

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Ústav systémového inženýrství a informatiky

Fraktální analýza časových řad ve finanční praxi

Bc. Jindřich Röhrich

Diplomová práce
2019

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jindřich Röhrich**
Osobní číslo: **E17535**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství: Management finančních rizik**
Název tématu: **Fraktální analýza časových řad ve finanční praxi**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cíl práce: V práci budou popsány základní matematické pojmy a nástroje spojené s aplikací poznatků fraktální geometrie na studium časových řad. Analýza konkrétních časových řad z oblasti finanční praxe bude doplněna kritickým zhodnocením výsledků a možností uvedené metody.

Osnova:

- Matematické základy fraktální geometrie.
- Základní principy analýzy časových řad.
- Analýza vybraných časových řad z oblasti finanční praxe.
- Diskuse výsledků.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Finanční časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.
ARLT, Josef. Moderní metody modelování ekonomických časových řad. Praha: Grada, 1999. ISBN 80-7169-539-4.
EDGAR, Gerald A. Measure, topology, and fractal geometry. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, c2008. ISBN 978-0387747484.
FALCONER, K. J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. New York: Wiley, c1990. ISBN 0471922870.
KOUDELA, Libor. O pojetí křivky. Kanina: OPS, 2013. ISBN 9788087269312.
PETERS, Edgar E. Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility. 2nd ed. New York: Wiley, c1996. ISBN 978-0-471-13938-6.
ZELINKA, Ivan, František VČELAŘ a Marek ČANDÍK. Fraktální geometrie: principy a aplikace. Praha: BEN - technická literatura, 2006. ISBN 80-7300-191-8.



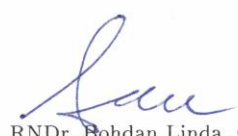
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Libor Koudela, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 3. září 2018
Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2019



doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

L.S.



doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.
vedoucí ústavu

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30. 4. 2019

Bc. Jindřich Röhrich

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu práce panu Mgr. Liborovi Koudelovi, Ph.D. za veškerou pomoc a ochotu při tvorbě této práce a za poskytnutí materiálů. Dále bych chtěl poděkovat i dalším konzultantům z fakulty ekonomicko-správní za rady a připomínky. Velké poděkování patří i řediteli odboru pojistné matematiky za poskytnutá data a konzultaci.

ANOTACE

Cílem práce je seznámit čtenáře s historií a základy fraktální geometrie a její využití v popisu finančních časových řad. Základem fraktálu je soběpodobnost útvaru, kterou je možné nalézt jak v přírodě, tak i v některých časových řadách. Fraktální geometrie je poměrně novým objevem v matematickém světě, nicméně mnoho vědců se zabývalo soběpodobností útvarů již v 19. století. V praktické části práce je popsáno použití poznatků z fraktální geometrie v analýze časových řad. Závěrem práce bude zhodnocení výsledků zmíněné analýzy.

KLÍČOVÁ SLOVA

fraktální geometrie, analýza časových řad, fraktál

TITLE

Fractal analysis of time series in financial practice

ANNOTATION

The aim of the thesis is to acquaint readers with history and the basics of Fractal Geometry and its applications in describing of financial time series. The main concept is self-similarity of object, which is possible to find in nature so as in some time series. Fractal Geometry is basically new discovery in mathematic world, however lot of scientists were thinking about self-similarity in 19. century. In practical part of thesis is described application of Fractal Geometry used on time series. At the end the thesis evaluates the results of analysis.

KEYWORDS

Fractal Geometry, analysis of time series, fractals

OBSAH

ÚVOD.....	11
1 HISTORIE FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE	12
1.1 CANTOROVA MNOŽINA, PROTOTYP FRAKTÁLU.....	12
1.2 SPOJITÉ NEDIFERENCovatELNÉ FUNKCE	13
1.3 SIERPIŇSKÉHO FRAKTÁLY	14
1.4 ZAVEDENÍ NECELOČÍSELNÉ DIMENZE	15
1.5 POČÁTKY KOMPLEXNÍ DYNAMIKY	17
1.6 FRAKTALISTA	19
2 FRAKTÁL, FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE.....	22
2.1 GEOMETRICKY HLADKÝ A NEKONEČNĚ ČLENITÝ ÚTVAR.....	22
2.2 HAUSDORFFOVA MÍRA A DIMENZE	23
2.3 FRAKTÁLNÍ DIMENZE	25
2.4 SOBĚPODOBNOST.....	27
2.5 R/S ANALÝZA V ODHADU FRAKTÁLNÍ DIMENZE.....	28
3 FINANČNÍ ČASOVÉ ŘADY	32
3.1 CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI FINANČNÍCH ČASOVÝCH ŘAD.....	32
3.2 PŘEDPOKLAD NORMALITY A LINEARITY	34
3.3 ČASOVÉ ŘADY V POJIŠŤOVNICTVÍ	35
4 ANALÝZA STOREN POJISTNÝCH SMLUV	38
4.1 STORNO POJISTNÝCH SMLUV	38
4.2 POPISNÁ STATISTIKA DAT	39
4.3 STANOVENÍ MODELU A JEHO DIAGNOSTIKA	45
4.4 ODHAD FRAKTÁLNÍ DIMENZE	52
5 ZÁVĚR.....	60
POUŽITÁ LITERATURA.....	63

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1: Cantorova množina	12
Obrázek č. 2: Kochova křivka	13
Obrázek č. 3: Kochova vločka.....	14
Obrázek č. 4: Sierpiňského trojúhelník – postupná konstrukce	15
Obrázek č. 5: Felix Hausdorff	16
Obrázek č. 6 a č. 7: Gaston Julia	18
Obrázek č. 8: Benoit B. Mandelbrot.....	19
Obrázek č. 9: Mandelbrotova množina	21
Obrázek č. 10: Popisné statistiky Gretl	46
Obrázek č. 11: Korelogram časové řady S1BP	47
Obrázek č. 12: Model AR(1)	48
Obrázek č. 13: ARCH test	49
Obrázek č. 14: Korelogram reziduí modelu	50
Obrázek č. 15: Normalita reziduí modelu	50
Obrázek č. 16: Předpovědi modelu	51

SEZNAM TABULEK

Tabulka č. 1: R/S analýza	29
Tabulka č. 2: Interpretace Hurstova exponentu	30
Tabulka č. 3: Škodní tabulka	36
Tabulka č. 4: Základní statistické ukazatele pro storno běžně placených smluv	41
Tabulka č. 5: Základní statistické ukazatele pro storno jednorázově placených smluv	44
Tabulka č. 6: Rozpětí jednotlivých klastrů	53
Tabulka č. 7: Směrodatné odchylky jednotlivých klastrů	53
Tabulka č. 8: R/S výsledky	54
Tabulka č. 9: Výsledky analýzy	54
Tabulka č. 10: Odhad fraktální dimenze storen běžně placených smluv	57
Tabulka č. 11: Odhad fraktální dimenze storen jednorázově placených smluv	58

SEZNAM GRAFŮ

Graf č. 1: Odhad Hurstova exponentu	30
Graf č. 2: Stornované PS – běžně placené.....	39
Graf č. 3: Stornované PS – běžně placené, očištěná data	40
Graf č. 4: Stornované PS – jednorázově placené.....	42
Graf č. 5: Stornované PS – jednorázově placené, očištěná data.....	43
Graf č. 6: Porovnání S4BP a S1JP.....	45
Graf č. 7: Odhad Hurstova exponentu pro S1BP.....	55
Graf č. 8: Odhad Hurstova exponentu pro S2BP.....	56
Graf č. 9: Odhad Hurstova exponentu pro S3BP.....	56
Graf č. 10: Odhad Hurstova exponentu pro S4BP.....	57
Graf č. 11: Odhad Hurstova exponentu pro S1JP.....	58
Graf č. 12: Odhad Hurstova exponentu pro S2JP.....	58

ÚVOD

Tato práce se zabývá fraktály a fraktální geometrií. V první části bude popsána historie a původ fraktální teorie. První kapitola je tak rozvržena na několik historicky významných objevů a jejich autorů, kteří přispěli k vývoji fraktální geometrie. Slovo fraktál pochází z latinského slova „fractus“ což znamená zlomený. Toto označení použil poprvé Benoit B. Mandelbrot, jemuž je věnována část první kapitoly. Právě on je považován za otce fraktálů, nicméně jeho práce navazuje na díla mnoha dalších autorů a je správné se zmínit o dalších jako jsou Koch, Julia nebo například Hausdorff.

Ve druhé kapitole jsou popsány základní pojmy, jež úzce souvisí s fraktály. Tyto pojmy jsou základem k pochopení fraktálů a fraktálních křivek. Jsou zde popsány pojmy jako nekonečně členitý útvar, fraktální dimenze nebo soběpodobnost, která je jedním ze základních znaků fraktálů, ačkoliv úplná soběpodobnost je dost vzácná. V poslední části je popis R/S analýzy. Tento nástroj je používán ve finančních časových řadách, protože je jednoduchým způsobem, jak odhadnout Hurstův exponent a tím i fraktální dimenzi těchto křivek.

Ve třetí kapitole je přiblížena analýza časových řad, její základní charakteristiky. Větší část kapitoly se věnuje finančním časovým řadám, které mají specifické vlastnosti. Predikce časových řad je neustále vyvíjející se trend, a to hlavně z důvodu zapojení IT technologií, díky kterým jsme schopni provádět velké množství výpočtů za krátký časový úsek. Také díky těmto technologiím vznikla nová věda, jež se nazývá teorie chaosu. Jsou zde naznačeny problémy, které vznikají při predikci dalšího vývoje časové řady. V poslední části je naznačena problematika v oblasti pojišťovnictví, neboť v praktické části budou popsána skutečná data z pojišťovny.

Ve čtvrté kapitole se práce věnuje analýze konkrétnímu typu řady. Jedná se o stornovost pojistných smluv běžně a jednorázově placených. Nejprve je popsán způsob stornování pojistných smluv. Následně je třeba zvolit vhodnou popisnou statistiku k tomu, abychom byli schopni interpretovat data, která analyzujeme. Dále je přiblížena problematika predikce vývoje těchto časových řad, resp. zvolení modelu Box-Jenkinsovy metodologie, který by nejlépe modeloval skutečná data. Poslední částí je konečná fraktální analýza, při které se pokusíme odhadnout fraktální dimenzi křivek. Nejprve odhadneme dimenzi stornování běžně placených smluv a následně jednorázově placených smluv. Závěrem je porovnání výsledků a diskuze, ve které budou rozebrány výsledky analýzy.

1 HISTORIE FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

„Umění pokládat správné otázky v matematice je důležitější, než umění je řešit.“ [1]

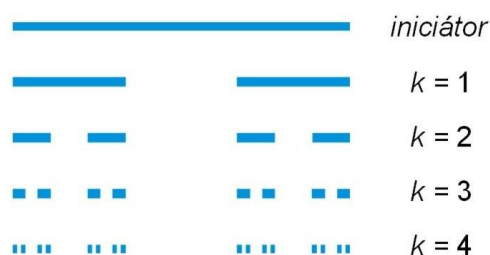
Georg Cantor

V této části práce bude čtenář seznámen s historií fraktální geometrie. Jsou zde popsány historické milníky ve vývoji fraktální geometrie a její vznik. Kapitola je rozvržena mezi jednotlivé matematické či geometrické objevy, jež můžeme pokládat za prvotní kroky ke vzniku fraktální geometrie jako takové. V historii fraktálu bychom jistě našli mnoho autorů významných matematických děl, kteří více či méně přispěli k vývoji fraktální geometrie. Alespoň zde můžeme vyjmenovat několik významných matematiků jako jsou například Georg Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Helge von Koch, Waclaw Sierpinski, Gaston Julia, Felix Hausdorff, Alexander Ljapunov, Edward Lorenz a Benoit Mandelbrot. Největší část je věnována francouzskému matematikovi Benoitu B. Mandelbrotovi, jenž je považován za otce fraktální geometrie a slova fraktál.

1.1 Cantorova množina, prototyp fraktálu

Tvůrce teorie množin Georg Cantor byl německý matematik, který se narodil v roce 1845 v Petrohradě. Jeho nadání ho vedlo k hlubšímu zájmu o matematiku a později k práci na univerzitě v Halle, kde se stal profesorem, a to v pouhých 34 letech. V roce 1883 popsal množinu, která má fraktální vlastnosti a nese dnes jeho jméno. [2] Cantorova množina je fraktální objekt a hraje svojí roli v mnoha odvětvích matematiky. Je také základem některých dalších fraktálních objektů. [1]

Cantorova množina je množina bodů z intervalu $[0,1]$ na číselné ose, v jejichž triadickém rozvoji se vyskytují číslice 0 nebo 2. Její geometrická konstrukce je založena na opakování jednoduchého úkonu, spočívajícím v rozdělení daného intervalu na třetiny a odstranění vnitřních bodů prostřední části. Na obrázku č. 1 můžeme vidět Cantorovu množinu po 4 iteracích. [2]



Obrázek č. 1: Cantorova množina

Zdroj [3]

Cantorovu množinu můžeme chápat také jako invariantní množinu systému transformací $f_{1,2}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ popsanych vztahy

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x+2}{3}, x \in [0,1]. \quad (1)$$

Označíme-li Cantorovu množinu symbolem C , pak

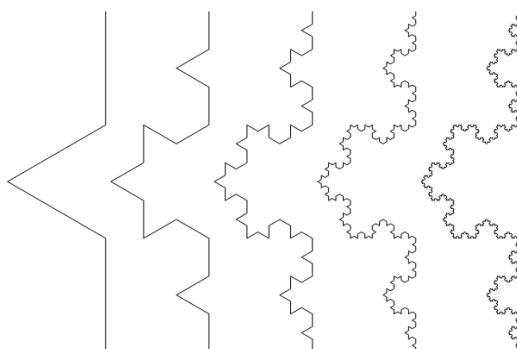
$$C = f_1(C) \cup f_2(C). \quad (2)$$

Cantor tak popsal zajímavou množinu s mnoha pozoruhodnými vlastnostmi. Pokud bychom přiblížili kteroukoliv část po libovolném množství iterací, viděli bychom původní útvar. Jinými slovy každá část je podobná celku. Tato vlastnost je jednou z typických vlastností fraktálů a ačkoliv útvary připomínající samy sebe byly lidstvu známé, až do začátku 20. století se jimi blíže nikdo nezabýval.[2]

1.2 Spojité nediferencovatelné funkce

Mezi fraktály řadíme dnes i grafy spojitých nediferencovatelných funkcí, které začaly být v matematice systematicky studovány zhruba od poslední čtvrtiny 19. století. Před tím se obecně věřilo, že spojitá funkce je diferencovatelná, až na případný konečný počet bodů, ve kterých derivace neexistuje. Karl Weierstrass roku 1873 publikoval příklad spojitě funkce, která nemá derivaci v žádném bodě.

Dalším matematikem, který přispěl k historii fraktální geometrie, je Švéd Helge von Koch, jenž sestrojil křivku, která je považovaná za jeden z nejkrásnějších příkladů fraktálů. Jeho motivem bylo uvést příklad křivky s obdobnými vlastnostmi jako má graf Weierstrassovy funkce, který zároveň nepostrádá geometrickou názornost. Sestrojení Kochovy křivky připomíná konstrukci Cantorovy množiny.

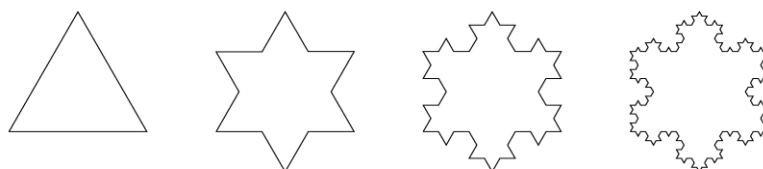


Obrázek č. 2: Kochova křivka

Zdroj: [4]

Iniciátorem v tomto případě je úsečka a pravidlem, které při konstrukci opakovaně uplatňujeme, je nahrazení vnitřních bodů prostřední třetiny rovnoramenným trojúhelníkem bez základny. Pravidlo opakujeme na všechny úsečky nově vytvořeného útvaru. Jak vidíme na obrázku č. 2, již ve třetím opakování pravidla vznikne členitá struktura, kterou můžeme dále zjemňovat. Každým krokem získáme komplikovanější strukturu, jejíž každá část připomíná celý útvar.

Iniciátor lze nahradit jinými objekty, stejně tak i pravidlo je možné změnit. Pokud bychom na místo úsečky použili trojúhelník a pravidlo bychom zachovali stejné, po několika iteracích bychom získali tzv. Kochovu vločku (obrázek č. 3). Zajímavostí je, že struktura vloček je opravdu tvořena tímto způsobem, kde dochází k opakování jednoduchého pravidla. Podobným způsobem lze vytvořit nejen objekty tohoto typu, ale také složitější tvary připomínající obrysy kontinentů. Záleží jen na vhodném zvolení spouštěče a pravidla.



Obrázek č. 3: Kochova vločka

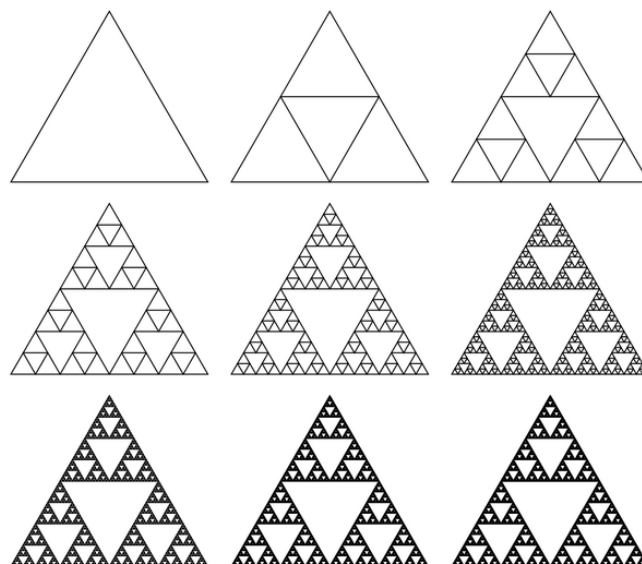
Zdroj [5]

1.3 Sierpińského fraktály

Wacław Sierpiński (1882–1969) je jedním z nejvýznamnějších polských matematiků 20. století. Základní školu navštěvoval ve Varšavě a už zde se projevilo jeho nadání na matematiku.

O několik let později vystudoval matematiku a fyziku na univerzitě ve Varšavě. V této době bylo Polsko okupováno Ruskem a celá země byla touto okupací ovlivněna. Doktorský titul získal na univerzitě v Krakově. Za svou disertační práci získal mnoho ocenění. Sierpiński publikoval velké množství knih a dalších publikací. Během svého života získal spoustu ocenění a také čestných titulů, z nichž mu jeden udělila i Karlova univerzita v roce 1947. [6]

V roce 1916 popsal útvar, který má typické fraktální vlastnosti. Dnes je známý pod názvem Sierpińského trojúhelník. Iniciátorem při jeho konstrukci je rovnostranný trojúhelník a pravidlo, které při konstrukci opakovaně aplikujeme, spočívá v odstranění vnitřních bodů trojúhelníka, jehož vrcholy tvoří středy stran původního trojúhelníka. Pravidlo opakujeme, a tak v nově vytvořených trojúhelnících vytváříme další a další trojúhelníky. Po nekonečně mnoha iteracích získáme Sierpińského trojúhelník (obrázek č. 4). [2]



Obrázek č. 4: Sierpiňského trojúhelník – postupná konstrukce

Zdroj [7]

Základní motiv, s nímž se setkáme při konstrukci Sierpiňského trojúhelníku, lze spatřit i na kazatelně katedrály v Ravellu a na jiných místech. Z toho je patrné, že principy tvorby fraktálů byly již dříve využívány ve výtvarném umění (je nutné podotknout, že slovo fraktál vzniklo teprve ve 20. století). Katedrála není jedinou historickou památkou, využívající tento motiv. Další fraktální vzor lze nalézt v bazilice San Clemente v Itálii. [2]

1.4 Zavedení neceločíselné dimenze

Felix Hausdorff (1868-1942) byl německým matematikem, který během svého života publikoval velké množství děl. Byla to díla nejen matematická, ale i nematematická. Tyto práce vydával pod pseudonymem Paul Mongré, jenž si zvolil, protože byl ovlivněn filozofií Friedricha Nietzscheho. Mezi jeho tvorbu patří například i divadelní hra *Der Arzt seiner Ehre*, která byla uvedena i v Praze. Jeho rodiče byli židovského původu, otec byl obchodník a vzdělaný muž, který publikoval několik pojednání (mj. o talmudském právu).

