xi označuje prostor strategií i-tého hráče. Tyto strategie se dále označují $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$;
- Množinou prostorů typů hráčů $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$, kde každý hráč zná pouze svůj vlastní typ z této množiny. Typ hráče typ odpovídá určité jeho výplatní funkci;
- Množinou názorů hráčů $\{p_1, p_2 \ldots, p_N\}$. Jedná se o subjektivní pravděpodobnostní funkci hráče. Vyjadřuje názor hráče o typech ostatních hráčů;
- Množinou výplatních funkcí

$$\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N, t_1, t_2, \ldots, t_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N, t_1, t_2, \ldots, t_N)\}$$

Hry s neúplnou informací se značí jako:

$$H = (X_1, \ldots, X_N, T_1, \ldots, T_N, p_1, \ldots, p_n, f_1, \ldots, f_N).$$

Na základě pravděpodobnostního rozdělení dostupného všem hráčům „Příroda“ vybere náhodně typy hráčů, které budou vstupovat do hry. Pokud předpokládáme, že každý hráč zvolí vlastní strategii před tím, než „Příroda“ vybere typy hráčů, pak se jedná o hru s nedokonalou informací. Takovou hru značíme jako H^*. Pro hru s nedokonalou informací platí následující:

- M hráčů, $j = 1, 2, \ldots, M$, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$, kde $j = (i, t_i)$ a znamená množinu typů hráčů;
- Množina prostorů akcí $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_M\}$;
- Množina výplatních funkcí $\{g_1(y_1, y_2, \ldots, y_M), \ldots, g_2(y_1, y_2, \ldots, y_M)\}$;
- Hodnoty výplatních funkcí se vypočítají jako očekávané hodnoty

$$g_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \sum_{t_i} p(t_i)\, f_i(x, t).$$

5.1 Aukce

„Aukce je mechanismus alokace konkrétního objektu za určitou cenu.“ (Dudnyk, 2014, s. 1)

Aukce jako jeden z typů tržních mechanismů používá cenová kritéria pro určení alokací. Určuje, které strany vyhrají, který předmět či kontrakt a zaplacené ceny. Aukce jsou používány buď pro maximalizaci profitu držitele předmětu, nebo mohou složit jako prostředek zjišťování cen. Organizátor aukce či držitel předmětu je schopen pomocí získaných informací od uchazečů stanovit ceny a rozdělení. Takové aukce nazýváme experimentální. (Salant, 2014, s. 5)

Dobrá aukce by měla splňovat dvě základní kritéria, efektivnost a maximalizaci výnosů. Efektivností aukce rozumíme to, že objekt získává kupující s největším hodnocením. Maximalizací výnosů rozumíme získání nejvyšší možné ceny od kupujícího. (Dudnyk, 2014, s. 1)

Aukce nejsou ničím novým, existovaly zde již několik staletí před naším letopočtem. Jednou z prvních zmínek o dražbách podal řecký historik Herodotos, který popsal prodej budoucích manželek v Babylonii okolo 5. stol. př. n. l. V průběhu staletí došlo k velkému rozvoji aukcí a dnes jsou aukce jednou z nejvýznamnějších ekonomických aktivit. Během vývoje aukcí došlo také k rozvinutí několika jejích typů (Milgrom a Weber, 1982, s. 1089). Následující kapitola uvede, jakými způsoby je možné vést aukci.

5.1.1 Typy aukcí

Aukce se rozlišují podle nejrůznějších kritérií. V této práci uvedeme ty nejvýznamnější.

