

Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

**Modelování a simulace nejvyšších pojištěných škod
při katastrofách ve světě**

Bc. Karolína Kloučková

**Diplomová práce
2017**

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Karolína Kloučková**
Osobní číslo: **E13912**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**
Název tématu: **Modelování a simulace nejvyšších pojištěných škod při katastrofách ve světě**
Zadávací katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem diplomové práce je teoreticky popsat metody pravděpodobnostního modelování rizik souvisejících s výskytem a ekonomickými důsledky přírodních katastrof a aplikovat je na reálná publikovaná data.

Osnova:

- Vývoj počtu a závažnosti katastrof a jejich důsledků pro pojistné trhy.
- Teoretický popis metod modelování extrémních pojištěných škod.
- Teoretický popis metod simulace extrémních pojištěných škod.
- Aplikace metod modelování a simulace extrémních pojištěných škod při katastrofách ve světě.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

GILCHRIST, W. G. Statistical Modelling with Quantile Functions, Chapman & Hall/CRC, London 2000.

McNEIL, A. Estimating The Tails Of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory. In: ASTIN BULLETIN [online]. Zurich, 1997 [cit. 2012-04-08]. Dostupné na:

<http://www.actuaries.org/LIBRARY/ASTIN/vol27no1/117.pdf>.

Natural catastrophes and man-made disasters in 2015, SIGMA No2/2016, Swiss Re [online]. Available on:

http://media.swissre.com/documents/sigma2_2015_en_final.pdf.

PACÁKOVÁ, V., JINDROVÁ, P. Simulation of Extreme Insured Losses in Natural Catastrophes, Recent Advances in Mathematics and Computational Science, pp. 30-34.

SANDERS, D. E. A. The Modelling of Extreme Events. Institute of Actuaries, 2005. Dostupné na:

www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/sm20050404.pdf .

Viera Pacáková

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 4. září 2016

Termín odevzdání diplomové práce: 28. dubna 2017

Romana Provažníková
doc. Ing. Romana Provažníková, Ph.D.
děkanka

L.S.

Bohdan Linda
doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. září 2016

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 22.6.2017

Karolína Kloučková

PODĚKOVÁNÍ:

Na tomto místě bych chtěla poděkovat své vedoucí práce, paní prof. RNDr. Viere Pacákové, Ph.D. za vstřícný přístup, její odborné připomínky a rady při zpracování diplomové práce.

ANOTACE

Tato diplomová práce se zaměřuje na modelování a simulaci nejvyšších pojištěných škod při katastrofách ve světě. Cílem práce je teoreticky popsat metody pravděpodobnostního modelování rizik související s výskytem a ekonomickými důsledky přírodních katastrof a aplikovat je na reálná publikovaná data.

KLÍČOVÁ SLOVA

Katastrofy, odhady parametrů, neproporcionální zajištění, kvantilový model, pořádková statistika, modelování extrémních škod, simulace extrémních škod.

TITLE

Modelling and simulation of the highest insured losses in the world catastrophe.

ANNOTATION

This diploma thesis focuses on modeling and simulation of the highest insured damages in the world. The main aim of this thesis is to describe methods of probability modeling of risks related to occurrence and economic consequences of natural disasters and to apply them to real published data.

KEYWORDS

Disasters, estimation of parameters, disproportionate collateral, quantile function, order statistics, extreme damage modeling, simulation of the extreme losses