Jak název podkapitoly upozorňuje, do fraktální geometrie přispěl Hausdorff svou prací z roku 1919, kde bychom našli pojetí tzv. Hausdorffovy míry a dimenze, které jsou popsány ve druhé kapitole této práce. [2]



Obrázek č. 5: Felix Hausdorff

Zdroj [8]

Objektům, s nimiž se setkáváme v eukleidovské geometrii přiřazujeme celočíselné dimenze (1 pro úsečku, 2 pro plochu a 3 pro těleso). Definice dimenze, která připouští i neceločíselné hodnoty, umožňuje matematicky vyjádřit členitost komplikovanějších struktur. Když se podíváme do přírody, tak vidíme nejen dokonale hladké objekty, ale i hrubé povrchy. Mrak není koule, blesk není přímka a hora není kužel, alespoň ne dokonale. Jak tedy popsat objekty, které mají svůj unikátní tvar? Odpověď je právě ve fraktální dimenzi, jež umožňuje objektům přiřadit neceločíselnou dimenzi. [2]

V roce 1939 se pokusil Felix Hausdorff emigrovat do USA a opustit v té době antisemitistické Německo. Jeho pokus byl marný a v roce 1942, 26. ledna, spáchal spolu se svou ženou sebevraždu, jakmile se dozvěděl, že jeho deportace do koncentračního tábora je vzdálená jen jeden týden. Jeho sestry, které žily část života v Praze, zemřely v roce 1944 v Terezíně.

Dne 29.11. 2018 proběhlo setkání ke 150. výročí narození Felixe Hausdorffa jehož se autor této práce zúčastnil a ze kterého pochází informace o jednom z nejvýznamnějších matematiků 20. století. Zde je pouze stručný odkaz Hausdorffa v matematice:

- Hausdorffův prostor
- Hausdorffova míra
- Hausdorffova dimenze
- Hausdorffova vzdálenost
- Hausdorffova-Aleksandrovova věta
- Hausdorffova-Youngova nerovnost
- Hausdorffův princip maximality

1.5 Počátky komplexní dynamiky

System je definovaný jako množina prvků, mezi kterými existují vazby a vztahy a jako celek má vazby, resp. vztahy s okolím. Dynamické systémy jsou popsány dynamickými podmínkami a jejich stav závisí na časovém okamžiku. Tyto podmínky jsou tvořeny vektorem, který se nachází ve stavovém prostoru. Soustava diferenciálních rovnic popisuje tyto podmínky, které se v různých časových okamžicích liší a výsledky tak nahrazují starý vektor novým stavovým vektorem.

Stavový prostor určuje, jakých hodnot může nabývat stavový vektor dynamického systému. Stavový vektor je tvořen množinou proměnných, které mohou nabývat hodnot z určitého intervalu. Interval všech těchto hodnot potom určuje celý stavový prostor.

Stavový prostor může být několika typů:

- *konečný*
- *spočítatelný*
- *nekonečný*

Konečný stavový prostor má omezené množství stavů, ve kterých se dynamický systém může nacházet. Spočítatelný stavový prostor má sice nekonečné množství stavů, ale tyto stavy jsou spočítatelné. To znamená, že každému stavu můžeme jednoznačně přiřadit nějaké přirozené číslo. Nekonečný stavový prostor má jako stavové proměnné reálná čísla. To znamená, že je nejen nekonečný, ale není také spočítatelný. [9]

Z toho vyplývá, že je možné stav popsat pomocí komplexních čísel. V části 1.6 je vysvětlena Mandelbrotova množina a v ní je právě použito komplexních čísel. Tato čísla lze zobrazit na osu x , kde zaznamenáváme reálnou hodnotu a na osu y , kde zaznamenáváme imaginární část čísla. Je tedy možné zobrazit polohu prvků ve stavovém vektoru. [9]

Pokud zkoumáme dynamické systémy, zpravidla nás zajímá jejich chování v čase a snažíme se zobrazit jakýmsi způsobem toto chování. Pokud se ve stavovém prostoru systému nachází pouze jeden, dva nebo tři prvky, můžeme zobrazit toto chování na ploše či v prostoru. Problém nastává tehdy, když je prvků více, a právě zobrazení takových prvků bylo možné až s pokročilejší výpočetní technikou. Benoit Mandelbrot právě zobrazil svou množinu pomocí barevných kombinací a pravidel. Více se čtenář dozví v části 1.6.

Pomocí jednoduchého dynamického systému jsou vytvářeny Juliovy množiny (podobně jako Mandelbrotova množina), založené na postupné iteraci funkce komplexní paraboly. Jako mladý student, který se vrátil z první světové války, publikoval práci „*Mémoire sur l'itération*

des fonctions rationnelles“, která vyvolala značný rozruch na matematické půdě. Představme si, jak musel být v jeho letech nadaný, neboť i přes to, že přerušil studium kvůli válce, aby mohl bojovat za svou vlast, dokázal napsat dvousetstránkovou matematickou publikaci. Ve válce byl zraněn a důsledkem těchto zranění byla ztráta nosu (obr. 6). Jeho prací se později v 70. letech 20. století zabýval Benoit Mandelbrot, který se inspiroval právě touto publikací o podivných množinách v komplexní rovině. [2]



Obrázek č. 6 a č. 7: Gaston Julia

Zdroj 6 [10] Zdroj 7 [11]

Zobrazení Juliových množin bylo nemožné do té doby, než přišel rozvoj IT. Toho využil právě Mandelbrot, a tak objevil, že Juliovy množiny jsou právě dobrým zdrojem fraktálů. Způsob konstrukce je popsán v knize *Fraktální geometrie principy a aplikace*:

Ke konstrukci těchto množin se používají iterace polynomů, jak to ukazuje např. následující vztah:

$$x \mapsto x^2 + c \mapsto (x^2 + c)^2 + c \mapsto ((x^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots \quad (3)$$

Tato iterační posloupnost může mít dvě vlastnosti v závislosti na velikosti startovní hodnoty komplexní proměnné x (pro pevné $c \in \mathbb{C}$):

- *Posloupnost je neohraničená – překročí hranici jakéhokoliv kruhu umístěného okolo startovního bodu (množina „utečenců“)*
- *Posloupnost je ohraničená – existuje kruh umístěný okolo startovního bodu, jehož hranici posloupnost nikdy nepřekročí (množina „věžňů“)*

Množiny hodnot obou typů proměnných jsou komplementární a hranice mezi nimi je Juliova množina. Tato množina již nepatří do třídy „soběpodobných“, ale do třídy autofinních fraktálů díky tomu, že je vytvořena nelineárními transformacemi. [2]

1.6 Fraktalista

Již z názvu podkapitoly by mnoha čtenářům pravděpodobně bylo jasné, koho se týká. Benoit B. Mandelbrot byl velmi známým matematikem 20. a 21. století, neboť právě on je považován za otce fraktální geometrie a vlastně samotného slova fraktál. Jak popisuje ve své knize „Fraktalista, rebelem ve vědě“, při psaní své práce nevěděl, jak nazvat takové objekty, a tak si půjčil synův latinský slovník a našel slovo fractus, neboli zlomený. [12] To se mu natolik zalíbilo, že jej použil ve své nejznámější práci „The fractal Geometry of Nature“ v roce 1982. Zde se poprvé objevuje množina, jež má nádherné tvary a také nese autorovo jméno – Mandelbrotova množina. [2]

Mandelbrot se narodil v roce 1924 v Polsku. V jeho 12ti letech se přestěhovali s celou rodinou do Paříže, kde navštěvoval lyceum. Vzhledem k jeho židovskému původu byl nucen s rodinou opět emigrovat, a to do Irska. Po osvobození Paříže se vrátil a přihlásil se do Ecole Normale Supérieure a Ecole Polytechnique. I přes všechny potíže a přerušované studium se dokázal sám „učit“, což poukazovalo na jeho nadání. Obzvláště v geometrii, kde viděl souvislosti i bez hlubokých matematických znalostí. [2]



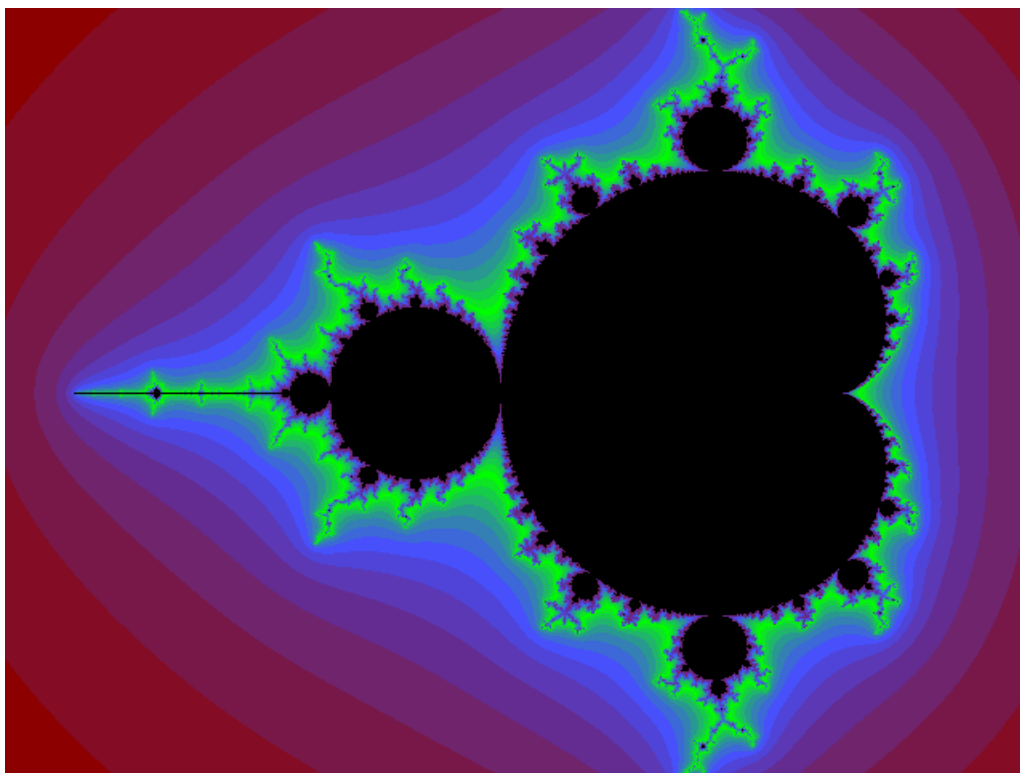
Obrázek č. 8: Benoit B. Mandelbrot

Zdroj: [13]

Po úspěšném vystudování v Paříži obdržel stipendium, a tedy možnost studovat ve Spojených státech amerických. V USA studoval dva roky prestižní školu Caltech, kterou může čtenář znát ze slavného seriálu Teorie velkého třesku. Jeho zajímavá kariéra pokračuje u společnosti IBM, kde působil ve výzkumném centru. Zde měl příležitost využívat pro svou práci výkonnější výpočetní techniku. Je známo, že studoval fluktuace cen bavlny na trhu. Pozoroval, že časová řada, byť s různým vzorkováním, vykazuje sobě podobné tvary. Například časová řada s měsíční periodou byla velmi podobná časové řadě s denním vzorkováním. Tato skutečnost ho vedla k dalšímu studiu takových soběpodobností. Podobné chování zjistil ve svých studiích i Harold Hurst, který studoval fluktuaci hladiny Nilu. O Hurstově exponentu je dále pojednáno ve druhé kapitole. [2]

Mandelbrotova publikace byla ovlivněna mnoha autory, např. L. F. Richardson poukázal na rozdíly mezi naměřenou délkou hranic států. Jak je možné, že byly naměřeny dvě rozdílné hodnoty? Odpovědí může být zvolené měřítko. Čím více se přibližujeme, tím je délka hranic větší. Takové poznatky a mnohem více publikoval ve své další knize, kterou nazval Manifest a soubor kazuistik. [2] Mandelbrot byl oceněn, a to právem, velkým množstvím titulů a akademických cen. Právě díky němu a jeho zajímavé nové geometrii vznikla i tato práce a věřím, že mnoho dalších autorů je a bude inspirováno jeho dílem.

Mandelbrot je často popisován jako otec fraktální geometrie. Ačkoliv někteří lidé tvrdí, že fraktály a jejich charakteristické vlastnosti byly v minulosti popsány v klasické matematice a matematiky té doby jako jsou například Georg Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Helge von Koch, Waclaw Sierpinski, Gaston Julia, Felix Hausdorff a mnoho dalších. Je pravdou, že některé výtvořky těchto matematiků hrály klíčovou roli v Mandelbrotově konceptu nové geometrie. Současně je ale také pravda, že tito autoři nepřemýšleli o svých výtvořech jako o krocích vedoucích k nové perspektivě nebo nové geometrii přírody. Až Mandelbrot poukázal na to, že tyto matematické fraktály mají ve skutečnosti mnoho společného s tvary, které můžeme nalézt v přírodě. [1]



Obrázek č. 9: Mandelbrotova množina

Zdroj [14]

Mandelbrotova množina je množinou komplexních bodů c v komplexní rovině, pro které je rekurentně zadaná posloupnost

$$Z_0 = 0 \text{ a dále } Z_{n+1} = Z_n^2 + c, \quad (4)$$

omezená.

Mandelbrotova množina je zobrazena na obrázku č. 9, kde barevné odstíny označují rychlost divergence posloupnosti. Černá barva znázorňuje body, pro které posloupnost konverguje. [15]

2 FRAKTÁL, FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

V této kapitole bude popsán fraktál, resp. fraktální geometrie. Zavedeme některé pojmy, se kterými budeme dále pracovat. Jsou zde vysvětleny vlastnosti fraktálů a smysl fraktální geometrie. Jednou z hlavních vlastností geometrických fraktálů je soběpodobnost, kterou je třeba charakterizovat. V poslední podkapitole je uvedena R/S analýza, která slouží k odhadu Hurstova exponentu. Dále je vyjádřen vztah Hurstova exponentu k fraktální dimenzi.

V první kapitole jsme se dozvěděli, že fraktál lze zhruba charakterizovat jako nekonečně členitý útvar. K vysvětlení slova fraktál bude potřeba charakterizovat několik základních pojmů.

2.1 Geometricky hladký a nekonečně členitý útvar

Již eukleidovská geometrie charakterizuje běžné, základní tvary, resp. tělesa, která umíme dokonale popsat. Mají určité vlastnosti (délka, výška, hloubka, objem, obsah atd.), pro které jsou zavedeny vztahy a díky nimž si dokážeme představit těleso a nezáleží na zvoleném měřítku. I v případě různých měřítek jsou tvar, plocha, objem atd. vždy stejné. Jak jsem již v první kapitole předeslal, dimenze těchto geometrických útvarů je 1 v případě přímky/úsečky, 2 v případě tělesa s plochou a 3 v případě tělesa, u které lze definovat objem. Dimenze vyjadřuje počet „čísel“ nutných k určení jejich polohy. V případě přímky nám tedy stačí jedno číslo, v případě tělesa s plochou např. kosodélník 2 čísla a u takového válce musíme hledat čísla 3. [2]

Hovoříme tedy o dimenzích, a tak úsečku bychom dokázali nalézt v jednorozměrném prostoru a takový válec v třírozměrném prostoru. Všem útvarům lze tedy přiřadit celočíselnou dimenzi, resp. topologickou dimenzi. Na takových útvarech nenalezneme nerovnost nebo hrubost a hovoříme tedy o geometricky hladkých útvarech. Můžeme o nich tvrdit, že jsou dokonalé, ale ne nekonečně členité, neboť jsou přesně vymezeny a popsány. Ovšem v přírodě nalezneme útvary, které rozhodně nejsou bez hrubosti, nejsou dokonale hladké a jsou velmi členité. Jaký povrch má takový květák nebo mozek? Jaký objem mají plíce? Lze nějakým číslem popsat jak složitá, popř. hrubá tato „tělesa“ jsou? Na tyto otázky dokázal odpovědět v předchozí kapitole zmíněný Benoit Mandelbrot. [2]

Z předchozích odstavců jsme se tedy dozvěděli, že pro „dokonalá“ tělesa máme jasně dané dimenze. Ale existuje dimenze, která by dokázala popisovat hrubost nedokonalých objektů? L. F. Richardson byl anglický matematik, který se zabýval vztahem mezi pravděpodobností toho, že dvě sousedící země půjdou do otevřeného konfliktu, tedy do války a délkou jejich společné hranice. Během tohoto výzkumu si povšiml, že různé publikace uvádí různé délky

společných hranic. Nejednalo se pouze o drobné nesrovnalosti, ale třeba i o desítky kilometrů. Jak je možné, že odborné publikace uvádějí různé délky s velkým rozdílem? A právě Richardson byl první, kdo poukázal na závislost použitého měřítka a naměřené délky. Pobřeží nebo například hranice nejsou nikdy dokonale rovnou čarou na mapě (možná u některých afrických zemí, ale touto skutečností nebudeme tuto problematiku komplikovat).

Tento anglický matematik také odvodil empirický vztah:

$$K = C\varepsilon^D \quad (5)$$

kde $\varepsilon > 0$ je délka použitého měřítka, C je konstanta úměrnosti a $K = K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$.

ε je celková délka aproximace pobřeží, kde $N(\varepsilon)$ je nutný počet kroků. Délka aproximace se ukázala být závislá na konstantě D , jejíž význam si Richardson nedokázal vysvětlit.

[2]

A proč právě Benoit Mandelbrot dokázal tuto konstantu vysvětlit? Protože o několik let později zjistil souvislost mezi konstantou „ D “ a Hausdorffovou dimenzí, která je popsána v následující podkapitole a také využil rozvoj výpočetní technologie, jinými slovy Mandelbrot žil ve správné době a pracoval na správném místě, neboť právě společnost IBM, ve které pracoval, stojí za částí technologického rozkvetu ve 20. století. Nyní víme, že linie pobřeží či hranice jsou útvary, které mají podobné vlastnosti a při změně měřítka lze nalézt další a další strukturu. [2]

2.2 Hausdorffova míra a dimenze

Jak již bylo zmíněno v části 1.4, Hausdorff ve svém článku z roku 1918 publikoval míry a dimenze, které připouští neceločíselné dimenze a jsou vhodné pro popis fraktálních útvarů. Pokud chceme porozumět fraktálům, je třeba nejprve pochopit Hausdorffovu míru a dimenzi, která bude využita v praktické části této práce.