1. Podle způsobu podávání nabídek:

    a. Otevřená aukce – v případě, že nabídky účastníků jsou viditelné (dostupné) všem ostatním úcastněným.

    b. Uzavřená aukce – v případě, že nabídky jsou nedostupné ostatním účastníkům tzv. obálková metoda. (Dudnyk, 2014, s. 6)

2. Podle povahy předmětu:

    a. Soukromá hodnota – hodnota draženého objektu je pro každého hráče nezávislá na hodnocení ostatních hráčů. Příkladem může být například dražba uměleckého díla od méně známého umělce.

    b. Všeobecná hodnota – hodnota draženého objektu je stejná pro všechny hráče. Jednoduchým ilustračním příkladem by byla dražba obálky s penězi. Kdokoliv vyhraje obálku, hodnota peněz bude pořád stejná. (Dudnyk, 2014, s. 5)

3. Podle počtu dražených objektů:

    a. Aukce s jedním typem objektů – nemovitosti

    b. Aukce víceobjektové – umělecké předměty

Aukce s jedním typem objektů se dále dělí na:

1. Anglické – aukce s rostoucí cenou. Počáteční cena je nízká a postupně se zvyšuje prostřednictvím nabídek účastníků. ((Dudnyk, 2014, s. 7)

2. Holandské – aukce s klesající cenou. Počáteční cena je nadhodnocená a postupně se snižuje, dokud někdo z účastníků neprojeví zájem a danou cenu nepřijme. (Dudnyk, 2014, s. 13)

3. První ceny – hráč s nejvyšší nabídkou vyhrává a platí cenu, kterou nabídl.
4. Druhé ceny – hráč s nejvyšší nabídkou vyhrává aukci, ale platí druhou nejvyšší cenu. (Dudnyk, 2014, s. 6)

5.1.2 Využití bayesovských her v aukcích

Uvažujme anglickou uzavřenou aukci první ceny. Ve hře jsou dva hráči I a J, kteří mají zájem o koupi určitého nedělitelného statku. Tento statek se nachází v aukci. Vzhledem k pravidlům aukce hráči neví, kolik nabízí jejich protihráč. Jaká je tedy optimální částka, kterou by měli hráči nabídnout? Hráči mohou nabídnout jakoukoliv částku, tedy $b_1, b_2 \in [0, +\infty]$, hráč s nejvyšší nabídkou vyhrává a platí cenu, kterou nabídnul. Druhý hráč prohrává hru. (Ozyurt, 2020)

Výplatní funkce U_i hráče I je dána jeho nabídkou b_i a nabídkou jeho oponenta b_j.

$$U_i\left(b_i, b_j\right) = \begin{cases} V_i - b_i & pro\ b_i > b_j \\ 0 & pro\ b_i < b_j \end{cases}$$

Pokud hráč I vyhraje, je jeho výplata $V_i - b_i$, kde V_i znamená hráčovo ocenění statku a b_i skutečnou zaplacenou cenu. Pokud prohraje, je jeho výplata 0.

Soukromou informací je zde hodnocení statku jednotlivých hráčů. Každý zná svoje hodnocení, ale nezná hodnocení toho druhého. Nicméně hráči se dohodli, že jejich hodnocení bude bráno z rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti U [0, 100 000], tedy:

$$v_1, v_2 \sim U\ [0, 100\ 000] -> \ F(x) = \frac{x}{100\ 000}$$

Hráč tedy ví, že hodnocení protihráče je mezi 0 a 100 000, a to se stejnou pravděpodobností. (Ozyurt, 2020)

Pokud jsme do hry přidali informaci o pravděpodobnostním rozdělení typu hráčů, je možné pro hru nalézt bayesovu-nashovu rovnováhu (dále pouze BNE). V tomto případě chceme nalézt BNE, které je symetrické, tedy kde každý hráč nabídne pouze poměr svého hodnocení. (Ozyurt, 2020)

Pokud by hodnocení obou hráčů byla symetrická, pak jejich nabídky budou stejné částky. Potom by hledané BNE bylo:

$$b_1(v) = b_2(v), \forall v$$

a jejich nabídka je funkcí jejich hodnocení $b_i(v_i) = a \times v_i$, kde $a > 0$.

Pokud je konstanta:

- $a = 1$, pak hráč nabídne stejnou částku, kterou si hodnotí produkt.
- $a > 1$, pak hráč nabídne více než je jeho hodnocení produktu.
- $a < 1$, pak hráč nabídne pouze část svého hodnocení.