OBSAH

ÚVOD	10
1 VÝVOJ POČTU A DŮSLEDKŮ KATASTROF	12
1.1 ZÁKLADNÍ POJMY	12
1.2 VÝVOJ POČTU KATASTROF	15
1.3 VÝVOJ POČTU OBĚTÍ	17
1.4 VÝVOJ FINANČNÍCH ZTRÁT	19
1.4.1 Vývoj pojistných plnění	19
1.5 DŮSLEDKY KATASTROFICKÝCH UDÁLOSTÍ PRO POJISTNÉ TRHY	23
1.5.1 Neproporcionální zajištění	24
1.5.2 Katastrofické dluhopisy	26
2 METODY MODELOVÁNÍ EXTRÉMních POJIŠTĚNÝCH ŠKOD	28
2.1 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY	28
2.1.1 Rozdělení gama $\Gamma(a;b)$	28
2.1.2 Rozdělení lognormální $LN(\mu,\sigma^2)$	29
2.1.3 Rozdělení Weibullovo $W(\gamma,c)$	30
2.2 ROZDĚLENÍ PARETOVO PA(A,B)	31
2.2.1 Rozdělení Paretovo – evropský tvar	31
2.3 GRAFICKÁ ANALÝZA DAT	32
2.4 TESTY DOBRÉ SHODY	33
2.4.1 Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody	33
2.4.2 Pearsonův χ^2 test dobré shody	34
3 SIMULACE EXTRÉMních POJIŠTĚNÝCH ŠKOD	35
3.1 KVANTILOVÝ MODEL	35
3.1.1 Pořádková statistika	36
3.2 TEORETICKÝ POPIS METOD SIMULACE	38
4 APLIKACE METOD MODELOVÁNÍ A SIMULACE EXTRÉMních POJIŠTĚNÝCH ŠKOD ..	40
4.1 CHARAKTERISTIKA VYBRANÝCH DAT	40
4.2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ROZDĚLENÍ	43
4.2.1 Gama rozdělení	44
4.2.2 Lognormální rozdělení	45
4.2.3 Paretovo rozdělení	47
4.2.4 Weibullovo rozdělení	48
4.3 SIMULACE EXTRÉMních POJIŠTĚNÝCH ŠKOD	50
ZÁVĚR	53
POUŽITÁ LITERATURA	54

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 Katastrofická událost dle Sigma parametrů v roce 2016.....	13
Tabulka 2 Ekonomické ztráty daných oblastí v roce 2016.....	19
Tabulka 3 Patnáct nejnákladnějších jednotlivých událostí v letech 1970-2016.....	21
Tabulka 4 Sedm nejnákladnějších pojistných událostí v roce 2016.....	22
Tabulka 5 Celkové shrnutí údajů v roce 2016.....	23
Tabulka 6 n-hodinová klauzule.....	25
Tabulka 7 Data 40 nejvýše pojištěných ztrát.....	40
Tabulka 8 Základní statistické charakteristiky analyzovaných dat.....	40
Tabulka 9 Frekvence v jednotlivých intervalech.....	42
Tabulka 10 Odhad parametrů gama rozdělení.....	44
Tabulka 11 Odhad parametrů lognormálního rozdělení.....	45
Tabulka 12 Odhad parametrů Paretova rozdělení o.....	47
Tabulka 13 Odhad parametrů Weibullova rozdělení.....	48
Tabulka 14 Výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu dobré shody.....	50
Tabulka 15 Pomocné výpočty simulace.....	51
Tabulka 16 Výsledky simulace.....	51

SEZNAM ILUSTRACÍ

Obrázek 1 Vývoj počtu katastrofických událostí.....	15
Obrázek 2 Přírodní katastrofy a katastrofy způsobené člověkem 1970-2016.....	16
Obrázek 3 Nejtragičtější katastrofické události podle počtu obětí od roku 1970.....	18
Obrázek 4 Pojištěné katastrofické škody v letech 1970-2016.....	20
Obrázek 5 Pojištěné a nepojištěné škody v období 1970 - 2016.....	23
Obrázek 6 Bodový diagram.....	41
Obrázek 7 Krabicový graf.....	41
Obrázek 8 Histogram výsledků třídění.....	42
Obrázek 9 Možnosti pravděpodobnostního rozdělení.....	43
Obrázek 10 Histogram pro vizuální ověření shody s gama rozdělením.....	44
Obrázek 11 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s gama rozdělením.....	45
Obrázek 12 Histogram pro vizuální ověření shody s lognormálním rozdělením.....	45
Obrázek 13 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s lognormálním rozdělením.....	46
Obrázek 14 Histogram pro vizuální ověření shody s Pareto rozdělením.....	47
Obrázek 15 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s Paretovo rozdělením.....	47
Obrázek 16 Histogram pro vizuální ověření shody s Weibullovým rozdělením.....	48
Obrázek 17 Q-Q pro vizuální ověření shody s Weibullovým rozdělením.....	48
Obrázek 18 Q-Q grafy pro vizuální porovnání dobré shody zvolených rozdělení.....	49
Obrázek 19 Výsledky simulace extrémních škod při přírodních katastrofách.....	52

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

CatXL	zajištění škodního nadměrku, catastrophe excess of loss cover CatXL
h	hodina
CHE	Švýcarsko
km	kilometry
NZ	Nový Zéland
SL	Stop Loss
THA	Thajsko
USA	Spojené státy americké
USD	Americký dolar
WXL/E	zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí, working excess of loss cover
WXL/R	zajištění škodního nadměrku jednotlivých smluv, working excess of loss cover per risk

ÚVOD

Diplomová práce je věnována modelování a simulaci nejvyšších pojištěných škod při katastrofách ve světě. Pojištěné škody jsou hrazeny z příspěvků pojistníků, kteří se proti pojistným událostem chrání formou pojištění. Pojištění má za cíl snížit důsledky nahodilé události.