Je-li U neprázdná podmnožina n -dimenzionálního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^n , pak průměr U je definovaný jako $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, tj. supremum vzdálenosti všech párů bodů v U . Pokud $\{U_i\}$ je spočetný (nebo konečný) systém množin průměru nejvýše δ , které pokrývají F , tzn. $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ s $0 \leq |U_i| \leq \delta$ pro každé i , můžeme říci, že $\{U_i\}$ je δ -pokrytí F . [17]

Předpokládáme, že F je podmnožina \mathbb{R}^n a s je nezáporné číslo. Pro jakékoliv $\delta > 0$ definujeme:

$$H_{\delta}^s(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } F\} \quad (6)$$

Tím pádem se díváme na množiny pokrývající F jako na množiny průměru nejvýše δ a hledáme infimum součtu s -tých mocnin jejich průměrů. S klesajícím δ je třída přípustnosti pokrývající F ve vzorci redukována. Proto $H_\delta^s(F)$ roste; jeho limitu pro $\delta \rightarrow 0$. Označíme:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (7)$$

Tato limita existuje pro jakoukoliv podmnožinu F reálných čísel, ačkoli její hodnota může být (a obvykle je) 0 nebo ∞ . Nazýváme $H^s(F)$ s -dimenzionální Hausdorffovou mírou F . [17]

Pokud se podíváme na vztah 6, je jasné, že pro jakoukoliv množinu $F \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta < 1$, $H_\delta^s(F)$ je nerostoucí vzhledem na „ s “, takže stejně tak vztah 7 $H^s(F)$ je nerostoucí. Ve skutečnosti, pokud $t > s$ a $\{U_i\}$ je δ -pokrytí F dostaneme:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} * |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (8)$$

Takže infimum $H_\delta^s(F)^s \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$. Pokud $\delta \rightarrow 0$, vidíme že když $H^s(F) < \infty$ pak $H^t(F) = 0$ pro $t > s$. Pokud bychom položili na osu y hodnotu $H^s(F)$ a na osu x „ s “, viděli bychom jak $H^s(F)$ „odskočí“ z nekonečna na hodnotu 0. Tato kritická hodnota se nazývá Hausdorffovou dimenzí F , a značí se $\dim_H F$, která je definována pro jakoukoliv množinu $F \subset \mathbb{R}^n$. [17]

Vraťme se na chvíli k problematice pobřeží a měření jeho délky. Jak jsem popsal v předchozí části této práce, úsečka má dimenzi (topologickou) rovnou jedné. Přibližování se k této úsečce, resp. měněním měřítka se její délka nezvětšuje, je stále stejná. Pokud se ale budeme přibližovat k pobřeží, délka začne narůstat. A pokud zvětšujeme měřítko víc a víc, délka pobřeží se zvětšuje. Pokud porovnáme přímku s pobřežím zjistíme, že pobřeží není jako přímka, která má jednorozměrnou dimenzi. Na druhou stranu pobřeží není ani plocha, prostor vyplňuje trochu jiným způsobem. Je tedy zřejmé, že dimenze pobřeží nebude celočíselná, ale pohybuje se neostře mezi jedničkou a dvojkou. Takovou dimenzi nazýváme fraktální. [2]

Ačkoliv Hausdorffova míra a dimenze byly vskutku velkým objevem, práce měla minimálně ohlasů. Až po deseti letech ruský matematik Abram Samojlovič Bezikovič zmínil tuto práci ve svých člancích. A právě díky němu se Hausdorffova dimenze dočkala ohlasu. Mandelbrot ve své práci navrhl označení Hausdorffova-Bezikičova dimenze. Tento pojem se ovšem neuchytil. [16]

2.3 Fraktální dimenze

Z předchozích částí víme, že fraktál je nekonečně členitý útvar, jenž není pouze výplodem fantazie matematiků, ale i existujícími útvary v přírodě, jež vykazují podobné znaky jako fraktální objekty popisované v matematice. A právě Hausdorffova neceločíselná dimenze konečně dokázala vyjádřit číslem jejich hrubost, komplikovanost. Poté co Mandelbrot tyto útvary označil slovem fraktál, nazýváme Hausdorffovu dimenzi také fraktální dimenzí. Právě díky této dimenzi byl schopen Mandelbrot popsat fraktály, neboť z definice fraktálu víme, že topologická dimenze fraktálu je obvykle nižší než dimenze fraktální. Nicméně byly nutné další úpravy pro zjednodušení a zrychlení výpočtu této dimenze. [16]

Fraktální dimenze zaujala spoustu známých matematiků a přivedla tak na svět několik definic, které zde budou uvedeny. Francouzský matematik Georges Bouligand, který vystudoval stejnou francouzskou školu jako Gaston Julia, definoval neceločíselnou dimenzi. Využil při tom Minkowského definici míry množiny $A \subset \mathbb{R}^3$. [16]

Jestliže pro $A \subset \mathbb{R}^n$ má poměr $V(A_r)/r^{n-s}$ konečnou limitu pro $r \rightarrow 0^+$, pak považujeme množinu A za s -dimenzionální. [16]

Definice: Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$, pak

$$\dim_B A = n - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log V(A_r)}{\log r}. \quad (9)$$

Tento výsledek byl publikován v roce 1925. Jednalo se o stručnou studii, kterou zaslal pařížské Akademii, neboť se obával o prvenství tohoto objevu. Díky využití myšlenky Minkowského se začalo používat označení Minkowského-Bouligandova dimenze. Tato dimenze se označuje jako box-counting dimension a v české literatuře se jednotný přeložený název neujal. [16]

Analogicky tak lze definovat

$$\dim_B A = n - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(A)}{-\log r} \quad (10)$$

kde $N_r(A)$ je počet čtverců (krychlí) se stranou r , které mají s množinou A neprázdný průnik. Minkowského-Bouligandova dimenze má proto značný praktický význam, neboť uvedený postup a tento vzorec lze dobře použít pro odhad dimenze např. i v případě experimentálně zjištěných dat. [16]

Ačkoliv jsou definice fraktální dimenze dosti podobné, nelze obecně tvrdit, že nabývají stejných hodnot pro všechny množiny. V knize „O pojetí křivky“ uvádí autor, že na intervalu $[0, 1]$ nabývají dimenze různých hodnot. Pokud jsme v oboru racionálních čísel, je Hausdorffova dimenze nulová a tzv. box-counting dimension je rovna jedné. [16] Zde se naráží i na pojem „soběpodobnost“, kterému se budeme věnovat v další podkapitole.

Další autoři podobných definic jako je např. Pontrjagin a Šnirel'man zavedli pojem metrického řádu kompaktního metrického prostoru X .

Pojem neceločíselné dimenze založený na stejných či podobných úvahách se pod různými názvy objevoval v pracích dalších autorů. Jiná formulace pochází od Lva Semjonoviče Pontrjagina (1908-1988) a Lva Genrichoviče Šnirel'mana (1905-1938). [16]

Zavedeme pokrytí X konečným systémem uzavřených množin s průměrem nejvýše ε . Nejmenší počet takových množin nutný k pokrytí X označíme $N_\varepsilon(X)$. Jedná se o funkci rostoucí nade všechny meze pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$ a závisující zřejmě na metrice X .

K definování metrického řádu je použita škála mocninných funkcí t^a a metrický řád k prostoru X je pak definován jako řez v množině všech a . Lze jej vyjádřit rovností:

$$k = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\log N_\varepsilon(X)}{\log \varepsilon} \right). \quad (11)$$

Metrický řád není topologicky invariantní charakteristikou X . Autoři nicméně odkazují na větu, která ukazuje na překvapivou souvislost mezi metrickými vlastnostmi daného prostoru a jeho topologickou dimenzí. Nejmenší z metrických řádů k pro všechny metriky kompaktního prostoru X je roven jeho topologické dimenzi. [16]

Existují rozdíly mezi Hausdorffovou a Minkowského-Bouligandovou dimenzí a metrickým řádem Pontrjagina a Šnirel'mana. Pokud by měl čtenář zájem o prozkoumání těchto rozdílů, doporučuji přečíst knihu „O pojetí křivky“, ze které je v této podkapitole často citováno.

Nyní lze vypočítat neceločíselnou dimenzi různých útvarů. Jak z předchozích částí už víme, fraktál definujeme tak, že jeho topologická dimenze je obvykle menší než dimenze fraktální. Také víme, že když měníme měřítko objektů, které nejsou fraktály, tak se jejich délka, plocha či objem nemění a zůstává stále stejný. U fraktálních objektů je tato vlastnost jiná, tedy jejich délka, povrch či objem se s přibližujícím měřítkem neustále zvětšuje až do nekonečna. Této vlastnosti se obecně říká Richardsonův efekt. [2]

2.4 Soběpodobnost

Již na začátku práce jsme se seznámili s pojmem soběpodobnost, neboť tato vlastnost je ve světě fraktálů ta nejznámější. Tedy část zkoumaného útvaru při přiblížení (změně měřítka) vypadala stejně jako celý útvar. Jak tedy definovat soběpodobnost matematicky?

John Hutchinson věnoval soběpodobnosti rozsáhlé pojednání a vycházel z předchozí definice soběpodobnosti, že při změně měřítka se část podobá celku.

Definuje soběpodobnou podmnožinu W n -rozměrného eukleidovského prostoru \mathbb{R}^n tak, že existuje konečně mnoho kontraktivních, příp. i afinních zobrazení:

$$w_1, w_2, \dots, w_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (12)$$

takových, že platí:

$$W = \bigcup_{i=1}^m w_i(W) \quad (13)$$

přičemž pro libovolná $i \neq j$ obsahuje průnik:

$$w_i(W) \cap w_j(W) \quad (14)$$

jen konečný počet prvků (nebo je prázdný). V prostoru \mathbb{R}^n je zobrazeními definován operátor

$$w(X) = \bigcup_{i=1}^m w_i(X), X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (15)$$

který se nazývá Hutchinsonův operátor. Podle (13) je soběpodobná množina W pevným bodem příslušného Hutchinsonova operátoru. Tato množina se také nazývá atraktor operátoru w a musí mít nutně fraktální strukturu (mimo zcela triviálních případů). [2]

Původní Mandelbrotovu definici fraktálu „Fraktálem je objekt jehož dimenze topologická je nižší než dimenze fraktální“ nelze uplatnit obecně. Část fraktálu nemusí mít stejnou dimenzi jako jeho celek. Pokud chceme obecně popsat fraktály, využijeme tyto vlastnosti:

- v každé úrovni přiblížení nebo oddálení má své detaily
- jsou buď přesně nebo statisticky soběpodobné
- fraktální dimenze je větší než dimenze topologická
- některé lze popsat pomocí iterací jednoduchého pravidla, popř. algoritmu

Nyní je nutné definovat přesnou a statistickou soběpodobnost.[2]

Fraktály lze neformálně popsat jejich charakteristickými vlastnostmi:

- mají detaily na každé úrovni
- jsou (přesně, přibližně, statisticky) soběpodobné
- jejich fraktální dimenze je (ostře) větší než topologická dimenze
- někdy jsou popsatelné pomocí jednoduchých algoritmů

Rozlišujeme tedy soběpodobnost přesnou a statistickou. Přesnou soběpodobnost nalezneme ve fraktálech, jimiž jsme se zabývali v první kapitole. Jedná se o dobře popsany deterministický systém, kde dochází k přesnému opakování jednoduchého pravidla (např. Kochova křivka nebo Sierpinského trojúhelník). Tyto fraktály nezávisí na pravděpodobnosti a jejich chování je tedy deterministické. Opakují se zde totožné motivy a nenalezneme v nich odchylku. [2]

Naproti tomu statistická soběpodobnost je definována stochastickým systémem a jeho podoba závisí na nějaké pravděpodobnosti. Takové fraktály nalezneme nejčastěji v přírodě. Na jejich vlastnosti má tedy vliv pravděpodobnost neboli náhoda. Při generování takového fraktálu nalezneme pouze určité soběpodobné statistické charakteristiky. Tato zvláštnost se právě objevuje u finančních časových řad, kde generování dalšího prvku je náhodné. Takové soběpodobné vlastnosti našel Benoit Mandelbrot při studiu vývoje ceny bavlny. U křivek s různým vzorkováním (den, týden, měsíc apod.) našel soběpodobné prvky. [2]

Zajímavým statisticky soběpodobným fraktálem je tvar, který vznikl aplikací náhodné procházky. Tento prvek má vždy fraktální dimenzi rovnou 1,5. Poznat statisticky nebo přesně soběpodobný fraktál bývá často obtížné, neboť je mezi nimi tenká hranice. V další části se pokusíme odhadnout pomocí jednoho nástroje fraktální dimenzi a interpretovat možné výsledky. Tento nástroj se používá především při studiu chování časových řad. [2]

2.5 R/S analýza v odhadu fraktální dimenze

Tento nástroj jsem použil ve své bakalářské práci „Teorie chaosu a její aplikace v ekonomických modelech“, jenž právě úzce souvisí s fraktály. V práci je na vlastním příkladu popsána celá analýza, která je jedním z jednodušších způsobů pro získání odhadu Hurstova exponentu. Proto ji zde připomínám, aby čtenář pochopil souvislost. Je známo, že mezi odhadnutým Hurstovým exponentem a fraktální dimenzí existuje vztah (19).

$$D_f = 2 - H \quad (16)$$

kde D_f je fraktální dimenze a H je odhadnutý Hurstův exponent.

R/S analýza (z angl. „Rescaled Range Analysis / Statistic“) je statistický nástroj pro odhalení dlouhodobé závislosti v časových řadách a také poskytuje metodu pro odhad Hurstova exponentu. Hurstův exponent je velmi dobrým indikátorem stavu náhodnosti časové řady. R/S analýza je jednoduchá a přímočará, nicméně vyžaduje hodně pozorování, tedy dlouhé časové řady a spoustu výpočtů. Používá se zejména na kapitálových trzích. Díky této analýze lze nalézt fraktální strukturu a neperiodické cykly. Zde je krátký příklad postupu při odhadu Hurstova exponentu pomocí R/S analýzy. [18]

Nejprve musíme zjistit „Rescaled range“ pro celou časovou řadu. Vypočítáme průměr hodnot a od každé skutečné hodnoty ho odečteme. Tím získáme odchylky od průměru. Poté vypočítáme kumulativní hodnoty těchto odchylek. Z kumulativních hodnot je nutné zjistit rozsah, tzn. že najdeme nejvyšší hodnotu a hodnotu nejnižší a odečteme je ($R = \max(x) - \min(x)$). Následně z odchylek vypočítáme směrodatnou odchylku S . „Rescaled range“ získáme tak, že vydělíme rozsah a směrodatnou odchylku neboli R/S (odtud R/S analýza). Poté rozdělíme řadu na dva stejně veliké klastry a opět zjistíme R/S. Tentokrát to bude průměrná hodnota R/S z obou klastrů. Následně proces zopakujeme alespoň třikrát. Zde záleží na počtu pozorování. Nyní zjistíme logaritmy z R/S o základu 2 a také logaritmy z počtu pozorování N o základu 2. [18]

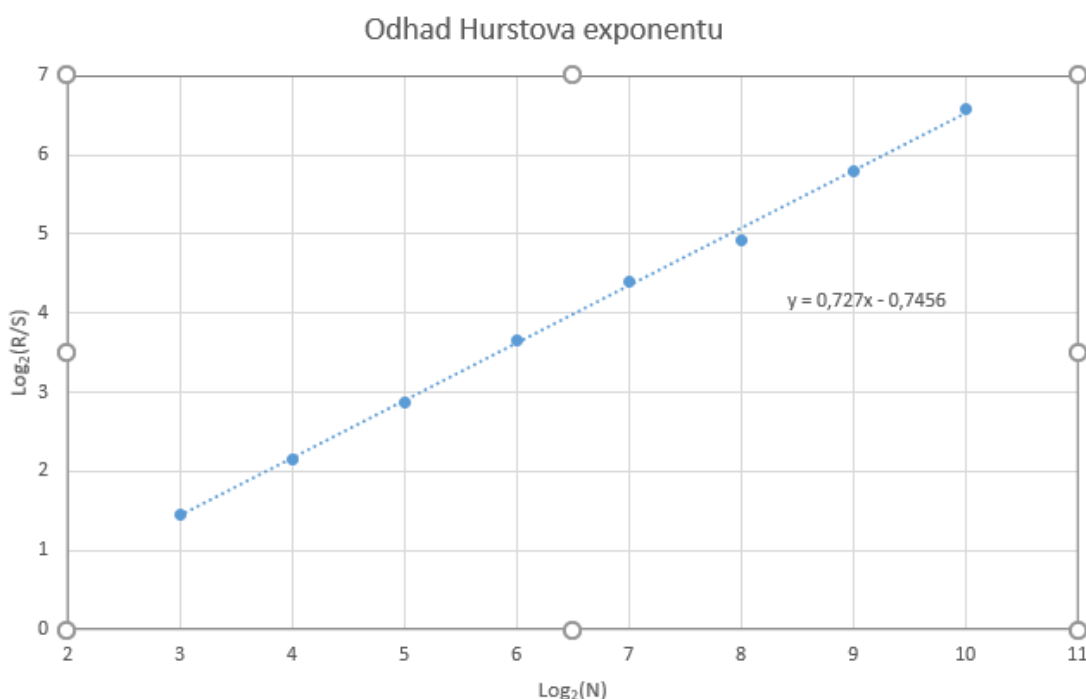
Získáme např. takovéto hodnoty uvedené v tabulce 1.

$N = \text{počet pozorování}$	$R/S_{av} = \text{průměr R/S}$	$X_i ; \log_2(N)$	$Y_i ; \log_2(R/S_{av})$
1024	96.4451	10	6.5916
512	55.7367	9	5.8006
256	30.2581	8	4.9193
128	20.9820	7	4.3911
64	12.6513	6	3.6612
32	7.2883	5	2.8656
16	4.4608	4	2.1573
8	2.7399	3	1.4541

Tabulka č. 1: R/S analýza

Zdroj: [18]

Z hodnot X_i a Y_i si vytvoříme bodový graf a proložíme jím lineární trend. Přidáme spojnicí trendu a zjistíme její rovnici. Konstanta, která značí sklon přímky je Hurstův exponent viz. graf č. 1. [18]



Graf č. 1: Odhad Hurstova exponentu

Zdroj: [18]

Je tedy zřejmé, že odhad Hurstova exponentu je 0,727 a časová řada má paměťový cyklus. Známá interpretace Hurstova exponentu je uvedena v tabulce 2 [19]:

Odhad Hurstova exponentu:	Chování časové řady:
$> 0,5$	Perzistentní
$=0,5$	Náhodná procházka
$<0,5$	Antiperzistentní

Tabulka č. 2: Interpretace Hurstova exponentu

Zdroj: [18]

Časové řady, které mají hodnotu Hurstova exponentu $= 0,5$ fungují podobně jako náhodná procházka a tedy další hodnoty nezávisí na hodnotách předchozích a jejich predikce je téměř nemožná. Pokud je časová řada perzistentní, pak je pravděpodobné, že krátkodobý trend bude posílen, resp. pokud byl trend časové řady klesající, pak bude i nadále klesající a naopak. Čím blíže je Hurstův exponent k jedné, tím silnější tendence „opakování“ trendu bude. Časová řada antiperzistentní má tendenci opačnou, tedy pokud je krátkodobý trend rostoucí, je

pravděpodobný následující pokles. Čím blíže je hodnota Hurstova exponentu 0, tím větší protiklad v chování bychom pozorovali.

Fraktální dimenzi odhadneme dle (19) a čím je větší fraktální dimenze, tím více prostoru křivka vyplňuje a je obtížnější její odhad. Pokud se fraktální dimenze blíží jedné, predikce bude jednoduchá, neboť fraktální dimenze rovna jedné je přímkou.

$$D_f = 2 - 0,727 = 1,273$$

Bylo by zajímavé sledovat, zda fraktální dimenze skutečných dat a fraktální dimenze odhadnutých dat do budoucnosti by byla stejná nebo alespoň podobná. Jaké chování křivky očekávat? V praktické části se budeme zabývat odhadem fraktální dimenze pro časové řady typické v pojišťovnictví.

3 FINANČNÍ ČASOVÉ ŘADY

V této kapitole je přiblížena problematika finančních časových řad. Jsou zde vysvětleny jejich charakteristické rysy. V první části kapitoly jsem čerpal z knihy Finanční časové řady od autorů Arlt a Arltová. Tito autoři jsou v České republice známí právě díky publikacím týkajících se problematiky časových řad. Další část této kapitoly se věnuje problematice časových řad v pojištění. Cílem této kapitoly je poukázat na skutečnost, že finanční časové řady se vyskytují také v pojišťovnictví, nejen na akciových trzích.