Řešení:

Řešení této hry spočívá v zafixování nabídky hráče J jako $b_j = a \times v_j$. Chceme nalézt nabídku b_i hráče I.

Řešení poskytuje funkce očekávané výplaty $EU_i(b_i, b_j)$ = pravděpodobnost výhry × výsledek výhry + pravděpodobnost prohry × výsledek prohry. (Ozyurt, 2020)

Po doplnění výsledků hry získáváme:

$$EU_i(b_i, b_j) = pravděpodobnost\ výhry \times (V_i - b_i) + pravděpodobnost\ prohry \times 0$$

Nyní jej nutné zjistit jaká je pravděpodobnost výhry. Víme, že hráč I vyhraje pokud:

$b_i > b_j$ tzn. $b_i > a \times v_j$

Hráč I vyhraje hru právě tehdy když:

$V_j < \frac{b_i}{a}$, kde V_j je náhodně vybraná z rovnoměrného rozdělení U [0, 100 000]

Hráč I nezná přesnou hodnotu V_j, zná pouze její pravděpodobnostní rozdělení.

Po dosazení za $F(x) = \frac{x}{100\,000}$ je pravděpodobnost výhry je dána:

$$F\left(\frac{b_i}{a}\right) = \frac{b_i}{100\,000 \times a}$$

Funkci očekávané výplaty hráče I při nabídce b_i vypočítáme jako:

$$EU_i\ (b_i, b_j)\ =\ \frac{(v_i\ -\ b_i)\ \times\ b_i}{100\ 000\ \times\ a}$$

Jelikož je b_i cena, kterou by hráč I skutečně zaplatil, je logické uvažovat jeho snahu b_i co nejvíce snížit. Pokud by ale tak skutečně učinil, snížil by tím zároveň i pravděpodobnost na výhru. V hráčovým nejlepším zájmu je najít kompromis. (Ozyurt, 2020)

Nabídka, jakožto funkce hodnocení hráče, je zároveň strategií hráče. Hráč I tedy vybírá takovou strategii bi, která maximalizuje jeho očekávanou výplatu EU_i.

Optimální první nabídka se určí pomocí parciální derivace $\partial_{b_i} EU_i$, kterou položím rovnou nule.

$$\frac{\partial\ EU_i\ (b_i, b_j)}{\partial b_i}\ =\ 0$$

$$\frac{(v_i - 2 * b_i)}{100\ 000\ \times\ a}\ =\ 0$$

$$b_i\ =\ \frac{V_i}{2}$$

Pokud hráč J hraje lineární strategii, pak by v BNE měla optimální strategie hráče I být

$$b_i(v_i)\ =\ \frac{V_i}{2}$$

Závěrem můžeme zapsat, že BNE v symetrických a lineárních strategiích je:

$$BNE\ [b_1(v_1), b_2(v_2)]\ =\ (\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$$

Optimální nabídkou hráče I, který zná své hodnocení statku, by měla být právě polovina tohoto hodnocení. To samé platí pro strategii hráče J. (Ozyurt, 2020)

Dvě firmy I a J se účastní uzavřené aukce první ceny. Předmětem dražby je pozemek pro výstavbu nového objektu. V lokalitě, kde se nachází zmíněný dražený pozemek, se v nedávné době prodalo několik dalších podobných pozemků o stejné výměře. Žádný z pozemků nepřesáhl hodnotu 1 500 000 Kč. Je tedy vhodné uvažovat, že ani jedna firma nepřesáhne tuto hodnotu, jelikož by to znamenalo pro firmu ztrátu. Firma I hodnotí pozemek na 1 200 000 a tuto částku pro účely aukce vyčlenila. Dále je známé rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti hodnocení *U*, které je v intervalu (0, 1 500 000). Nyní se firma I musí rozhodnout, jaká je její optimální strategie nabídky v aukci.