Katastrofické události od roku 1990 zaznamenávají růst a v posledních letech je nárůst značný. Vlivem častých katastrofických událostí rostou náklady pojišťovněm a zajišťovněm. Přírodní katastrofická událost má negativní vliv na celý svět. Zda je způsobena člověkem, nebo jen vlivem přírody, není jedno, ale v obou případech dochází k velkému poškození přírody, společnosti, majetku a ztrátě na životech. Pojišťovnictví využívá k výpočtům modelování extrémních škod metody pravděpodobnosti a statistiky. Jelikož pojistná událost je jev náhodný, využití teorie pravděpodobnosti, statistiky a pojistné matematiky je nezbytný. Modelování extrémních škod slouží například k určení výše pojistného, vlastního vrubu pojišťovny, solventnosti pojišťoven a zajišťoven.

Cílem diplomové práce je teoreticky popsat metody pravděpodobnostního modelování rizik souvisejících s výskytem a ekonomickými důsledky přírodních katastrof a aplikovat je na reálná publikovaná data.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř hlavních kapitol, které dále obsahují podkapitoly.

První kapitola diplomové práce popisuje vývoj počtu a závažnosti katastrof, vývoj počtu obětí a vývoj ekonomických ztrát se zaměřením na nejzávažnější katastrofy, které se udály v letech 1970 – 2016. Dále budou v první kapitole popsány důsledky vzniku katastrofických událostí pro pojistný trh se zaměřením na zajištění. Důležitost při zajištění má CatXL zajištění, kterému se podkapitola věnuje.

Druhá kapitola v této práci je zaměřena na modelování extrémních pojištěných škod. Jsou zde popsány pravděpodobnostní modely rozdělení, hlavně Paretovo rozdělení, grafická analýza dat a testy dobré shody.

Třetí kapitola je věnována popisu simulace extrémních pojištěných škod. Je zde teoreticky popsáno modelování pomocí kvantilového modelu.

Poslední čtvrtá kapitola diplomové práce je zaměřena na aplikaci metod modelování a simulace extrémních pojištěných škod. Analýza dat je zpracována ve statistickém programu Statgraphics Centurion XVII. Pro analýzu a následnou simulaci jsou použita data

ze švýcarského časopisu Sigma, který vydává společnost Swiss Re. Modelovaná a simulovaná data jsou hodnoty z let 1970 - 2016 a jedná se o nejvyšší hodnoty pojištěných škod při katastrofických událostech ve světě. K simulaci nejvyšších škod je využit program Microsoft Excel 2007.

1 VÝVOJ POČTU A DŮSLEDKŮ KATASTROF

Kapitola popisuje vývoj počtu katastrof a jejich důsledků pro pojistné trhy ve světě. Především se zaměříme na rok 2016, ale také zde shrneme nejzávažnější katastrofy od roku 1970.

1.1 Základní pojmy

Katastrofická událost

Extrémní události nenastávají každý den, ale bohužel v poslední době se s některými velmi nákladnými katastrofami potýkáme. Jejich důsledkem je značný počet obětí, ale také negativní vliv na pojišťovny a zajišťovny. Katastrofické události zanechávají zničené přírodní oblasti. Za nejzávažnější živelnou pohromu můžeme považovat zemětřesení, které je většinou spojeno s tsunami a vichřicí. [10]