3.1 Charakteristické vlastnosti finančních časových řad

Časová řada je posloupnost sledovaných prvků seřazených zpravidla od nejstarších po nejnovější. Ekonomických finančních časových řad existuje několik druhů a jejich základní členění je z hlediska časového horizontu, a to na časové řady dlouhodobé a krátkodobé. Za dlouhodobé časové řady označujeme ty, které sledujeme v ročním a delším intervalu, naopak krátkodobé časové řady jsou ty, které jsou sledovány v kratších intervalech, např. měsíc, týden, den apod. Můžeme tedy tvrdit, že záleží na jejich frekvenci výskytu, resp. frekvenci měření. Právě denní časové řady jsou vysokofrekvenčními. Takové řady jsou k vidění na akciových trzích nebo také na kurzových poměrech. [20]

Hlavní a nejpodstatnější informací finančních trhů je cena (cena akcie, měny, dluhopisu). Pokud jsou tyto ceny seřazeny z hlediska času, hovoříme o finančních časových řadách. Finanční časové řady mají své charakteristické vlastnosti, které vychází z podmínek finančních trhů, na kterých jsou generovány. Vysokofrekvenční časové řady mají svou systematickou složku, ale také nesystematickou, díky čemuž se projevuje vysoká a proměnlivá variabilita. Za systematické prvky můžeme považovat trendovou, cyklickou a sezónní složku, ačkoliv právě poslední zmíněná není tak významná u finančních časových řad. [20]

Základní a primární hypotézou o chování finančního trhu je hypotéza efektivního trhu. Její první formulace se objevily v první polovině 20. století. V pozdějších pracích z druhé poloviny 20. století byla tato hypotéza dále upřesňována. Lze ji stručně formulovat takto: Za předpokladu, že ceny plně zahrnují očekávání a informace všech účastníků trhu, jsou jejich změny nepředikovatelné. Pojem efektivnosti je v dalších definicích ještě upřesněn podle specifikace pojmu informace. [20]

Jakmile v životě narazíme na investování, jsou informace o budoucím vývoji nejpodstatnějším kritériem při rozhodování. Jak tedy odhadnout chování křivky na trhu, pokud

jsou změny nepredikovatelné? Model, který jako první alespoň částečně poskytoval tuto informaci, je martingal. Rozvoj nastal až s novější vědou, která nese název teorie pravděpodobnosti. Sám jsem absolvoval předmět Teorie pravděpodobnosti a byl jsem ohromen možnostmi této vědy. Předpokladem martingalu je lineární nezávislost pozorování v čase. Tedy neexistuje korelace mezi jednotlivými pozorováními ve všech časových posunech. Další vlastnost, kterou martingal představuje, je, že z hlediska pravděpodobnosti má největší vliv na zítřejší cenu cena dnešní. Tedy čím dále se do historie díváme, tím menší vliv tyto ceny mají na predikci ceny zítřejší. [20]

Představíme-li si časovou řadu cen aktiva jako realizaci stochastického procesu (P_t), tj. řadou náhodných veličin uspořádaných v čase, potom lze martingal vyjádřit jako

$$E[P_{t+1}|P_t, P_{t-1}, \dots] = P_t \quad (17)$$

nebo jako

$$E[P_{t+1} - P_t|P_t, P_{t-1}, \dots] = 0 \quad (18)$$

kde $E(\cdot)$ je podmíněná střední hodnota. [20]

Pokud se podíváme na časovou řadu jakékoliv akcie, vidíme že změny nejsou konstantní. To také poukazuje na nezávislost pozorování. Nyní používáme sofistikovanější modely pro predikci, neboť se uvažuje analýza rozptylu a také nejpodstatnější část investice a tou je riziko. Nemůžeme tedy tvrdit, že martingal je spolehlivým modelem.

Martingal můžeme interpretovat tak, že následující stav je roven součtu stavu nynějšího a přírůstku martingalu, nebo difference. Je to jakási odchylka od předchozí ceny, kterou nelze předem určit. Tato definice je podobná Brownovu pohybu, kde přírůstek je procesem bílého šumu. Problémem je zde rozdělení náhodného procesu. Předpokladem je stejné rozdělení, nulová střední hodnota a konstantní rozptyl. Často se používá normální rozdělení, avšak problémem je, že relativní výnos, resp. ztráta akcie může být minimálně roven -1. Cena akcie může být v nejhorším případě rovna nule. Stejně tak v pojišťovnictví, kde pojistná plnění nemohou nabývat záporných hodnot. V nejlepším případě (pro pojišťovnu) jsou pojistná plnění rovna nule.

Hledáme tedy rozdělení, které nemůže nabývat záporných hodnot a tím rozdělením je lognormální rozdělení. Tímto rozdělením lze aproximovat normální rozdělení a logaritmus jednotkového přírůstku má tedy normální rozdělení.

3.2 Předpoklad normality a linearity

Jedním ze základních předpokladů, ze kterého se v teoretických a empirických pracích zabývajících se finančními časovými řadami často vychází, je, že logaritmy výnosů mají normální rozdělení s konstantní střední hodnotou μ a konstantním rozptylem σ_r^2 , tj. předpoklad $r_t \sim N(\mu, \sigma_r^2)$. Toto rozdělení je charakteristické tím, že je symetrické, takže jeho šikmost definovaná vztahem

$$SK_r = E \left[\frac{(r_t - \mu)^3}{\sigma_r^3} \right] \quad (19)$$

je rovna nule. Jeho špičatost definovaná vztahem

$$K_r = E \left[\frac{(r_t - \mu)^4}{\sigma_r^4} \right]. \quad (20)$$

Bodovým odhadem šikmosti je výběrová charakteristika

$$\widehat{SK}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})^3}{s_r^3} \quad (21)$$

kde

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t \quad \text{a} \quad s_r = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \quad (22)$$

Špičatost je odhadnuta výběrovou charakteristikou

$$\widehat{K}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})^4}{s_r^4}. \quad [20] \quad (23)$$

Pokud bychom aplikovali tyto odhady na reálná data akciových indexů nebo třeba kurzu Eura ke koruně, mohli bychom vysledovat, že skutečné rozdělení logaritmu např. denních, týdenních a čtrnáctidenních výnosů by bylo špičatější než rozdělení normální, takže nízké kladné a záporné výnosy se objevují častěji, než předpokládá normální rozdělení. [20]

Vlastnosti, které jsou zde uvedené, nejsou v matematice novinkou. Samozřejmě vznikla snaha o nalezení nejvhodnějšího rozdělení, které by dokázalo odrážet vlastnosti dat. Ovšem každé rozdělení má své úskalí. Někde je problémem špičatost, jako např. u normálního rozdělení, které špatně zachycuje tuto vlastnost. Jiná rozdělení tuto charakteristiku modelují lépe. Problémem je také „tloušťka“ konců rozdělení četnosti u finančních časových řad. Další obtížná skutečnost normálního rozdělení je konvergence rozptylu s rostoucím časem. Někteří analytici jsou odpůrci myšlenky stabilního rozdělení a snaží se prokázat, že tato rozdělení v reálné situaci na finančních trzích mají konvergující rozptyl a logaritmy výnosů se přibližují k normálnímu rozdělení. [20]

Nyní známe spoustu dalších rozdělení. Populární je například studentovo rozdělení t nebo tzv. smíšené rozdělení. Na testování normality nebo linearity existují dnes spolehlivé testovací metody. Avšak nalézt data, která tyto podmínky splňují, není vůbec jednoduché. Další vlastností, která se často zkoumá, je tzv. autokorelace. Ve skutečnosti se objevují data, která mají logaritmické míry výnosu korelované. [20]

V této práci nejsou dále popsány statistické metody, ačkoliv v praktické části budou data popsána. Zde je uveden pouze krátký výčet problémů, na které finanční analytici naráží. Smyslem této práce je pokusit se přidat další charakteristiku na jednu z nejpodstatnějších částí ekonomiky a tou je pojišťovnictví.

3.3 Časové řady v pojišťovnictví

Pojišťovnictví je jednou z nejdůležitějších oblastí hospodaření státu. Zajišťuje bezporuchový chod ekonomiky a také chrání fyzické či právnické osoby. Jeho princip je založený na solidaritě, tedy pojištění platí pojistné, aby těm pojištěným, u kterých nastane pojistná událost, bylo vyplaceno pojistné plnění. Dále jsou pojišťovny dobrým zdrojem zisku.

Při studiu pojišťovnictví nalezneme spoustu časových řad, které mají nahodilý charakter a jejich předpověď je s jistou mírou pravděpodobnosti obtížný úkol. Pokud nahlížíme pohledem pojišťovny, je pro nás podstatné znát rizika, za která ručíme a při jejichž naplnění jsme nuceni vyplatit pojistné plnění. Odhad těchto plnění je předmětem pojistné matematiky.

Každé pojištění je založené na principu pravděpodobnosti, že dané riziko nastane. Základní klasifikace pojištění je rozdělení na životní a neživotní pojištění. Životní pojištění zahrnuje pojištění pro případ smrti, dožití nebo jejich kombinaci, tedy smíšené pojištění. Neživotní pojištění obsahuje větší množství druhů, zde uvedeme např. pojištění odpovědnosti, majetkové pojištění nebo úrazové pojištění. U všech typů pojištění lze odhadnout pravděpodobnost nastání takové situace. Na základě těchto výpočtů je stanoveno pojistné (částka, kterou pojistník platí za pojištění pojišťovně).

V životním pojištění se využívá tzv. úmrtnostních tabulek. V těchto tabulkách nalezneme sloupec s věkem jedince x a pravděpodobnost úmrtí ve věku x značená $q(x)$. Další sloupce lze jednoduše vypočítat. Dalším sloupcem je tzv. dekrementní řád, ve kterém je stanovený počet obyvatel na 100 000, na kterých se modeluje úmrtnost a značí se $l(x)$. Na to navazuje počet zemřelých $d(x)$, který lze vypočítat vztahem $d(x) = q(x) * l(x)$. Pak už je jednoduché dopočítat sloupec $l(x)$, kde $l(x+1) = l(x) - d(x)$. Pravděpodobnost $p(x)$ dožití věku $x+1$ se vypočítá vztahem $p(x) = 1 - q(x)$. Následují komutační čísla nultého řádu Dx a Cx . Zde je nutné znát technickou úrokovou míru, která představuje zhodnocení rezervy nárokované klientem. Jedná se o tzv.

garantovanou technickou úrokovou mírou. Z toho lze odvodit diskontní faktor $v = 1 / (1+TUM)$. Nyní máme vše potřebné k výpočtu komutačních čísel $Dx = l(x) * v^x$ a $Cx = d(x)*v^{(x+1)}$. Další komutační čísla prvního a druhého řádu je možné odvodit pomocí předchozích dvou výpočtů. Takto sestrojené tabulky se využívají pro odhad rezerv v životním pojištění. Zároveň z nich lze vypočítat pravděpodobnosti mortality různých druhů (např. jaká je pravděpodobnost, že jedinec ve věku 30 let se dožije 35 let apod.)

V neživotním pojištění se úmrtnostních tabulek logicky nemůže využít, a tak se zde využívá škodních tabulek jako ukazuje tabulka č. 3.

z (HH)	T_z	t_z	Y_z	b_z	G_z
0,1	T _{0,1}	t _{0,1}	Y _{0,1}	b _{0,1}	G _{0,1}
0,2	T _{0,2}	t _{0,2}	Y _{0,2}	b _{0,2}	G _{0,2}
0,3	T _{0,3}	t _{0,3}	Y _{0,3}	b _{0,3}	G _{0,3}
0,4	T _{0,4}	t _{0,4}	Y _{0,4}	b _{0,4}	G _{0,4}
0,5	T _{0,5}	t _{0,5}	Y _{0,5}	b _{0,5}	G _{0,5}
0,6	T _{0,6}	t _{0,6}	Y _{0,6}	b _{0,6}	G _{0,6}
0,7	T _{0,7}	t _{0,7}	Y _{0,7}	b _{0,7}	G _{0,7}
0,8	T _{0,8}	t _{0,8}	Y _{0,8}	b _{0,8}	G _{0,8}
0,9	T _{0,9}	t _{0,9}	Y _{0,9}	b _{0,9}	G _{0,9}
1	T ₁	t ₁	Y ₁	b₁ = 1	G₁=q₂
Součet	T	1	G₁	---	---

Tabulka č. 3: Škodní tabulka

Zdroj: vlastní zpracování

V této tabulce z představuje intervalový škodní stupeň ($z=HH$). Dále:

- T_z je počet pojistných událostí v intervalovém škodním stupni z.
- t_z je relativní četnost škod ($t_z = T_z/T$).
- Y_z je průměrný škodní stupeň v daném intervalu ($Y_z = t_z (z - 0,05)$).
- b_z je kumulativní relativní četnost ve škodních intervalech, nejvýše však z ($b_z = t_{0,1} + t_{0,2} + \dots + t_z$).
- G_z je průměrný škodní stupeň v intervalu (0, z] ($G_z = Y_{0,1} + Y_{0,2} + \dots + Y_z$)

- G_I je vážený průměrný škodní stupeň všech škod, což je zpřesněný odhad škodního stupně.

Tato tabulka platí pro homogenní portfolia pojištění. Stanovuje se netto pojistné, což by mělo pokrývat průměrná pojistná plnění. Dále se stanovuje rizikové pojistné, kde figuruje riziková přírážka. Důležitou součástí je modelování rizik pojišťovny.

Těmito způsoby jsou odhadovány např. výše nettopojistného a různé pravděpodobnosti pojistné události. Pojistná událost není jediným rizikem u pojistné smlouvy. Existuje mnoho rizik, které úzce souvisí s pojistným trhem. Jedním z takových rizik je i storno pojistné smlouvy ze strany klienta. Vývoj stornovosti pojistných smluv je sledován odborem pojistné matematiky, kde je třeba předvídat budoucí vývoj tak, aby pojišťovna byla schopna aktivní, např. marketingové obrany. Takové časové řady budou předmětem analýzy ve čtvrté kapitole.

4 ANALÝZA STOREN POJISTNÝCH SMLUV

V září roku 2019 jsem nastoupil na pozici trainee projektového manažera v pojišťovně a získal jsem příležitost spolupracovat s odborem pojistné matematiky. Této spolupráce jsem chtěl využít při psaní této diplomové práce, a tak jsem se zaměřil na využití fraktální analýzy v oblasti pojištění, neboť i zde jsou časové řady nahodilého charakteru. Jedním z rizik je stornovost pojistných smluv ze strany klienta. Tato skutečnost nastává poměrně často, neboť v dnešní době je na trhu mnoho konkurenčních pojišťoven, takže kvůli získání co největšího počtu klientů dochází k zvýhodňování konkurenčních produktů a tím „přelévání“ klientů mezi pojišťovnami. Vzhledem k povaze dat a jejich využitelnosti např. konkurencí, je nutné nespécifikovat o jaké pojistné smlouvy se jedná, či počet pojistek sledovaného pojistného kmene. V první části si přiblížíme problematiku storen pojistných smluv. V další části provedeme popisnou statistiku dat a ověření některých základních statistických hypotéz. V poslední části je odhadnuta fraktální dimenze pomocí R/S analýzy.

4.1 Storno pojistných smluv

Pojistné smlouvy mohou zaniknout několika způsoby. Pojistná smlouva může skončit uplynutím doby, která je přesně stanovena v pojistné smlouvě. Je možné nastavit v podmínkách pojistné smlouvy, že v případě, kdy klient/pojistník neprojeví zájem o pokračování pojistné smlouvy do několika týdnů před jejím vypršením, pojistná smlouva zanikne (popř. naopak smlouva je automaticky prodloužena). Další častý jev zániku pojistné smlouvy je nezaplacení pojistného. Pojišťovna zasílá v takovém případě upomínku klientovi, který od obdržení této upomínky má možnost do jednoho měsíce doplatit pojistné. Pokud se tak nestane, pojistná smlouva zaniká. Pojistnou smlouvu lze ukončit také dohodou, kde musí být jasně stanoven čas zániku a také způsob vyrovnání závazků. V případě, že pojistník nebo pojistitel uvede ve smlouvě, resp. při sjednávání pojištění nesprávné nebo nepravdivé údaje, je možné od smlouvy odstoupit. Pokud takovou skutečnost pojistník nebo pojistitel zjistí, musí odstoupit od smlouvy do dvou měsíců (pokud tak neučiní, právo zaniká). Pojištění může zaniknout i změnou vlastníka movité či nemovité věci. Ve smlouvě, resp. v podmínkách může být uvedeno i pokračování pojištění. Důvody k zániku pojistné smlouvy mohou být i zánik pojištěného rizika nebo pojištěné věci, smrt pojištěné fyzické osoby nebo zánik právnické osoby bez určeného právního nástupce. [21]

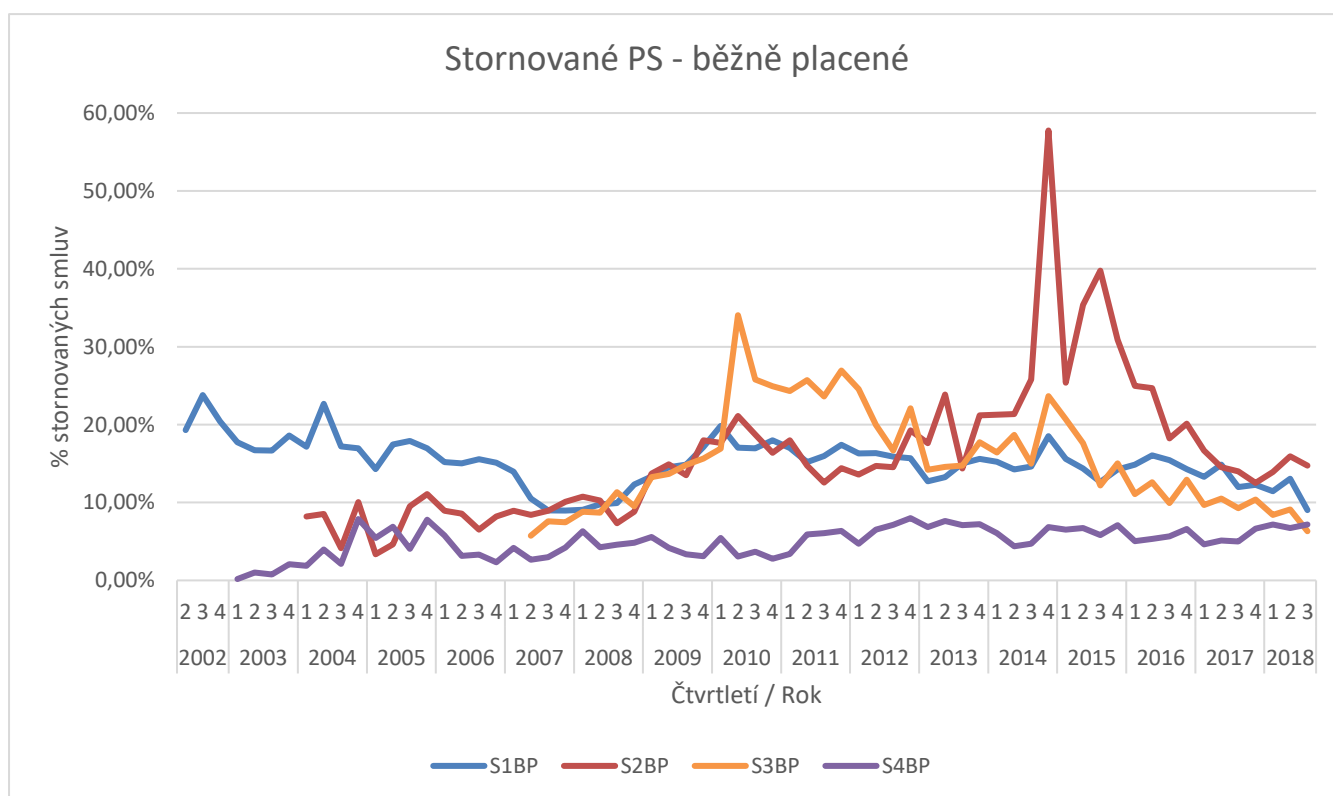
Nejčastějším způsobem je výpověď pojistné smlouvy. Tuto výpověď musí klient doručit nejméně šest týdnů před uplynutím pojistného období. To platí právě pro běžně placené pojistné. Pojistné období bývá roční lhůta od data počátku pojistné smlouvy. Právě takové

výpovědi pojistných smluv pojišťovna sleduje, neboť zvýšený počet stornovaných pojistných smluv vede k snížení podílu na trhu a také k horší stabilitě pojišťovny.