Ze znalostí výše uvedených se optimální strategie vypočítá dosazením do vzorečku parciální derivace EU_i podle b_i.

$$\frac{\partial\, EU_i\ (b_i, b_j)}{\partial b_i} = 0$$

$$\frac{(v_i - 2b_i)}{100\,000 \times a} = 0$$

$$\frac{(1\,200\,000 - 2b_i)}{1\,500\,000 \times a} = 0$$

$$b_i = \frac{1\,200\,0000}{2}$$

$$b_i = 600\,000$$

Optimální nabídkou firmy I by mělo být 600 000. Za předpokladu, že druhá firma nabídla méně a prohrála, výplatní funkce firmy I bude rozdíl jejího hodnocení pozemku a skutečné nabídky.

$$U_\mathrm{i} = v_\mathrm{i} - b_\mathrm{i}$$

$$U_\mathrm{i} = 1\,200\,000 - 600\,000$$

$$U_\mathrm{i} = 600\,000$$

Výplatní funkce druhé firmy U_j je nula, jelikož prohrála aukci.

Na závěr je důležité připomenout, proč ani jedna z firem nenabídla přesně 1 500 000 a nezajistila si tak výhru. Jelikož uvažujeme racionálně uvažující firmy, které se snaží maximalizovat svůj profit, je nasnadě předpoklad, že obě firmy prokážou snahu o co nejvyšší zisk. Zároveň je pro firmu výhodnější odejít z aukce s nulovým ziskem než převýšit vlastní hodnocení pozemku a odejít se ztrátou.

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s hrou NIM, podat její matematické řešení a přiblížit možná rozšíření této hry.

Nejprve bylo důležité uvést vědní disciplínu, teorie her, do které hra NIM patří. Právě proto se první kapitola věnuje obecnému uvedení do problematiky teorie her. Tato kapitola se také zabývá významnými historickými milníky ve vývoji této vědní disciplíny. Mimo jiné je zde uvedeno základní rozdělení na dvě hlavní části teorie her, klasickou a kombinatorickou. Hlavním důvodem pro rozdělení na klasickou a kombinatorickou teorii her byla skutečnost, že hra NIM spadá právě do kombinatorického odvětví.

Druhá kapitola se již věnuje tématu bakalářské práce. Obsahuje popis kombinatorických her a jejich dělení na nestranné a partyzánské hry. Dále se věnuje anýze výherní strategie nestranných her pomocí zpětné indukce. Nestranné hry jsou obsaženy i v následujících dvou kapitolách, jelikož hra NIM, stěžejní téma této práce, je jedna z nejznámějších z nestranných her.

Kapitola tři kompletně rozebírá hru NIM. Věnuje se jejímu popisu, aby čtenář lépe porozuměl problematice. Za zmínku stojí část, která je věnována původu hry. Tato kapitola obsahuje odbočku do číselných soustav, jelikož analýza výherní strategie pro NIM je založena právě na dvojkové soustavě. Větší pozornost je zde věnována zmíněné analýze výherní strategie, jak Boutonovu využití dvojkové soustavy, tak za pomoci Sprague-Grundyho funkce. Zajímavým poznatkem je skutečnost, že výherní strategie pro NIM je využitelná k řešení jakékoliv nestranné hry.

Jelikož se hra NIM v průběhu let stala velmi oblíbeným tématem odborných publikací, došlo i ke vzniku množství modifikací této hry. V kapitole čtyři je uvedeno několik takových modifikací spolu s jejich výherními strategiemi. Za povšimnutí stojí, že některé z těchto variant nemusí být na první pohled NIM podobné. Tato kapitola dále pojednávala o možnosti využití kombinatorických her v ekonomii.

Kapitoly tři a čtyři jsou stěžejní částí této bakalářské práce, ve kterých byl splněn uvedený cíl práce. Nicméně jelikož kombinatorické hry nepřináší prozatím velmi mnoho využití v ekonomii, chtěla jsem do své práce začlenit ještě jednu kapitolu věnující se hrám, které v ekonomii nalezneme často. Jedná se o hry s neúplnou informací. Kapitola pět obsahuje rozbor těchto her, zvaných bayesovské hry, jejich analýzu a matematické řešení. Z větší části se kapitola věnovala využití těchto her v ekonomii, zejména v aukcích.