Definice katastrofy záleží na velikosti pojištěné škody, celkové škody nebo počtu osob zraněných, bez domova či mrtvých. Švýcarská zajišťovna Swiss Re, sídlící v Curychu, definuje hodnoty, které určují, zda je to katastrofa, či nikoli. Swiss Re je druhou největší zajišťovnou na světě (na prvním místě je Munich Re). Vznikla roku 1863, hlavní náplní této firmy je zajištění. Dále poskytuje pojištění a speciální formy pojištění z přenosu rizik. Klienty tvoří pojišťovny, střední a velké korporace. Aby se stala konkurenceschopná, má pobočky ve více jak 25 zemích po celém světě. Zabývá se statistickými údaji o katastrofických událostech, počtech obětí a ekonomických ztrát, které každý rok publikuje časopis Sigma. Publikace vydává v tištěné i elektronické formě a jsou veřejně dostupné. [23] [11]

Chceme-li definovat vzniklou událost jako katastrofu, musí minimální počet obětí či pohřešovaných dosahovat 20, či celkové ekonomické ztráty jsou v rozsahu přes 99 milionů USD. Následující tabulka dle časopisu Sigma ukazuje hodnoty, při kterých je událost klasifikována jako katastrofa. Hodnoty jsou dle aktuálního vydání 2017. Každý rok se některé údaje mění.

Tabulka 1 Katastrofická událost dle Sigma parametrů v roce 2016

POJIŠTĚNÁ ŠKODA	
Námořní katastrofy	19,9 milionu USD
Letecké katastrofy	39,8 milionu USD
Ostatní ztráty	49,5 milionu USD
CELKOVÉ EKONOMICKÉ ZTRÁTY	99,0 milionu USD
OBĚTI	
Mrtvý nebo pohřešovaný	20
Zraněny	50
Bez domova	2000

Zdroj: [21]

Rozlišujeme dva druhy katastrof:

- Katastrofy způsobené člověkem
- Přírodní katastrofy

V některých případech je jedna část doprovázena druhou a nelze jednoznačně určit, kdo zapříčinil katastrofu. Může tak docházet k otázkám, zda sucho ovlivňuje příroda, či za tím stojí člověk, který vypouští do ovzduší skleníkové plyny spalováním fosilních paliv. Další z příkladů může být sesuv půdy.

Katastrofa způsobená člověkem

Je to negativní událost zapříčiněna lidskou činností. Dosahuje menšího rozsahu katastrofy než přírodní katastrofa. Vztahuje se na ni menší počet pojistných smluv, jelikož v častých případech je zasažen velký objekt na malém prostoru. Války, ozbrojené konflikty a občanské války jsou pro většinu z nás katastrofou, ale z těchto statistických údajů jsou vyloučeny.

Mezi katastrofy způsobené člověkem (antropogenní katastrofy) řadíme [5]:

- Násilné události – zhářství, terorismus
- Průmyslové katastrofy – jaderné a chemické výbuchy, ekologické neštěstí, atomové výbuchy
- Nehody způsobené dopravním prostředkem – kosmické, letecké, železniční, dopravní, lodní
- Další

Přírodní katastrofa

Jedná se o událost negativně působící na přírodu, zanechává po sobě větší škody než člověkem způsobená katastrofa. Působí zde přírodní síly, které můžou trvat i několik týdnů, ale také se vše může zničit během pár sekund. Následky přírodní katastrofy jsou přírodní a materiální škody, ale zanechávají i lidské oběti. Rozsah katastrofy postihuje velkou oblast, kde je velký počet menších individuálních škod a týká se vysokého počtu pojistných smluv. Celkové majetkové a lidské ztráty neovlivňuje pouze přírodní katastrofa, ale vliv zde má také lidský faktor. Nejčastějším ovlivňujícím faktorem je vliv člověka, který zodpovídá za prevenci v postižených oblastech, konstrukce staveb a kontroly zasažených oblastí.

Mezi přírodní katastrofy řadíme katastrofy:

- Meteorologické – tropické bouře, sucho, tornádo, zima, blizzard, krupobití, bouřky, horko, hurikány
- Kosmické – mimozemské těleso, sluneční erupce, hypernova
- Geologické – zemětřesení, lavina, tsunami, sesuvy, erupce způsobené sopkou
- Další – hladomor, požár, epidemie, povodeň...[5]

Celková škoda

Celková škoda nebo ekonomická ztráta zahrnuje finanční ztráty dané události, subjektů pojištěných i nepojištěných. Jsou zde zahrnuty i odhadované ekonomické ztráty subjektů, které musejí přerušit svoji činnost podnikání z důvodu zničení či poškození majetku (nezahrnuje se sem ztráta dobrého jména ani ztráta dodavatelů). [21]

Pojištěná škoda

Pojištěná škoda nebo pojištěná ztráta představuje pojistné plnění všech pojišťovacích nebo zajišťovacích institucí, které se podílely na snížení důsledků vzniklé katastrofické události. Hodnota, která je uváděna, nezahrnuje odpovědnost za škodu a pojistné plnění ze životního pojištění.