4.2 Popisná statistika dat

Data, která byla poskytnuta pojišťovnou nejsou blíže specifikovaná tak, aby byla zachována určitá míra utajení. Jedná se o čtvrtletní sledování stornovosti pojistných smluv v životním pojištění, které jsou běžně placené a samostatně pak jednorázově placené. Prvním krokem při analýze dat by měl být jejich popis. K tomu slouží popisná statistika. Je třeba si uvědomit, jaká data vlastně analyzujeme. V této podkapitole jsou ukázány grafy stornovosti pojistných smluv a také základní statistické ukazatele. Dále jsou zde provedeny některé analýzy a ověření několika hypotéz.

Nejprve se budeme zabývat běžně placeným životním pojištěním. Na grafu č. 1 jsou zobrazeny míry stornovosti čtyř druhů homogenních pojistek.



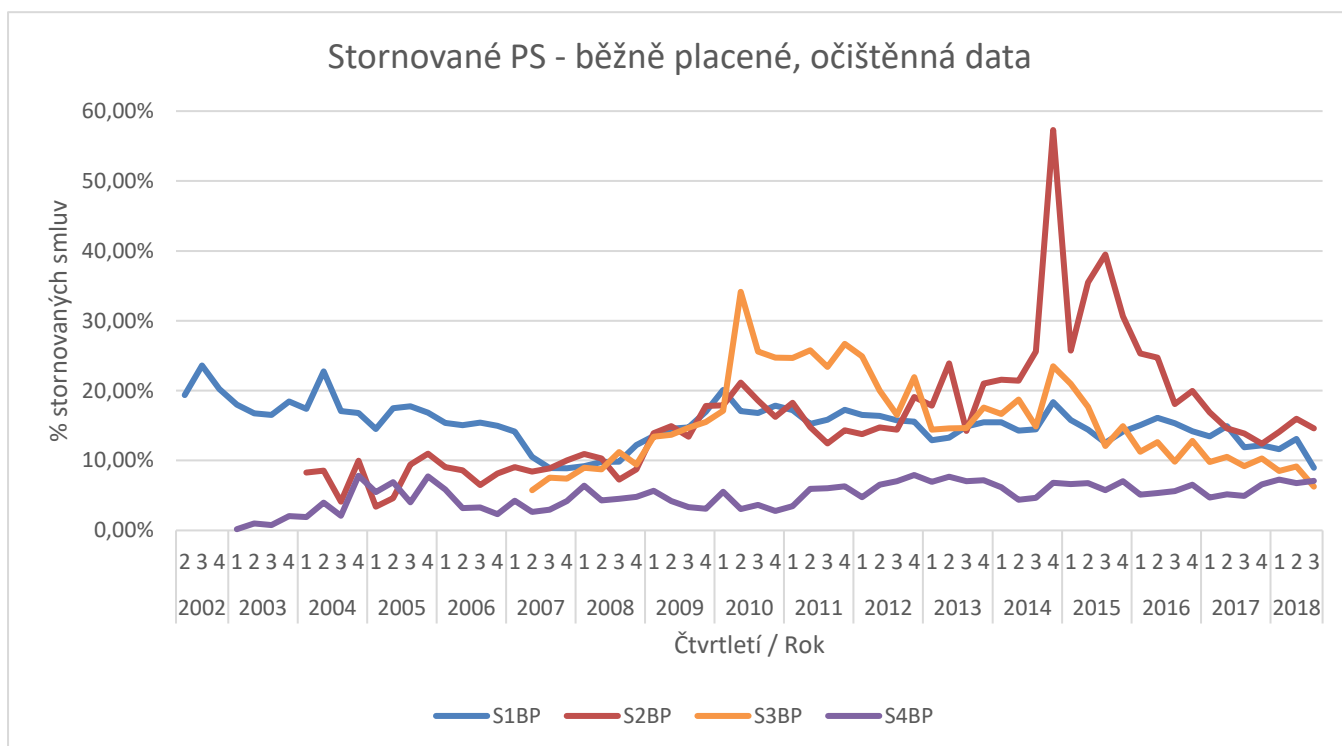
Graf č. 2: Stornované PS – běžně placené

Zdroj [vlastní zpracování]

Z grafu je patrné, že stornovost pojistných smluv označených jako S1BP se během přibližně 16ti let pohybuje v určitém hraničním pásmu. Lépe to poznáme na statistických hodnotách maxima a minima. Naopak stornovost pojistných smluv S2BP byla v posledním kvartálu roku 2014 větší než 50 %. Právě takovým výkyvům se musí odbor pojistné matematiky věnovat.

Jistě existují i vnější ekonomické vlivy, které nelze ovlivnit, a tak stornovost narůstá. Nicméně taková vychýlená hodnota může být způsobena např. poškozením reputace pojišťovny nebo „zaspáním“ v konkurenčním boji. Pokud nastane klientům příležitost výhodnější spolupráce s jinou pojišťovnou (např. nižší cena produktu nebo širší spektrum „pojistné ochrany“), neváhají ukončit pojistnou smlouvu. Takovému chování klienta se snaží pojišťovna předejít. Na třetí časové řadě je od počátku sledování v roce 2007 zaznamenán nárůst stornování pojistných smluv až do roku 2010. Od té doby začíná stornovost postupně klesat. Takové chování může být způsobeno tím, že klienti zjistí nevýhodné podmínky nebo naleznou lepší konkurenční produkt. Doba, od které začíná stornovost klesat, může být počátkem protiopatření pojišťovny (např. zvýšení krytí rizika nebo snížení pojistného). Poslední časová řada S4BP má oproti ostatním produktům velmi nízkou míru stornovosti. To je možná způsobeno vhodným nastavením pojistných podmínek nebo také výhodnými garancemi ze strany pojišťovny, které již nenabízí a klienti tyto pojistky nechtějí ukončit.

Prvním úkolem bude očištění dat. Jelikož sledujeme čtvrtletní frekvenci a každý měsíc je různě dlouhý, je třeba časové řady očistit. Na grafu č. 2 jsou očištěná data. Vizualní změna je minimální, ale pro další práci s daty je tento krok důležitý.



Graf č. 3: Stornované PS – běžně placené, očištěná data

Zdroj [vlastní zpracování]

Další krok při analýze dat je zjištění základních statistických ukazatelů. V tabulce č. 4 jsou zaznamenány vybrané statistické ukazatele, které v jistém smyslu odrážejí chování storen pojistných smluv při běžně placeném pojistném.

Statistika:	S1BP	S2BP	S3BP	S4BP
Počet pozorování	66	59	46	63
Aritmetický průměr	0,1519	0,1603	0,1549	0,0498
Rozptyl	0,0009	0,0082	0,0043	0,0004
Směrodatná odchylka	0,0301	0,0907	0,0656	0,0191
Variační koeficient (%)	19,85	56,60	42,34	38,33
Maximum	0,2360	0,5729	0,3414	0,0793
Minimum	0,0889	0,0340	0,0575	0,0018
Variační rozpětí	0,1471	0,5389	0,2839	0,0775
Průměrná odchylka	0,0223	0,0628	0,0529	0,0159
Šikmost	-0,0012	2,0614	0,7168	-0,5113
Špičatost	0,7250	6,8143	-0,0360	-0,4873
Medián	0,1535	0,1443	0,1461	0,0515

Tabulka č. 4: Základní statistické ukazatele pro storno běžně placených smluv

Zdroj: [vlastní zpracování]

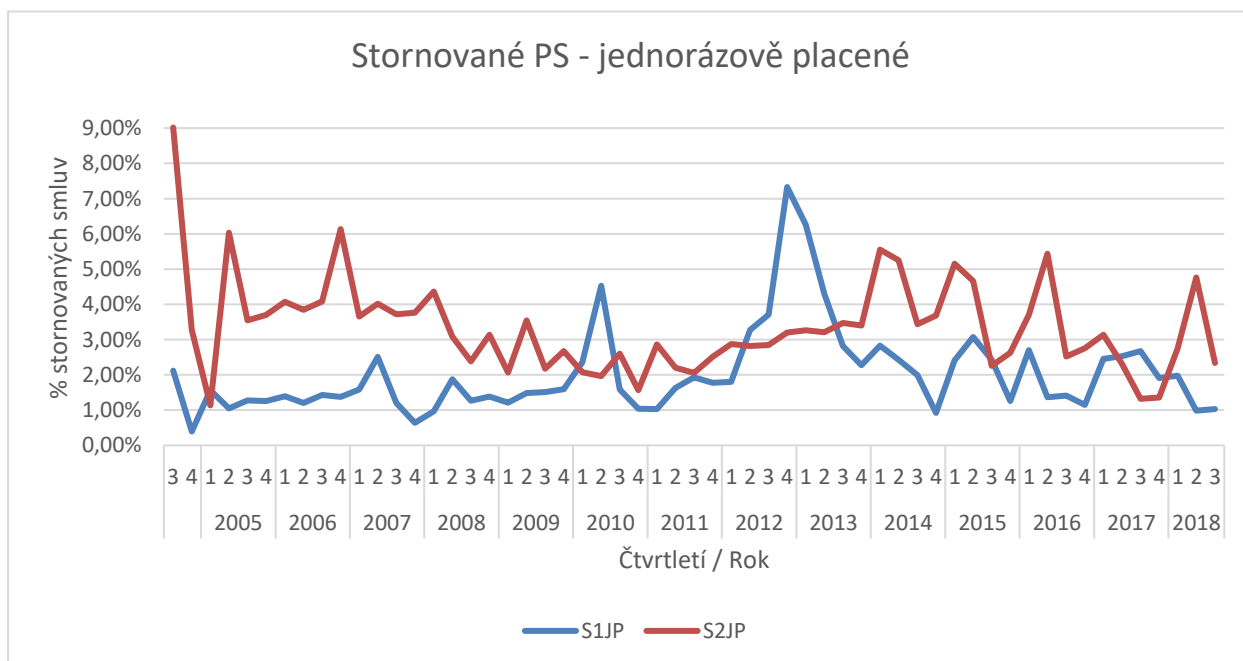
Prvním ukazatelem je počet pozorování, z něhož je patrné, že časové řady nejsou stejně dlouhé. Důvodem je různorodost produktů, které byly spuštěny v různých obdobích. V další analýze by tato skutečnost neměla činit problém, ale při porovnání je třeba takovou skutečnost zohlednit. Druhým ukazatelem je aritmetický průměr, který byl zvolen vzhledem k povaze dat. Aritmetický průměr se používá pro časové řady intervalové, což naše data jsou, neboť jsou měřena za jednotlivá čtvrtletí a počet stornovaných smluv lze sčítat. Průměr je velmi podobný u všech dat kromě čtvrté časové řady. Můžeme tedy říct, že průměrně je za čtvrtletí stornováno 15 – 16 % pojistných smluv. Na první pohled vysoké číslo, ale nemusí znamenat katastrofu, neboť nemáme informace o nově příchozích pojištěncích. Čtvrtá časová řada má průměrně 5 % stornovaných smluv. Můžeme tedy hovořit o vhodně nastavených podmínkách produktu.

Dalším statistickým ukazatelem je rozptyl, který značí „kolísání“ okolo střední hodnoty. V řadě S1BP a S4BP je rozptyl nízký vzhledem k relativně hladkému průběhu. Zbylé dvě řady mají vyšší rozptyl, což je způsobeno vysokými odchylkami v průběhu. Podobnou informaci nese i směrodatná odchylka. Variační koeficient značí, kolik % z průměru je vysvětleno směrodatnou odchylkou. Zde je opět vidět, jak velký vliv mají vychýlené hodnoty druhé a třetí řady na naši statistiku. Ve druhé časové řadě dokonce přes 53 %, což je dáno obrovským nárůstem storen v posledním čtvrtletí roku 2014.

Jednoduchými, ale přesto velmi vypovídajícími ukazateli, jsou maxima a minima. Je důležité zjistit proč došlo k extrémnímu nárůstu stornovosti a zda je možné takové náhlé nárůsty eliminovat. Pokud jsou to ekonomicko-hospodářské vlivy, které není v silách pojišťovny změnit, je třeba co nejvíce redukovat jejich dopad. Pokud se jedná o nedostatky v nastavení produktu, nebo dojde k poškození reputace pojišťovny, je nutné sjednat patřičná opatření. Největší stornovost v průběhu sledovaných let zaznamenáváme u časové řady S2BP, kde došlo k extrémnímu vychýlení, jak bylo zmíněno dříve. Logicky i variační rozpětí je ovlivněno odlehlými hodnotami v řadách S2BP a S3BP, proto zde není moc vypovídající, neboť tyto extrémní hodnoty byly naměřeny pouze několikrát. Vhodnější by zde možná bylo využití variačního rozpětí určitých kvartilů.

Ukazatele šikmosti a špičatosti jsou nejlépe pozorovatelné na histogramu. Z hodnot těchto ukazatelů je zřejmé, že se setkáváme s časovými řadami s různými typy rozdělení, z čehož vyplývá jistá náročnost analytické části. I proto je vhodné pomocí fraktální analýzy přidat další ukazatel, který nám prozradí více vlastností časové řady. Nyní provedeme stejnou analýzu dat u storen jednorázově placených smluv.

Opět prvním krokem je zobrazení hodnot na grafu. Už při prvním pohledu lze totiž zpozorovat některé vlastnosti časové řady. Na grafu č. 4 jsou zobrazeny časové řady stornovosti pojistných smluv při jednorázovém placení pojistného.

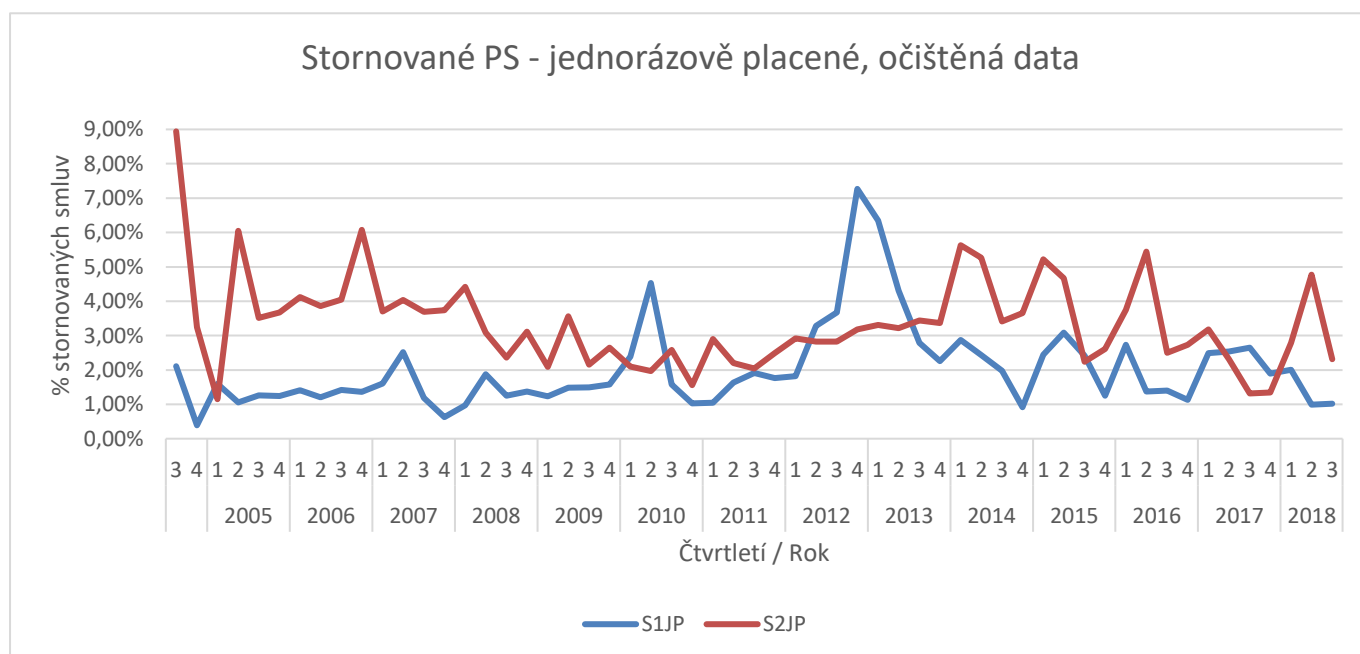


Graf č. 4: Stornované PS – jednorázově placené

Zdroj: [vlastní zpracování]

Už z grafu lze pozorovat, že při jednorázovém placení je stornovost smluv nižší. To vyplývá především z podmínek pojistných smluv, neboť při stornování jednorázově placené pojistné smlouvy dojde ke vrácení pojistného, ovšem nikoliv v plném rozsahu (v zákoně je stanovena lhůta po které má pojistník nárok na vrácení pojistného v plné výši, nicméně v pojistných podmínkách bývá stanovena různě). U časové řady S1JP lze pozorovat jednu vyšší odchylku v roce 2012, nicméně vývoj časové řady není tak dramatický. Časová řada S2JP má relativně často opakující se odchylky. Možná by bylo vhodné pokusit se odstranit sezónní složku časové řady, resp. provést celkovou dekompozici.

Vzhledem k čtvrtletnímu měření je nutné opět očistit data, neboť každé čtvrtletí není stejně dlouhé. Očištěná data jsou na grafu č. 5. Ani zde není vidět výrazná změna, ale pro další statistiky je tato část nutná.



Graf č. 5: Stornované PS – jednorázově placené, očištěná data

Zdroj: [vlastní zpracování]

V tabulce č. 5 jsou základní statistiky stornování pojistných smluv jednorázově placených. Jak jsem popisoval výše, už z grafu, resp. průběhu časových řad lze vypočítat rozdíly mezi stornem běžně placených smluv.