CITOVANÁ LITERATURA

BAKER, M., 2014. Real Numbers and Infinite Games, Part I. In: *Matt Baker's Math Blog* [online]. [cit. 2021-09-14]. Dostupné z: https://mattbaker.blog/2014/07/01/real-numbers-and-infinite-games-part-i/

BERLEKAMP, Elwyn, ed., 1996. The Economist's View of Combinatorial Games. NOWAKOWSKI, Richard J. *Games of No Chance* [online]. Volume 29. Cambridge University Press, s. 365-405 [cit. 2021-09-24]. ISBN 978-0521646529. Dostupné z: http://library.msri.org/books/Book29/files/ber.pdf

BOUTON, Charles L., 1901. Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. *Annals of Mathematics* [online]. Mathematics Department, Princeton University, **3**(14), 35-39 [cit. 2021-09-13]. Dostupné z: doi:10.2307/1967631

DARTCY, Productions, 1995. NimSim. In: *Internet Archive* [online]. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: https://archive.org/details/NimSim

DUDNYK, Iryna, 2014. Auctions. In: *SIMON FRASER UNIVERSITY: ECON 302: Microeconomic Theory II: Strategic Behavior* [online]. [cit. 2021-09-13]. Dostupné z: http://www.sfu.ca/~idudnyk/ECON302_auctions_part_ONE.pdf

FERGUSON, Thomas S., 2020. *A Course In Game Theory* [online]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. [cit. 2021-09-17]. ISBN 978-981-3227-37-8. Dostupné z: https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/10634

CHVOJ, Martin, 2013. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. 1. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4620-3.

MAŇAS, Miroslav, 1991. *Teorie her a její aplikace*. Praha: Nakladatelství techn. lit. ISBN 80-030-0358-X.

NOBEL PRIZE OUTREACH, 2005. The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2005. In: *The Nobel Prize* [online]. Stockholm [cit. 2021-09-14]. Dostupné z: https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2005/summary/

OZYURT, Selcuk, 2020. 8. An Example for Bayesian Nash Equilibrium: First Price Auction (Game Theory Playlist 9). In: *Youtube* [online]. [cit. 2021-09-13]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=6jXq-z2jYw8&t=543s

RAO, Mallikarjuna, 2019. Lecture 6: Combinatorial Games: Sprague-Grundy Theorem – I. In: *Youtube* [online]. [cit. 2021-09-13]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=ymoSFrDmkMY&t=1026s

ROSS, Don, 2019. Game Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [online]. Stanford (California) [cit. 2021-06-24]. ISSN 1095-5054. Dostupné z: https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/game-theory/

ROUGETET, Lisa, 2014. A Prehistory of Nim. *The College Mathematics Journal* [online]. Taylor & Francis, **45**(5), 358-363 [cit. 2021-08-04]. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/10.4169/college.math.j.45.5.358

SALANT, David J., 2014. Introduction. *A Primer on Auction Design, Management, and Strategy* [online]. The MIT Press, s. 1-16 [cit. 2021-09-15]. ISBN 978-0-262-32182-2.

SAWA, Zdeněk, 2021. Teorie her: studijní opora. *VSB–Technická Univerzita Ostrava* [online]. Ostrava [cit. 2021-09-14].

SHEYNIN, O. B., 1977. Early history of the theory of probability. *Archive for History of Exact Sciences* [online]. Springer, **17**(3), 201-259 [cit. 2021-06-30]. ISSN 1432-0657. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/41133489

SPANIEL, William, 2016. Game Theory 101 (#63): Incomplete Information. *Youtube* [online]. [cit. 2021-09-14]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=mN5SP7ppQr4

WALKER, Paul, 2012. A chronology of game theory. In: *University of Canterbury* [online]. New Zealand [cit. 2021-09-13]. Dostupné z: https://competitionandappropriation.pre.ss.ucla.edu/wp-content/uploads/sites/95/2017/08/HistoryGameTheory.pdf