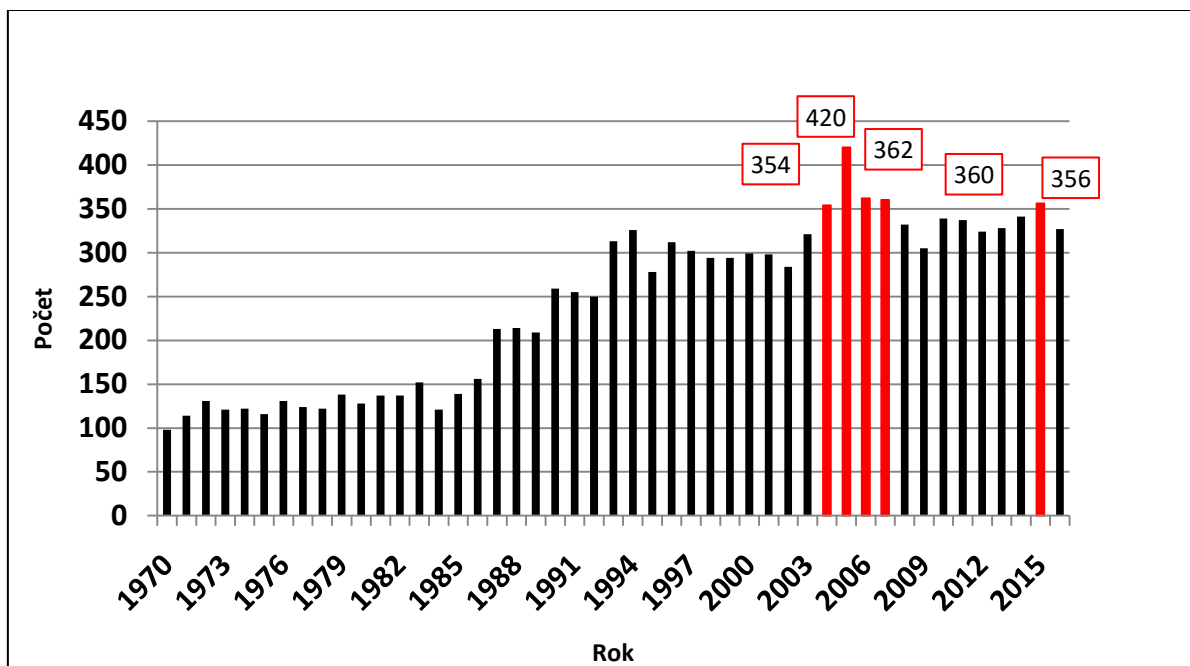
Pojistné plnění

Pojistné plnění je částka, kterou na základě pojistné smlouvy vyplácí pojišťovna klientovi. Vyplacená suma je náhrada za vzniklou škodu při katastrofě. Pojistné podmínky jsou vždy uvedeny v pojistné smlouvě, kde je přesně dán rozsah na jakou událost se pojištění vztahuje a za jakých podmínek bude pojistné plnění vyplaceno.

1.2 Vývoj počtu katastrof

Počet celkových událostí od roku 1970 do roku 2016 má rostoucí tendenci. Extrémní nárůst událostí nastal v roce 2005. Průměrný počet událostí do roku 2004 byl 211 katastrof. Od roku 2005 se průměrný počet katastrof zvýšil o 150 událostí za rok. Mezi teorie nárůstu katastrof patří změny klimatu a zvýšení počtu obyvatelstva.

Obrázek 1 představuje celkový počet katastrof od roku 1970 do roku 2016 s vyznačenými pěti lety, kdy se stalo nejvíce katastrof.