Statistika:	S1JP	S2JP
Počet pozorování	57	57
Aritmetický průměr	0,0203	0,0336
Rozptyl	0,0002	0,0002
Směrodatná odchylka	0,0125	0,0137
Variační koeficient (%)	61,84	40,85
Maximum	0,0727	0,0894
Minimum	0,0039	0,0115
Variační rozpětí	0,0688	0,0779
Průměrná odchylka	0,0086	0,0099
Šikmost	2,2686	1,4508
Špičatost	6,5617	3,8642
Medián	0,0160	0,0318

Tabulka č. 5: Základní statistické ukazatele pro storno jednorázově placených smluv

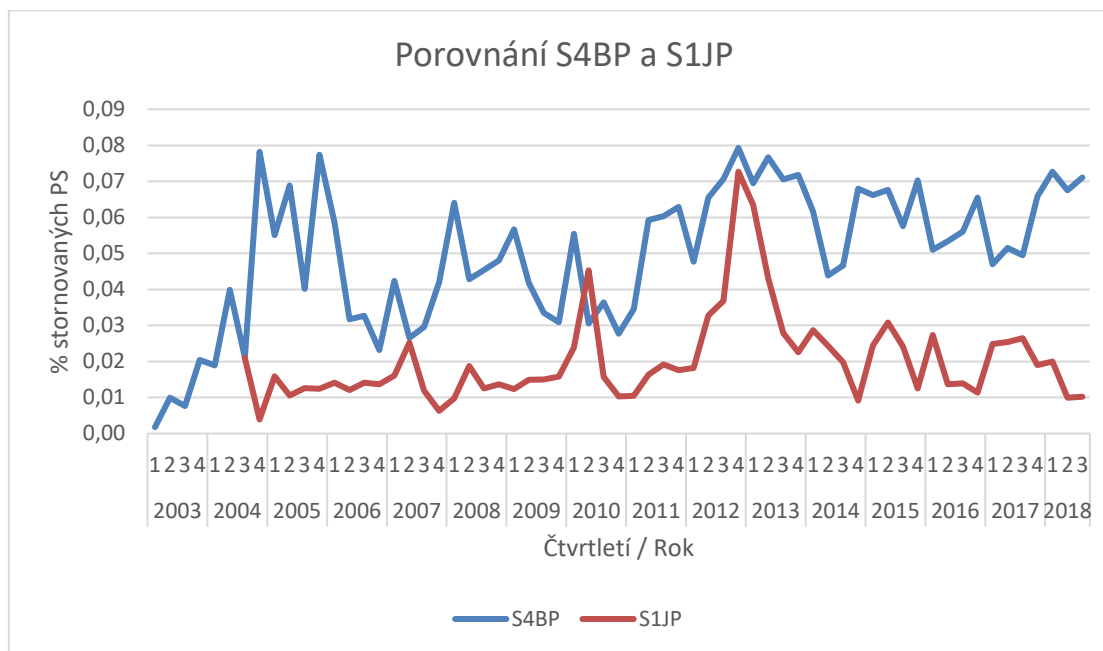
Zdroj: [vlastní zpracování]

Časové řady mají 57 pozorování a jsou tedy stejně dlouhé. K popisné statistice počet pozorování postačí, nicméně u odhadu fraktální dimenze by mohl být nedostatečný, neboť pro přesnější odhad je třeba co nejvíce pozorování. Při analýze finančních časových řad bývá obvykle větší počet pozorování dostupný. Průměrné procento stornovosti je u první časové řady 2,03 % a u druhé 3,36 %. V porovnání se stornovostí běžně placených pojistných smluv je stornovost u jednorázově placených smluv výrazně nižší. Nedochází zde k výraznějším kolísání a k výraznějším odchylkám. Tuto skutečnost nejlépe vyzorujeme na rozptylu, který u obou časových řad nabývá velmi nízkých hodnot, konkrétně dvou setin procenta. S tím souvisí i nízká směrodatná odchylka. Na variačním koeficientu můžeme poznat, že první časová řada má „hladší“ průběh a pohybuje se často kolem průměru.

Další ukazatele maxima a minima ukazují nejvyšší a zároveň nejnižší naměřené hodnoty. U časové řady S1JP byla nejvyšší naměřená stornovost 7,27 % a to ve čtvrtém kvartálu roku 2012. Možná se to zdá jako nízké procento stornovosti v poměru s běžně placenými smlouvami, ale nesmíme zapomenout, že při jednorázově placeném pojistném je pak vrácení prostředků mnohem vyšší, a tak je pro pojišťovnu větším rizikem. Maximum druhé řady nalezneme hned na počátku sledování, kde došlo k vysoké stornovosti téměř 9 %. Naopak minimální procento stornovosti během sledovaného období nám ukazuje, že v prvním portfoliu smluv nalezneme nejnižší hodnotu 0,39 %, což je za 4. čtvrtletí roku 2004. Toto je v porovnání se zbytkem průběhu skvělý výsledek. Variační rozpětí je jen dalším ukazatelem, který nám vypovídá o tom, že stornovost u jednorázově placených pojistek není tak vysoká. Koeficienty šikmosti a špičatosti nám prozrazují, že jsou levostranně zešikmené a S1JP je špičatější než S2JP. Tyto

skutečnosti nám pomohou odhadnout typ rozdělení, které vystihuje lépe časové řady stornovosti.

V porovnání se stornem běžně placených smluv jsou časové řady stornů jednorázově placených smluv stabilnější. Pouze S4BP se podobá průběhem stornů jednorázově placeným smlouvám a na grafu č. 6 můžeme vidět jejich průběh.



Graf č. 6: Porovnání S4BP a S1JP

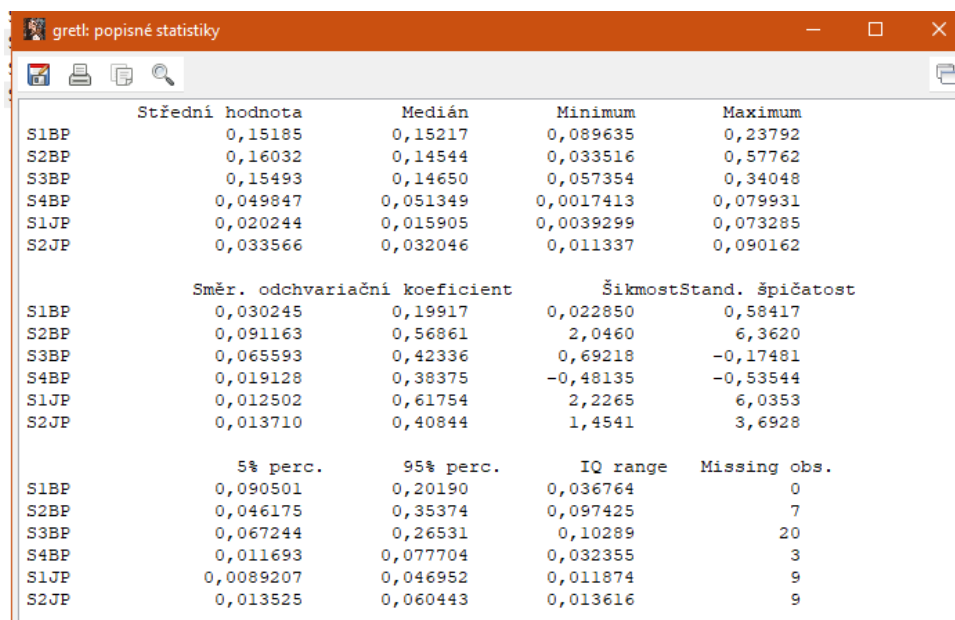
Zdroj: [vlastní zpracování]

Na první pohled je opět zřejmé, že storna jednorázově placených smluv jsou nižší než běžně placených smluv. Pouze v roce 2010 ve druhém čtvrtletí je stornovost vyšší u jednorázově placených smluv. U celkově komplikovanějšího průběhu S4BP, byť s nízkým rozptylem, bude obtížnější odhadovat další vývoj. Celkově by bylo vhodné provést dekompozici těchto časových řad a následně pomocí moderních metod analýzy časových řad odhadnout s určitým intervalem spolehlivosti další průběh. Na takové analytické prognózování by byla vhodná např. Box-Jenkinsonova metodologie a využití jeho základních modelů AR, MA nebo ARMA. Pomocí odhadnutí fraktální dimenze bychom mohli zjistit, zda by bylo výhodnější použít procesy s dlouhou pamětí jako je např. ARFIMA.

4.3 Stanovení modelu a jeho diagnostika

Tato podkapitola je součástí analýzy dat. Pokusíme se odhadnout model jedné časové řady a rozhodnout o jeho využitelnosti. V předchozí podkapitole je naznačen způsob modelování časových řad. Nyní se pokusíme pomocí softwaru Gretl odhadnout model, který by nejlépe

vystihoval průběh časové řady. Prvním krokem je zobrazení grafu, který může napovědět, jaký model bychom měli zvolit. Tento krok jsme již učinili a z průběhu grafu nelze poznat o jaký model se jedná. Po očištění dat jsou nahrána do softwaru, který dokáže spolehlivě provést analýzu. Nejprve si zobrazíme popisnou statistiku dat. Ačkoliv byla vypočtena v předchozím kroku, můžeme si ji opět ověřit. Na obrázku č. 10 můžeme vidět, že se statistika shoduje s předchozími odhady.

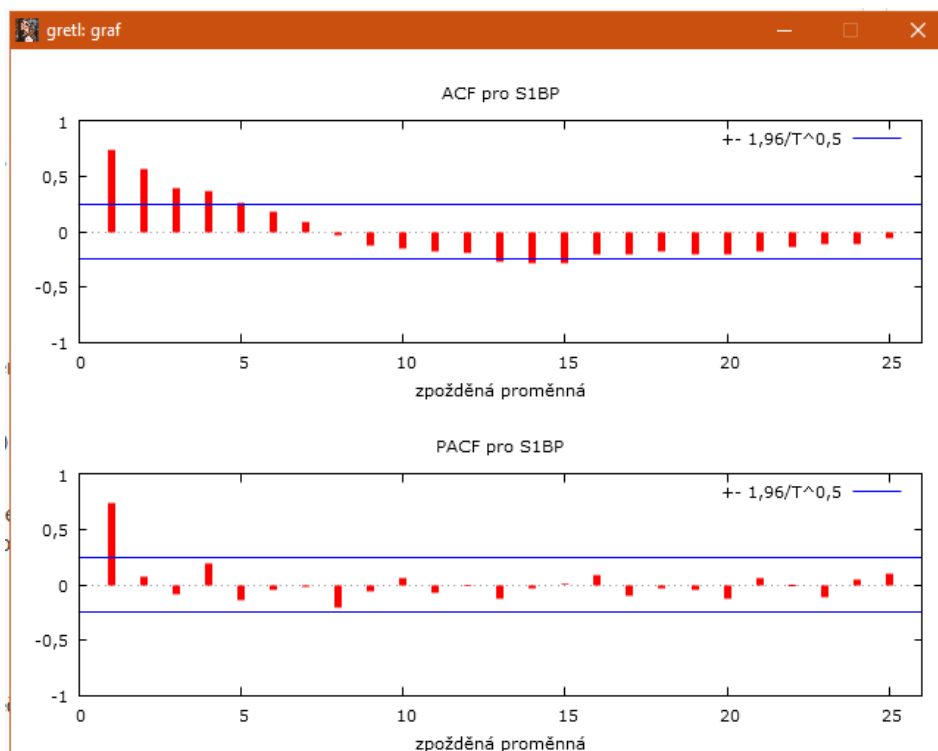


	Střední hodnota	Medián	Minimum	Maximum
S1BP	0,15185	0,15217	0,089635	0,23792
S2BP	0,16032	0,14544	0,033516	0,57762
S3BP	0,15493	0,14650	0,057354	0,34048
S4BP	0,049847	0,051349	0,0017413	0,079931
S1JP	0,020244	0,015905	0,0039299	0,073285
S2JP	0,033566	0,032046	0,011337	0,090162
	Směr. odchv. variací	Směr. odchv. variací	Šikmost	Stand. špičatost
S1BP	0,030245	0,19917	0,022850	0,58417
S2BP	0,091163	0,56861	2,0460	6,3620
S3BP	0,065593	0,42336	0,69218	-0,17481
S4BP	0,019128	0,38375	-0,48135	-0,53544
S1JP	0,012502	0,61754	2,2265	6,0353
S2JP	0,013710	0,40844	1,4541	3,6928
	5% perc.	95% perc.	IQ range	Missing obs.
S1BP	0,090501	0,20190	0,036764	0
S2BP	0,046175	0,35374	0,097425	7
S3BP	0,067244	0,26531	0,10289	20
S4BP	0,011693	0,077704	0,032355	3
S1JP	0,0089207	0,046952	0,011874	9
S2JP	0,013525	0,060443	0,013616	9

Obrázek č. 10: Popisné statistiky Gretl

Zdorj: [vlastní zpracování]

Dalším krokem je zobrazení korelogramu, který nám napoví, jaký model by nejlépe vystihoval časovou řadu. Na obrázku č. 11 můžeme vidět průběh korelogramu.



Obrázek č. 11: Korelogram časové řady S1BP

Zdroj: [vlastní zpracování]

Z korelogramu je patrné, že autokorelační funkce je sinusoidně lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami. Parciální autokorelační funkce má bod useknutí roven jedné. Z toho lze odvodit, že model AR (autoregression) by byl vhodným prostředkem. Vzhledem k bodu useknutí hovoříme konkrétně o AR (1).

```

gret: model 3
Soubor  Upravit  Testy  Uložit  Grafy  Analýza  LaTeX
Vyhodnocování funkce: 33
Vyhodnocování gradientu: 7

Model 3: ARMA, za použití pozorování 2002:2-2018:3 (T = 66)
Odhad proveden pomocí Kalmanova filtru (přesné ML)
Závisle proměnná: S1BP
Směrodatné chyby založené na Hessiánu

      koeficient   směr. chyba   z   p-hodnota
-----
const      0,150791   0,0108212  13,93  3,89e-044 ***
phi_1      0,793657   0,0793059  10,01  1,41e-023 ***

Střední hodnota závisle proměnné   0,151853
Sm. odchylka závisle proměnné      0,030245
Střední hodnota inovací             -0,000507
Sm. odchylka inovací                 0,019151
Logaritmus věrohodnosti              166,9111
Akaikovo kritérium                   -327,8223
Schwarzovo kritérium                  -321,2533
Hannan-Quinnovo kritérium             -325,2266
zde je poznámka o zkratkách statistik modelu

      Reálná   Imaginární   Abs. hodnota   Frekvence
-----
AR
Kořen 1      1,2600    0,0000    1,2600    0,0000
-----

Test normality reziduí -
Nulová hypotéza: chyby jsou normálně rozdělené
Testovací statistika: Chi-kvadrát(2) = 5,7263
s p-hodnotou = 0,0570887

Test pro ARCH řádu 4 -
Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH
Testovací statistika: LM = 2,40186
s p-hodnotou = P(Chi-kvadrát(4) > 2,40186) = 0,66229

```

Obrázek č. 12: Model AR(1)

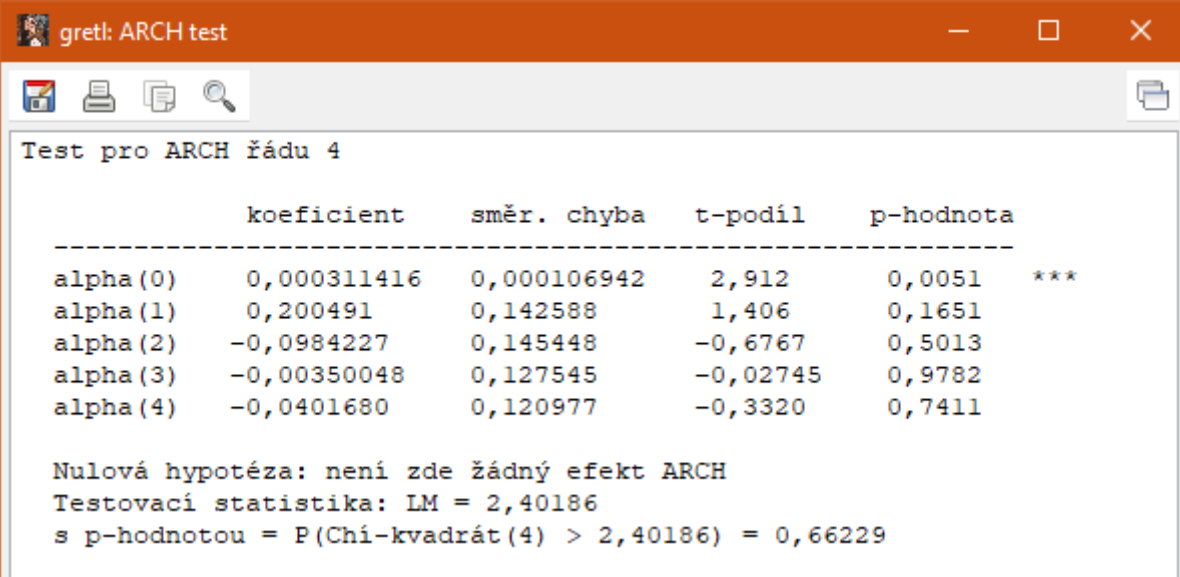
Zdroj: [vlastní zpracování]

Z obrázku vidíme, že kořen AR(1) je vně jednotkového kruhu, což je nutnou podmínkou. Pokud provádíme takovou analýzu, je často nutné časovou řadu stacionarizovat. Zde není žádný důvod k takovému kroku. Pro odhad modelu je použita metoda OLS (ordinary least squares / metoda nejmenších čtverců).

Nutnou součástí je diagnostika modelu. U každého modelu je nutné ověřit tyto kroky:

- ARCH test (heteroskedasticita)
- Autokorelace reziduí
- Statistická významnost koeficientů
- Normalita reziduí

Začneme tedy s otestováním heteroskedasticity. Nulová hypotéza v tomto případě zní $H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$. Jsou zvoleny čtyři parametry, neboť se jedná o čtvrtletní data. Následující obrázek č. 13 ukazuje takový test v softwaru Gretl.



Test pro ARCH řádu 4

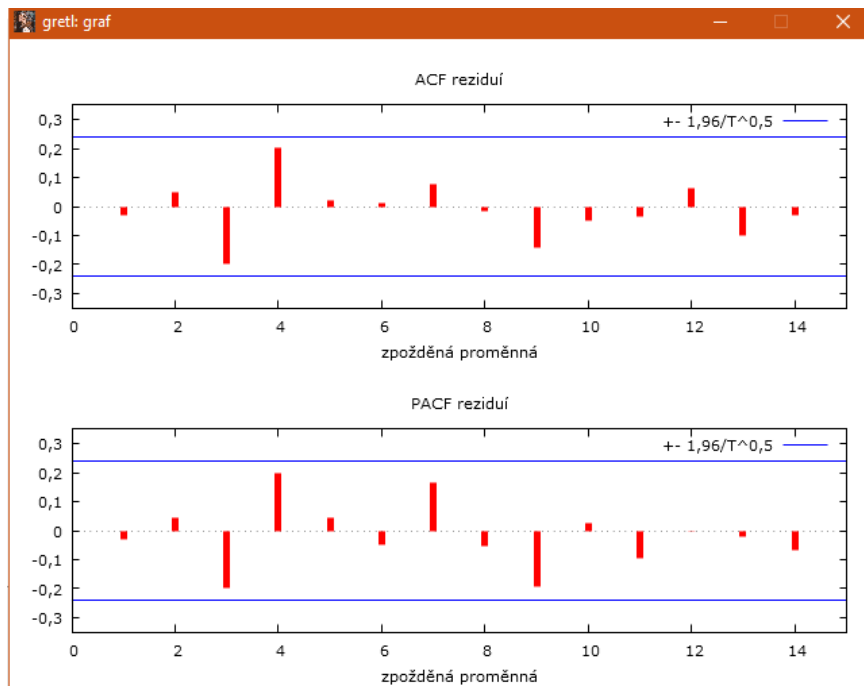
	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha (0)	0,000311416	0,000106942	2,912	0,0051	***
alpha (1)	0,200491	0,142588	1,406	0,1651	
alpha (2)	-0,0984227	0,145448	-0,6767	0,5013	
alpha (3)	-0,00350048	0,127545	-0,02745	0,9782	
alpha (4)	-0,0401680	0,120977	-0,3320	0,7411	

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH
Testovací statistika: LM = 2,40186
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(4) > 2,40186) = 0,66229

Obrázek č. 13: ARCH test

Zdroj: [vlastní zpracování]

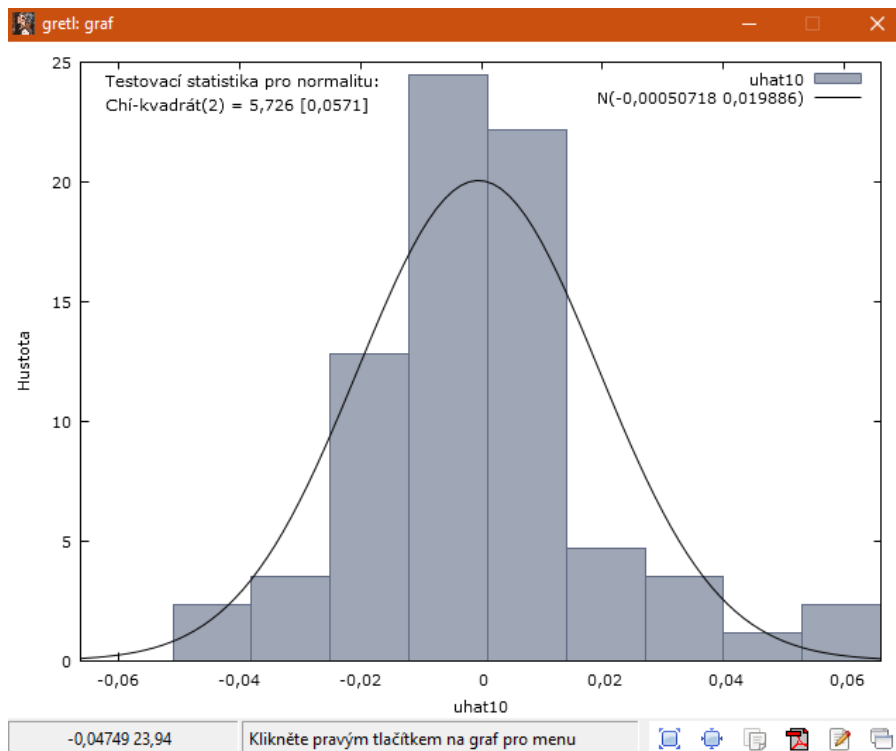
Z obrázku, resp. testu je patrné, že zamítáme nulovou hypotézu, neboť alespoň jeden kořen není roven nule. Dalším krokem je zjištění, zda jsou rezidua závislá na svých zpožděních.