Obrázek 1 Vývoj počtu katastrofických událostí

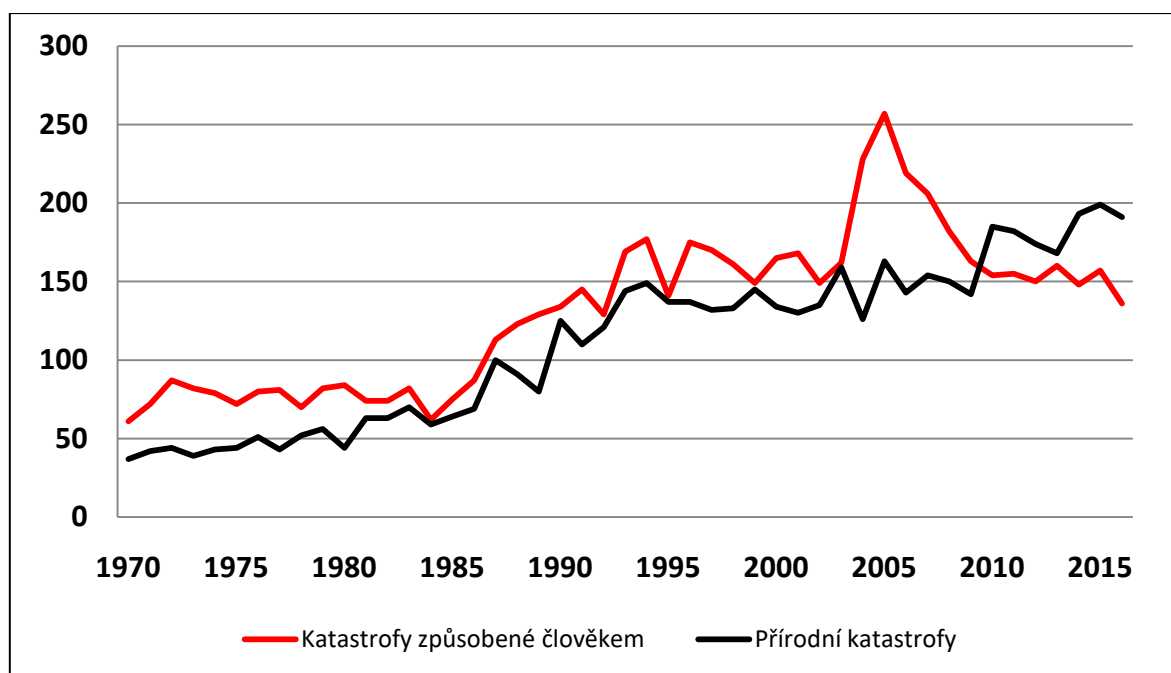
Zdroj: vlastní zpracování dle [22]

Rok 2004 (354 katastrof za rok) byl čtvrtým nejteplejším obdobím od roku 1861, kdy začalo pravidelné měření a následné zaznamenávání teplot. Největší katastrofy způsobilo tsunami v Indickém oceánu, 13 hurikánů ve Spojených státech a 10 tajfunů v Japonsku. Následující rok 2005 (420 katastrof za rok) byl ve znamení zemětřesení v Asii v oblasti Kašmíru, hurikán (Katrina, Wilma, Rita) v Severní Americe, hurikán Stan v Mexiku, zimní bouře v Evropě, studená vlna s přívalem sněhu a lavin v Pakistánu a tajfun v Jižní Korei. Malý pokles katastrofických událostí byl zaznamenán v roce 2006 (362 katastrof za rok), kde za zmínku stojí zemětřesení v Indonésii a hurikán Larra v Austrálii. O rok později 2007 (360 katastrof za rok) byl zaznamenán rychlý vzestup přírodních katastrof. Největší katastrofy způsobily povodně a cyklón s větrem o rychlosti přes 240km/h v Bangladéši a Indii, povodně v Severní Korei, zimní bouře Kyrill s větrem o rychlosti přes 190km/h a povodně v Evropě. V roce 2015 (356 katastrof za rok) se na katastrofických událostech nejvíce podílelo

zemětřesení v Nepálu, sucha v USA a povodně ve Velké Británii, Africe, Madagaskaru a v Keni. [23]

Podle kritérií Swiss Re Sigma v roce 2016 bylo zaznamenáno 327 katastrofických událostí, 191 přírodních katastrof a 136 katastrof způsobených člověkem. Celkem 11 000 lidí přišlo o život nebo jsou pohřešováni. Rozsáhlou devastaci po celém světě způsobilo zemětřesení v Japonsku, Ekvádoru, Tanzanii, Itálii a na Novém Zélandě, meteorologické události v USA, Evropě a v Asii a požár v Kanadě, který se šířil přes Albertu od května do června. Mezi historické tabulky se zapsal hurikán Matthew. Od roku 2007 byl nejsilnější bouří kategorie 5 a zanechal přes 700 obětí (velká část lidských obětí byla na Haiti). [21]

Obrázek 2 představuje porovnání počtu událostí způsobených přírodními katastrofami a katastrofami způsobeným vlivem člověka. Z grafu je zřejmý nižší počet přírodních katastrof oproti katastrofám způsobených člověkem. Toto tvrzení platilo do roku 2010, kdy počet přírodních katastrof začal převyšovat katastrofy zapříčiněné člověkem.