Obrázek č. 14: Korelogram reziduí modelu

Zdroj: [vlastní zpracování]

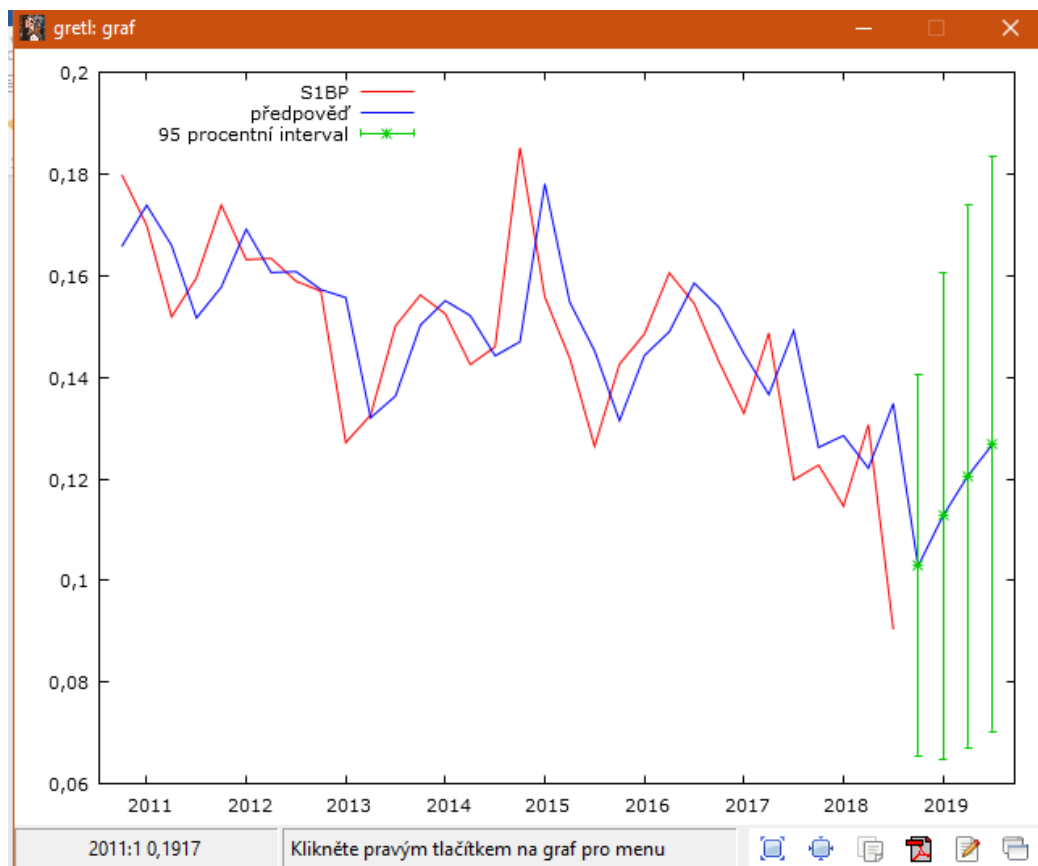
Z obrázku č. 14 je vidět že jsme se zbavili autokorelovanosti reziduí. Statistickou významnost kořenů jsme již identifikovali na obrázku č. 12. Poslední test, který by měl být splněn, je normalita reziduí.



Obrázek č. 15: Normalita reziduí modelu

Zdroj: [vlastní zpracování]

Z obrázku je patrné, že rozdělení je mírně špičatější, ale akceptovatelné. Nyní máme ověřené, že použití modelu je správné. Dalším krokem je zobrazení předpovědí na několik pozorování dopředu. V našem případě zobrazíme čtyři pozorování, resp. předpověď na rok dopředu.



Obrázek č. 16: Předpovědi modelu

Zdroj: [vlastní zpracování]

Z obrázku lze vypožorovat mírnou nepřesnost modelované řady (modrá čára). Nicméně podobným způsobem jsou prováděny odhady pro takovéto časové řady. Zkušenější analytik by možná zvolil více testů nebo sofistikovanější model. Tato část je zde právě pro představu čtenáře, jak obtížné bývá určení modelu časové řady v případě Box-Jenkinsonovy metodologie. Při odhadu modelu byl použit software Gretl. Bez sofistikovaných výpočetních programů dnes není možné věrně modelovat časové řady.

Odhady fraktální dimenze by právě mohly sloužit analytikům pro přesnější určení modelu. Vzhledem k dnešní rychlejší době je nutné zvládnout analýzu v krátké době. Právě proto se pokusíme odhadnout fraktální dimenzi u storen pojistných smluv.

4.4 Odhad fraktální dimenze

Při odhadu fraktální dimenze jsem použil R/S analýzu, která je popsána v podkapitole. Největším úskalím této metody je počet pozorování sledované časové řady, neboť během odhadu se data dělí na menší a menší „klastry“. Bohužel storna jsou sledována čtvrtletně a už tato skutečnost značí, že počet pozorování bude nižší. Např. software Gretl, který jsem využíval často k analýze časových řad během studia, dokáže odhadnout Hurstův exponent pouze tehdy, má-li k dispozici alespoň 128 pozorování. Naštěstí technika R/S analýzy není tak komplikovaná, takže je možné provést celou analýzu v MS Excelu. Pro zajímavost a detailnější postup zde uvedu odhad Hurstova exponentu jedné časové řady tak, aby čtenář byl schopen provést R/S analýzu.

Prvním krokem je samozřejmě očištění dat, což jsme provedli v předchozí podkapitole. Dalším krokem je zjištění počtu pozorování, neboť právě ten je důležitý pro rozhodnutí do kolika klastrů a jakým způsobem budou data rozdělena. Nejjednodušší způsob je rozdělení do klastrů podle sestupného počtu druhých logaritmů tak, aby výsledné číslo bylo vždy celé. Pokud máme tedy dostatečné množství dat, začneme s $N_1 = 1024$, $N_2 = 512$ a tak dále. V našem případě máme ovšem nízký počet pozorování. Nejvyšší počet pozorování má časová řada S1BP, kterou můžeme tedy rozdělit do klastrů po 64 pozorováních (1 velký klastř), 32 pozorováních (2 klastry), 16ti pozorováních (4 klastry) a 8 pozorováních (8 klastrů). Čím více můžeme časovou řadu dělit na klastry, tím lepší odhad Hurstova exponentu, resp. přesnější, získáme. Bohužel časovou řadu lze rozdělit maximálně na 4, neboť velmi nízký počet pozorování by mohl naopak odhad zhoršit. Možná si čtenář všimne, že časová řada má 67 pozorování, ale zde je použito pouze 64 pozorování. Důvodem je vynechání prvních třech nejstarších hodnot tak, aby počet pozorování byl vyjádřený mocninou čísla 2.

Nyní je nutné u každého vytvořeného klastru vypočítat rozpětí (maximum – minimum) označované písmenem R (z angl. range). V tabulce č. 6 nalezneme rozpětí pro všechny klastry k časové řadě S1BP.

R (max - min) i	R:
R (max - min) 1	0,138
R (max - min) 2a	0,138
R (max - min) 2b	0,094
R (max - min) 3a	0,082
R (max - min) 3b	0,112
R (max - min) 3c	0,049
R (max - min) 3d	0,094
R (max - min) 4a	0,062
R (max - min) 4b	0,033
R (max - min) 4c	0,061
R (max - min) 4d	0,079
R (max - min) 4e	0,026
R (max - min) 4f	0,027
R (max - min) 4g	0,058
R (max - min) 4h	0,059

Tabulka č. 6: Rozpětí jednotlivých klastrů

Zdroj: [vlastní zpracování]

Už zde je vidět časová náročnost výpočtu, která díky dnešní výpočetní technice je zanedbatelná. Následně je nutné stejným způsobem vypočítat směrodatnou odchylku jednotlivých klastrů (viz tabulka č. 7).

Si	S:
S1	0,028172
S2a	0,034663
S2b	0,019862
S3a	0,020275
S3b	0,034878
S3c	0,013706
S3d	0,021969
S4a	0,021171
S4b	0,012157
S4c	0,024026
S4d	0,024813
S4e	0,00887
S4f	0,010187
S4g	0,016917
S4h	0,018407

Tabulka č. 7: Směrodatné odchylky jednotlivých klastrů

Zdroj: [vlastní zpracování]

Dále je nutné vydělit rozpětí příslušnými odchylkami (odtud R/S analýza). Pro dva a více klastrů musíme výsledné R/S zprůměrovat (prostý aritmetický průměr) a tím získáme pro každý klastr jedno výsledné číslo. V tabulce č. 8 jsou výsledky pro první časovou řadu.

R/S i	R/S
R/S 1	4,92
R/S 2	4,36
R/S 3	3,79
R/S 4	2,95

Tabulka č. 8: R/S výsledky

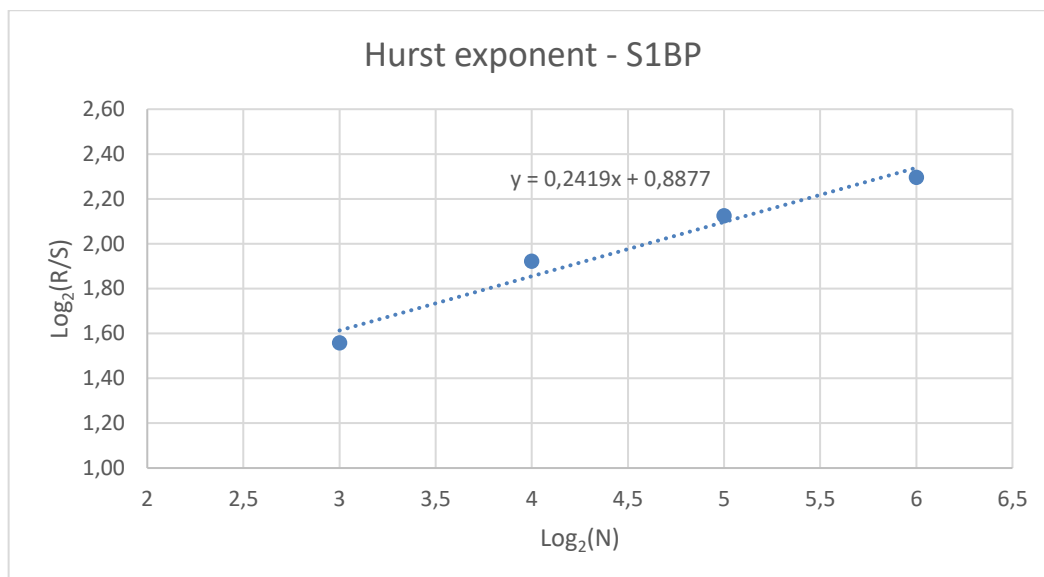
Zdroj: [vlastní zpracování]

Nyní stačí položit logaritmy o základu 2 (dále jen logaritmy) počtu pozorování na osu X a logaritmy vypočtených R/S na osu Y. V tabulce č. 9 jsou výsledky pro první časovou řadu S1BP a na grafu č. 7 jsou bodově znázorněny. Pro odhad Hurstova exponentu je nutné proložit body lineární regresí, kde sklon přímky je právě Hurstův exponent. V některých zdrojích je uváděná metoda spojení prvního a posledního měření, což je však příliš zjednodušující, neboť by stačilo vypočítat pouze právě tyto dva body a sklon by nebyl závislý na ostatních měřeních.

S1BP	
Log ₂ (N)	Log ₂ (R/S)
6	2,30
5	2,13
4	1,92
3	1,56

Tabulka č. 9: Výsledky analýzy

Zdroj: [vlastní zpracování]

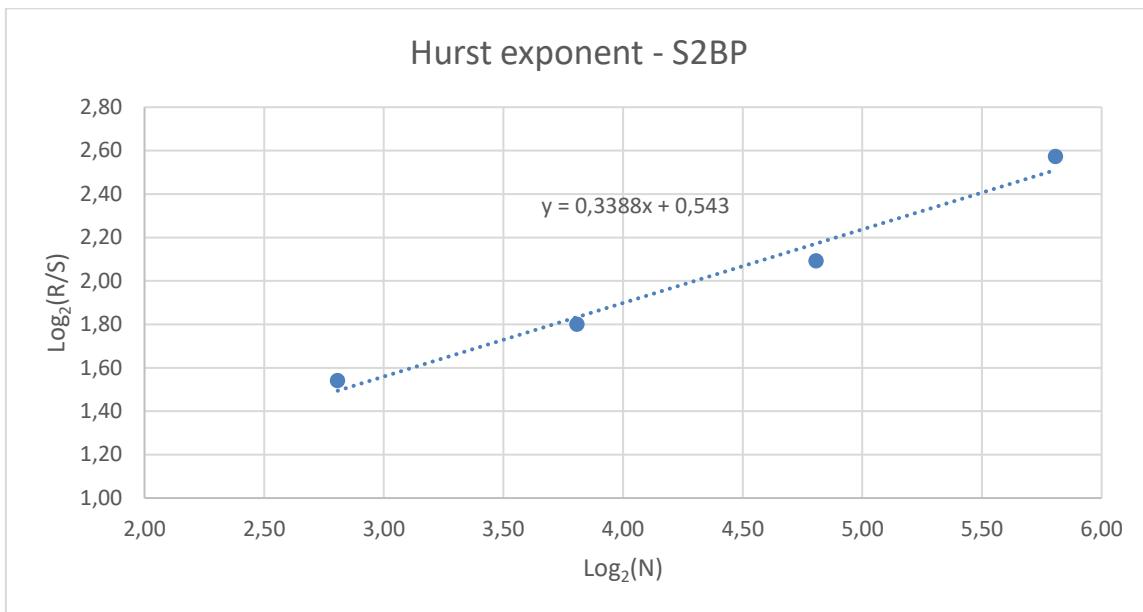


Graf č. 7: Odhad Hurstova exponentu pro S1BP

Zdroj: [vlastní zpracování]

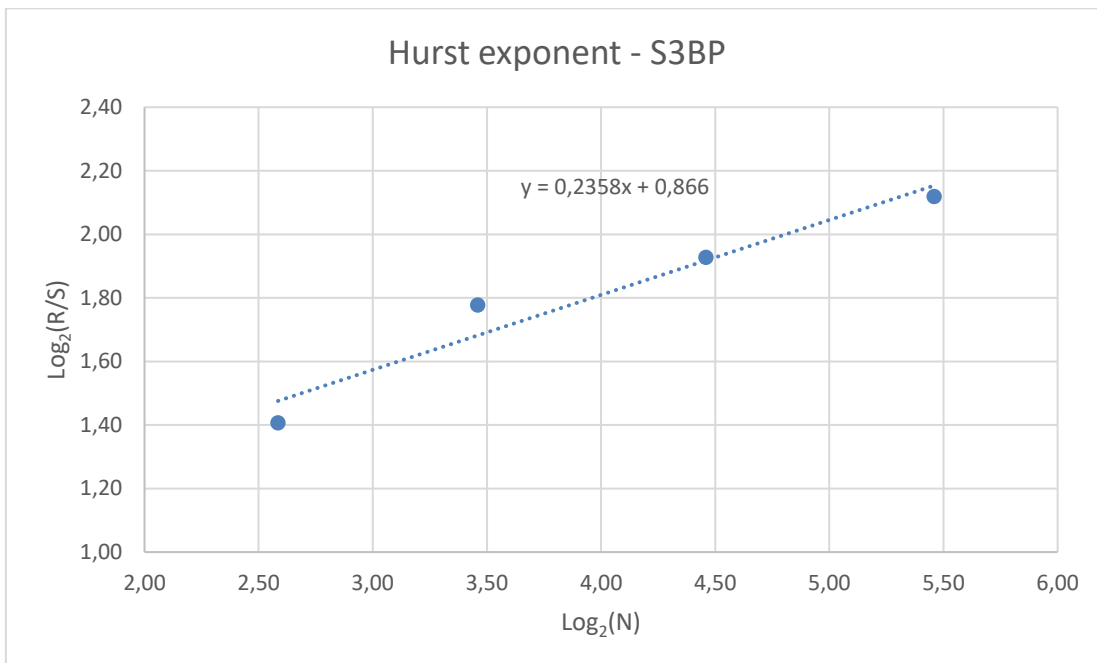
Z grafu je tedy patrné, že Hurstův exponent je roven 0,2419. Dle jednoduchého odvození vztahu mezi Hurstovým exponentem a fraktální dimenzí ($D_f = 2 - H$, kde H je Hurstův exponent) je fraktální dimenze stornovaných, běžně placených smluv $D_f = 1,7581$. Fraktální dimenze časových řad se pohybuje v intervalu $[1,2]$, přičemž čím blíže k jedničce, tím jednoduší časová řada je. Takovou časovou řadu lze bez větších obtíží úspěšně předvídat. Pravděpodobně bychom využili jednoduché statistické metody. Pokud se fraktální dimenze blíží 2, očekáváme členitější průběh. V některých literaturách je fraktální dimenze rovna 2 označována za náhodnou procházku. Hurstův exponent roven 0,5 značí taktéž náhodnou procházku. Nastává otázka, kdy je tedy odhad fraktální dimenze pomocí vztahu (19) vypovídající. Pokud by byla časová řada tvořena náhodnou procházkou byla by prakticky nepredikovatelná a její chování absolutně náhodné. Tuto skutečnost bychom mohli využít k vybrání vhodného modelu pro predikci. Zde by bylo vhodné zvolit model, který dokáže využít dlouhodobý paměťový cyklus. Interpretace fraktální dimenze u časových řad není jednoznačná a v různých zdrojích můžeme nalézt dokonce i rozdílné výsledky.

Další komplikací, která ovlivňuje výslednou fraktální dimenzi, je počet pozorování. Čím více pozorování máme k dispozici, tím přesnější výsledek získáme. Následující tři grafy zobrazují odhad Hurstova exponentu pro ostatní storna běžně placená.



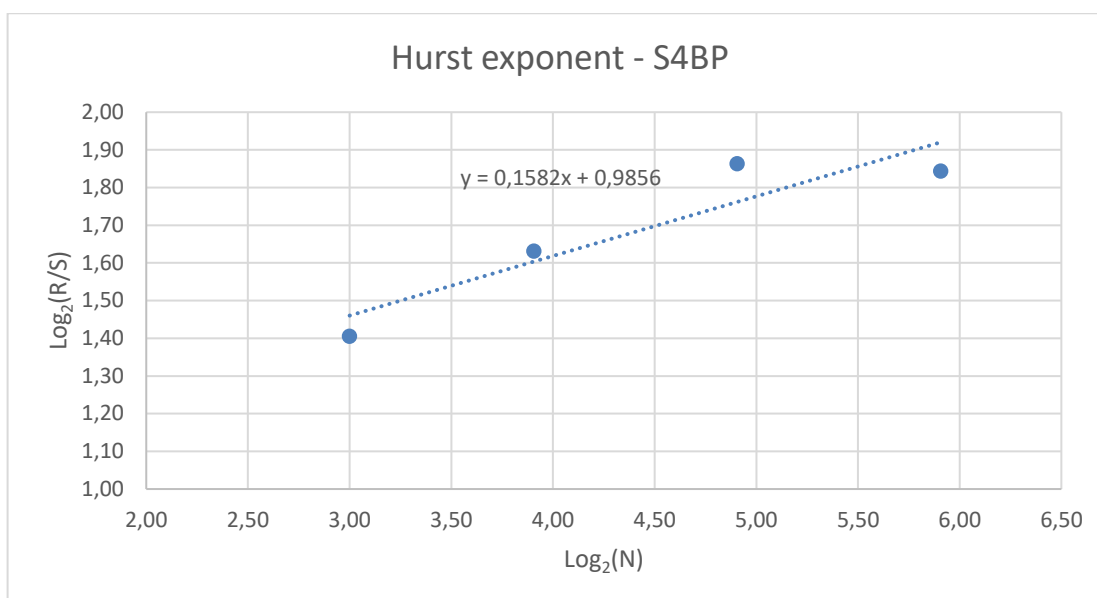
Graf č. 8: Odhad Hurstova exponentu pro S2BP

Zdroj: [vlastní zpracování]



Graf č. 9: Odhad Hurstova exponentu pro S3BP

Zdroj: [vlastní zpracování]



Graf č. 10: Odhad Hurstova exponentu pro S4BP

Zdroj: [vlastní zpracování]

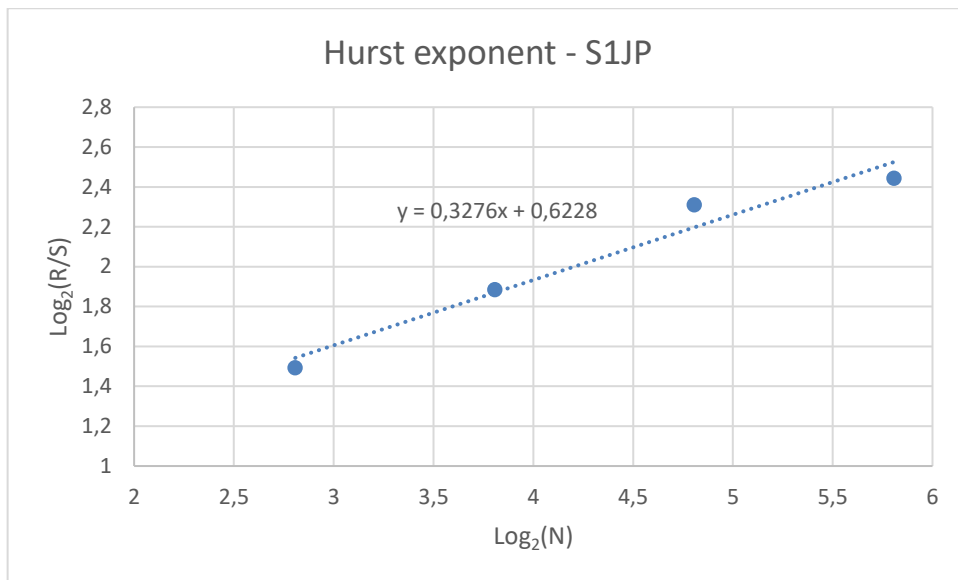
Vzhledem k „horším“ průběhům časové řady S2BP lze očekávat, že její fraktální dimenze bude blíže k 1,5. V tabulce č. 9 můžeme porovnat výsledky všech storen běžně placených smluv.

Storno PS	H - Hurstův exponent	Df - fraktální dimenze
S1BP	0,2419	1,7581
S2BP	0,3388	1,6612
S3BP	0,2358	1,7642
S4BP	0,1582	1,8418

Tabulka č. 10: Odhad fraktální dimenze storen běžně placených smluv

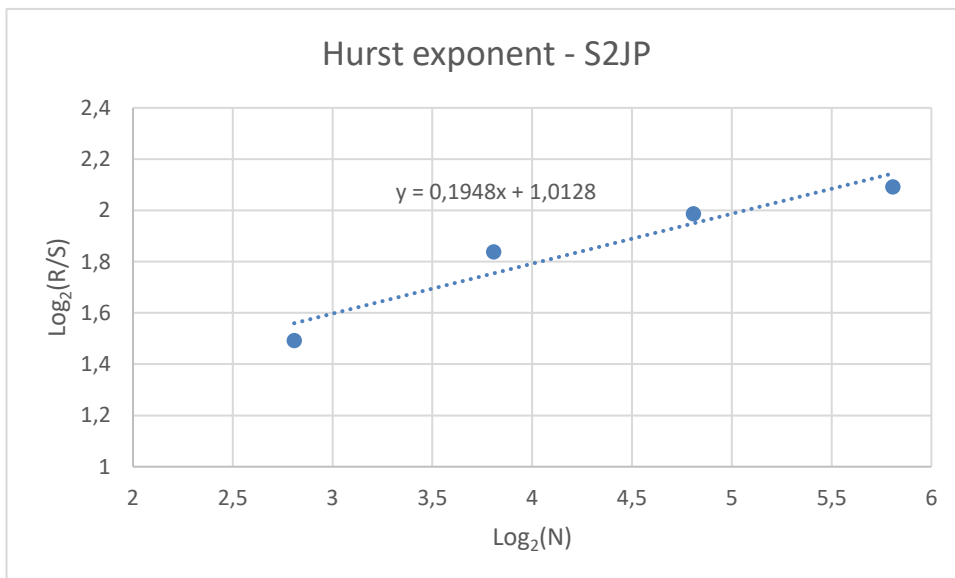
Zdroj: [vlastní zpracování]

Jak jsem očekával, nejnižší fraktální dimenze má časová řada S2BP. Větším překvapením je pro mě fraktální dimenze čtvrté časové řady S4BP, kde jsem očekával fraktální dimenzi, která bude bližší 1, neboť její průběh je relativně hladký. Je tedy možné, že zde bude silná korelace se staršími pozorováními. Dalším vysvětlením by mohlo být, že máme skutečně nedostatečný počet pozorování. Při větším počtu pozorování by došlo pravděpodobně ke zpřesnění odhadu. Nyní si zobrazíme grafy pro odhad Hurstova exponentu a následně fraktální dimenzi pro storna jednorázově placených smluv.



Graf č. 11: Odhad Hurstova exponentu pro S1JP

Zdroj: [vlastní zpracování]



Graf č. 12: Odhad Hurstova exponentu pro S2JP

Zdroj: [vlastní zpracování]

Už z grafu poznáme, že výsledky budou velmi podobné, což je celkem překvapivé, neboť průběhy časových řad až tak podobné nebyly. V tabulce č. 10 jsou odhady fraktální dimenze.

Storno PS	H - Hurstův exponent	Df – fraktální dimenze
S1JP	0,3276	1,6724
S2JP	0,1948	1,8052

Tabulka č. 11: Odhad fraktální dimenze storen jednorázově placených smluv

Zdroj: [vlastní zpracování]

Dle teoretických informací získaných o fraktální dimenzi jsou výsledky poměrně nečekané. Opět bych očekával přibližování se k 1, ale opak je pravdou. Storna pojistných smluv S2JP mají opět vysokou fraktální dimenzi. Výsledky opět značí, že bychom měli očekávat komplikovanější průběh s vyšší členitostí. Často bude docházet ke změně trendu, což dost komplikuje odhad dalšího průběhu. Nicméně je alespoň potvrzené, že zabývat se modelováním časových řad storen pojistných smluv má smysl a nejedná se o náhodnou procházku.

Na stornovost pojistných smluv mají vliv jak interní okolnosti, které pojišťovna ošetřit může, tak externí okolnosti, které nejsou ovlivnitelné. Ve skutečnosti je nutné pojišťovnu připravit na budoucí situace tak, aby mohla aktivně a včas reagovat. Je tedy možné, aby tyto časové řady kopírovaly svůj průběh a měnily trend? Odpověď není jednoznačná, protože studií zabývajících se fraktální analýzou v časových řadách pojišťovnictví zatím není mnoho. Věřím, že tato práce by mohla být jedním z prvních kroků k dalšímu využití fraktálů. Odpověď na modelování storen pojistných smluv je stále v moderních analytických nástrojích a fraktální dimenze může být dalším ukazatelem pro lepší rozhodování o výběru modelu.

5 ZÁVĚR

V první kapitole je sepsána stručná historie fraktální geometrie. Nalezneme zde objevy několika slavných matematiků, které byly pouze dílčími kroky vedoucími k objevu fraktální geometrie. Je jen velkou škodou, že tito autoři s geniální myslí byli omezeni svou dobou, přesto se jim však podařilo objevit průlomové otřásající nejen matematickým světem. Jsem rád, že jsem dostal příležitost se věnovat, byť jen částí této práce, právě těmto velikánům. Doufám, že právě čtenáři této práce získají větší přehled o historických průlomech, které vedly k fraktální geometrii. Nejdůležitějším průlomem je práce Benoita Mandelbrota, který je „otcem“ fraktální geometrie. Nyní dokážeme měřit hrubost objektů, popsat objem plíc jedním číslem a rozumět lépe členitým útvarům jako je třeba kvěťák nebo vložka, s nimiž se setkáváme v běžném životě. Jedním z důvodů, proč jsem se fraktální geometrií, resp. analýzou zabýval, je právě krása tvarů, které nám nová věda poskytuje.

Druhá kapitola poskytuje značné množství poznatků, které by nám měly lépe vysvětlit matematické pozadí fraktálů. Použité vzorce vypadají na první pohled velmi složitě a komplexně. Pokud se čtenář dokáže zamyslet nad jednotlivými úseky, zjistí že i přes „odborné“ matematické pojmy je fraktální geometrie / analýza intuitivně uchopitelná. Mou snahou bylo objasnit základní pojmy tak, aby čtenář pochopil princip fraktální geometrie. Nejdůležitější součástí je fraktální dimenze, která je ve čtvrté kapitole odhadována u časových řad. Je pozoruhodné, jakými způsoby lze novou vědu využít. Nejčastější použití fraktální analýzy bývá u finančních časových řad, např. u akcií a dalších vysokofrekvenčních dat.

Třetí kapitola seznamuje čtenáře s principy časových řad, resp. s problematikou, kterou se analytici zabývají. Nejpalcivějším problémem je rozdělení časové řady. Existují moderní nástroje pro odhad rozdělení, které spolehlivě dokážou ohodnotit vybraná rozdělení. Problémem je ale náhodný průběh časových řad, který se velmi těžko modeluje. Časové řady nenalezneme pouze na finančních trzích, ale také v různých odvětvích jako je třeba pojišťovnictví. Zde je kladen velký důraz na výpočty pojistného tak, aby pojišťovna byla schopna krýt rizika plynoucí z pojistných smluv a zároveň vytvářela zisk. Jsou zde uvedeny základní metody pro kalkulaci pojistného pro životní pojištění i pro neživotní pojištění. Nejzajímavější a „nejzábnější“ výpočty pojistného se skrývají v havarijním pojištění. Pro tato pojištění se používá bonus-malus a tento systém využívá Markovovy řetězce. Vzhledem k těmto krásným matematickým vzorům jsem se rozhodl věnovat se časovým řadám v pojištění.

Vzhledem k mému oboru (pojistné inženýrství) jsem se rozhodl začít budovat kariéru v pojistném oboru o něco dříve. Využil jsem trainee program jedné velké pojišťovny, která nabízela pozici pro trainee projektového manažera. Ačkoliv tato pozice nesouvisí s výpočty, které provádí odbor pojistné matematiky, je dost velká pravděpodobnost spolupráce mezi těmito útvary. Navázal jsem kontakt s ředitelem odboru pojistné matematiky, který byl velmi vstřícný a po diskuzi jsme došli k závěru, že nejvhodnější data pro analytickou část jsou storna pojistných smluv. Tímto bych chtěl vyjádřit, ačkoliv anonymně, velké poděkování za spolupráci a ochotu při poskytování dat. Zde tento postup uvádím pro inspiraci čtenářů, kteří by se mohli ocitnout v podobné situaci. Dále je zde uveden krátký postup odhadování modelu časové řady pomocí Box-Jenkinsonovy metodologie. Vybral jsem na základě několika kritérií jednoduchý model AR(1), který celkem věrně kopíroval průběh časové řady a splnil další předpoklady pro jeho využití. Tím je názorně zobrazena složitost a komplexnost těchto analýz. Právě kvůli důležitosti výběru správného modelu by fraktální analýza mohla poskytnout další charakteristiku, na jejímž základě bychom byli schopni model identifikovat zase o něco lépe.

Ve čtvrté kapitole této práce jsou analyzována data storn pojistných smluv běžně placených a jednorázově placených. Běžně placené smlouvy znamenají pravidelnou platbu (např. měsíčně) pojistiteli. Jednorázově placené smlouvy, jak již z názvu vyplývá, jsou splaceny jednou velkou částkou na počátku smlouvy. Klient má nějaké možnosti při rušení pojistek. Samozřejmě všechny základní podmínky jsou uvedeny v zákoně, nicméně v každé pojistné smlouvě jsou další podmínky, které mohou tyto podmínky svým způsobem upravovat. Pokud klient chce zrušit smlouvy v brzké době po jejím uzavření, většinou nedostane zpět již zaplacené pojistné. Pokud ovšem určitou dobu od podepsání pojistné smlouvy musí nebo chce zrušit pojistnou smlouvu, jsou mu vynaložené peněžní prostředky navraceny (v jisté výši). Proto je důležité pro pojišťovnu analyzovat storna, proč k nim dochází a odhadnout jaké % stornovosti můžeme očekávat v dalším období. Základní popisnou statistikou získáme přehled o datech, jejich povaze a jakými charakteristikami se vyznačují. Ovšem vůbec prvním krokem je důraz na to, zda jsou pozorování měřena za stejné období. V našem případě se jedná o čtvrtletní data a musíme si uvědomit, že každé čtvrtletí má jiný počet dnů. Proto bylo nutné data od těchto vlivů očistit. Vzhledem k průběhu časových řad nebyla žádná překvapení ve výsledcích popisné statistiky.

Nejdůležitější částí poslední kapitoly byl odhad fraktální dimenze. Existuje více metod pro odhad fraktální dimenze, nicméně zvolená R/S analýza poskytuje rychlé odhadnutí Hurstova exponentu, z něhož je pak možné odhadnout fraktální dimenzi. Bohužel R/S analýza vyžaduje velké množství pozorování, která u těchto časových řad chybí. Ačkoliv jsme omezeni menším

počtem pozorování, je možné odhadnout Hurstův exponent. Pro přesnější odhady je vhodné použít časovou řadu s velkým množstvím pozorování. Odvození fraktální dimenze z Hurstova exponentu je jednoduché, nicméně interpretace této dimenze u finančních časových řad se dosti liší. U některých časových řad byly výsledky nečekané. Vzhledem na použitou interpretaci jsem očekával opačný výsledek, aneb že fraktální dimenze prostších průběhů budou v intervalu 1 – 1,5. Opak byl pravdou. Jednodušší průběh se blížil naopak k fraktální dimenzi rovné 2 a složitější průběhy s vyššími odchylkami se blížily k 1,5. Právě prostší průběh mne překvapil. Při studiu vysokofrekvenčních dat, např. na akciových trzích se hodnota fraktální dimenze pohybuje právě v intervalu 1 – 1,5. Proto zde vyjadřuji své obavy nad použitím R/S analýzy při studiu časových řad storen pojistných smluv, neboť velký vliv může mít malý počet pozorování. Pro přesnější výsledky bychom na základě fraktální dimenze odhadli model, který by dobře vystihl průběh řady. V dalším zkoumání fraktální dimenze by bylo vhodné se pokusit právě o zvolení modelu na základě fraktální dimenze, ačkoliv jsou zde sofistikovanější metody pro rozhodnutí o modelování časové řady. Dle výsledků jsme se dozvěděli, že tyto časové řady „vyplňují“ prostor více a jsou hrubější.

Fraktální analýza časových řad je zajímavým tématem. Existuje mnoho publikací, či vysokoškolských prací, které se zabývají právě takovou analýzou. Nenašel jsem ovšem práci, která by se zabývala fraktální analýzou časových řad v pojišťovnictví, přitom pojišťovnictví je jeden z pilířů zdravé ekonomiky všude ve světě. Právě proto jsem se rozhodl věnovat se ve své diplomové práci analýze tohoto druhu dat.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] PEITGEN, Heinz-Otto, H. JÜRGENS a Dietmar SAUPE. Chaos and fractals: new frontiers of science. New York: Springer-Verlag, c1992. ISBN 0-387-97903-4.
- [2] ZELINKA, Ivan, František VČELAŘ a Marek ČANDÍK. Fraktální geometrie: principy a aplikace. Praha: BEN - technická literatura, 2006. ISBN 80-7300-191-8.
- [3] Cantorova množina. In: KSR [online]. Liberec [cit. 2019-01-15]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/printsrc/obr16.jpg>
- [4] Kochova křivka. Three Cornered Things [online]. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <http://i0.wp.com/blog.zacharyabel.com/wp-content/uploads/2011/12/TM-turtle-koch.gif?resize=600%2C400>
- [5] Kochova vločka. In: Fykos [online]. [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/4-4.png
- [6] Waclaw Sierpiński. In: Mac Tutor Hisoty of Mathematics archive [online]. Scotland [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html?fbclid=IwAR03nSUKwpD5Z3cX77gcHVBf-zM3gCIhquZkNBrg_K008s27TbBGQYMZbe0
- [7] Sierpińskiho trojúhelník. In: Oftenpaper [online]. [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: <http://www.oftenpaper.net/img/siermathgb3.png>
- [8] Felix Hausdorff. In: Mimuw.edu [online]. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <http://wazniak.mimuw.edu.pl/images/4/48/Hausdorff.jpg>
- [9] Dynamické systémy. In: Elektro revue [online]. [cit. 2019-02-17]. Dostupné z: <http://www.elektrorevue.cz/clanky/01040/index.htm>
- [10] Gaston Julia. In: Aliens, everything you want to know [online]. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <http://www.aliens-everything-you-want-to-know.com/image-files/gastonjulia.jpg>
- [11] Gaston Julia, voják 1. světové. In: Mac Tutor Hisoty of Mathematics archive [online]. Scotland [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html?fbclid=IwAR03nSUKwpD5Z3cX77gcHVBf-zM3gCIhquZkNBrg_K008s27TbBGQYMZbe0
- [12] MANDELROT, Benoît B. Fraktalista: rebelem ve vědě. Praha: Argo, 2014. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-608-1.

- [13] Benoit Mandelbrot. Pinimg [online]. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <https://i.pinimg.com/originals/bf/90/0b/bf900b90821ef59426c4d6c7719e1b41.jpg>
- [14] Mandelbrotova množina. In: Wikimedia [online]. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ac/Mandelbrot-Menge_farbig.png
- [15] Mandelbrotova množina, konstrukce: Petr Jarusek. Youtube [online]. 2012, 28. 1. 2012 [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=1MFdrqVIX98>
- [16] KOUDELA, Libor. O pojetí křivky. Pardubice: OPS, 2013. ISBN 978-80-87269-31-2.
- [17] FALCONER, K. J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. 2nd ed. Chichester, England: Wiley, c2003. ISBN 0-470-84862-6.
- [18] RÖHRICH, Jindřich. Teorie chaosu v ekonomických modelech. Pardubice, 2017. Bakalářská práce. Univerzita Pardubice. Vedoucí práce Libor Koudela.
- [19] *Analytics* [online]. [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: <http://analytics-magazine.org/the-hurst-exponent-predictability-of-time-series/>
- [20] ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Finanční časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.
- [21] *Česká asociace pojišťoven* [online]. [cit. 2019-04-13]. Dostupné z: <http://www.cap.cz/vse-o-pojisteni/pojisteni-v-praxi/pojistna-smlouva>