Obrázek 2 Přírodní katastrofy a katastrofy způsobené člověkem 1970-2016

Zdroj:vlastní zpracování dle [21]

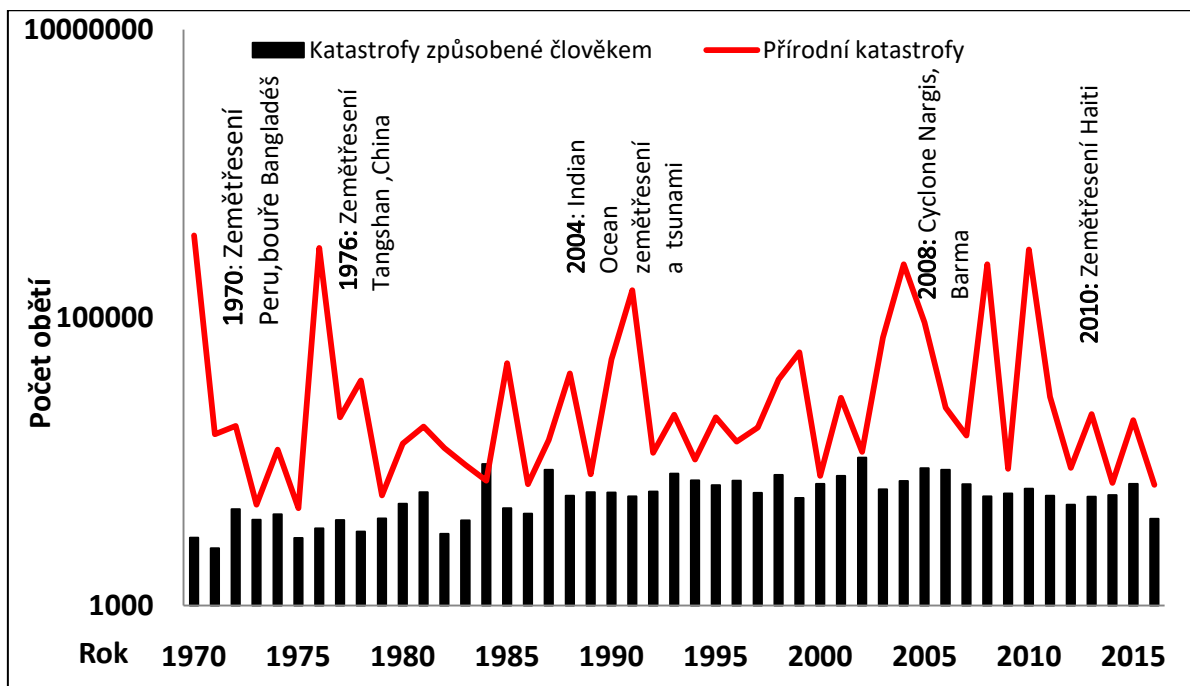
Počet přírodních katastrof v roce 2016 byl třetím největším počtem od roku 1970. Pokles katastrof způsobených člověkem byl zaznamenán v roce 2016 ze 157 katastrof na 136. Za posledních pět let celkový počet škod každý rok přesáhl hranici 300 katastrof. Průměrný počet všech katastrof za období posledních pět let je téměř o 100 katastrof vyšší než průměr

od roku 1970 do konce roku 2016. Průměrný koeficient růstu za období 1970 – 2016 je 0,07099.

1.3 Vývoj počtu obětí

Průměrný počet obětí při extrémní události je 58 845 za rok. Přírodní katastrofy mnohonásobně převyšují ztráty na životech v porovnání s katastrofami zapříčiněnými člověkem. Od roku 1970 pouze 7 katastrof zaznamenalo počet obětí vyšší než 100 000. Graf na obrázku 3 popisuje přehled počtu obětí při katastrofách od roku 1970 – 2016. Nejvíce lidí zahyne při přírodních katastrofách, průměr od roku 1970 je 52 954, při katastrofách zaviněných člověkem dosahuje průměr 5 892 lidských životů.

Počet obětí v roce 2016 byl přibližně 11 000. Došlo k více jak polovičnímu poklesu oproti roku 2015 a tento rok byl třetí nejmenší počet katastrof od roku 1970. Přírodní katastrofy zanechaly 7 000 obětí. Nejvíce se na počtu obětí podepsal hurikán Matthew na Haiti a zemětřesení v Ekvádoru. O něco méně lidských obětí zanechaly katastrofy způsobené člověkem. Podle Swiss Re sigma bylo zaznamenáno 4000 úmrtí. Celkový počet hlášených úmrtí při námořních katastrofách klesl na 1596 z 2487 v roce 2015. Na lodi převážející uprchlíky 3. června u pobřeží Kréty zemřelo 358 lidí. Pád střechy kostela v Nigérii zabil 160 návštěvníků. Téměř poloviční pokles byl také v leteckých událostech, kde z 685 úmrtí v roce 2015 klesl počet úmrtí na 384 v roce 2016. Dvě největší letecké katastrofy se staly na konci roku. V listopadu havarovalo letadlo v Kolumbii a v prosinci spadlo hned po startu letadlo v Rusku. V důsledků požárů a výbuchů zemřelo 766 lidí.



Obrázek 3 Nejtragičtější katastrofické události podle počtu obětí od roku 1970

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

Nejsmrtelnější katastrofy od roku 1970 jsou zvýrazněny na obrázku 3. Těchto pět katastrof přesáhlo hranici 200 000 mrtvých osob.

Rok 1970 v Bangladéši je velmi často spojován s tropickými cyklóny. Propukla zde největší katastrofa co do počtu obětí. Při nejsmrtelnějším tropickém cyklónu nazývaným Bhola zahynulo více jak 370 000 lidí. Meteorologové věděli, co se na území blíží, ale bohužel nebyli schopni do té oblasti informace předat. Vítr přesahoval 225 km/h. Zemětřesení v Číně roku 1976 ve městě Tangshan o síle 7,5 RichtEROVY stupnice bylo od roku 1970 druhou největší katastrofou, která pohřbila přes 300 000 lidí (700 000 zraněných). Zemětřesení oblast zasáhlo v noci. Zničené majetky dosahovaly až do města Peking, které je vzdáleno 110 km. Zemětřesení a následná vlna tsunami v Indickém oceánu v roce 2004 pohřbila okolo 235 000 lidí. V epicentru byla naměřena velikost zemětřesení 9 RichtEROVY škály, vlny dosahovaly až 15 metrů a zanechaly škody v 11 zemích. Bylo to nejhorší zemětřesení za posledních 40 let. Tropický cyklón Nargis (Barma) v roce 2008 nejdříve dosahoval rychlosti větru 160km/h, během tří dnů se síla větru zvýšila až na 217km/h . Tropická bouře po sobě zanechala přes 234 000 lidských obětí. V lednu 2010 pár kilometrů od hlavního města Port au Prince na Haiti bylo zaznamenáno zemětřesení o síle 7 RichtEROVY stupnice. Na pomoci se podílelo mnoho zahraničních nadací, postavily se základní tábory po celé zemi pro přechodné bydlení. Zemětřesením přišlo o život přes 290 000 lidí a okolo 600 000 lidí bylo zraněno. Zhroutila se ekonomika, krajina Haiti byla značně poškozená a politický systém přestal fungovat. [12] [24]

1.4 Vývoj finančních ztrát

Celkové ekonomické ztráty byly v roce 2016 odhadnuty na 175 miliard amerických dolarů, což byl téměř dvojnásobný nárůst od roku 2015. Přírodní katastrofy tvořily většinu finanční ztráty. Ztráta téměř 166 miliard amerických dolarů byla způsobena zemětřesením, tropickými cyklóny, bouřemi a suchem. Nejvíce zasažené oblasti byly v Asii, severní Americe a v Evropě. Člověkem způsobené katastrofy zavinily ztrátu ve výši 9 miliard amerických dolarů, což je pokles z 12 miliard amerických dolarů v předešlém roce. [21]

Tabulka 2 Ekonomické ztráty daných oblastí v roce 2016

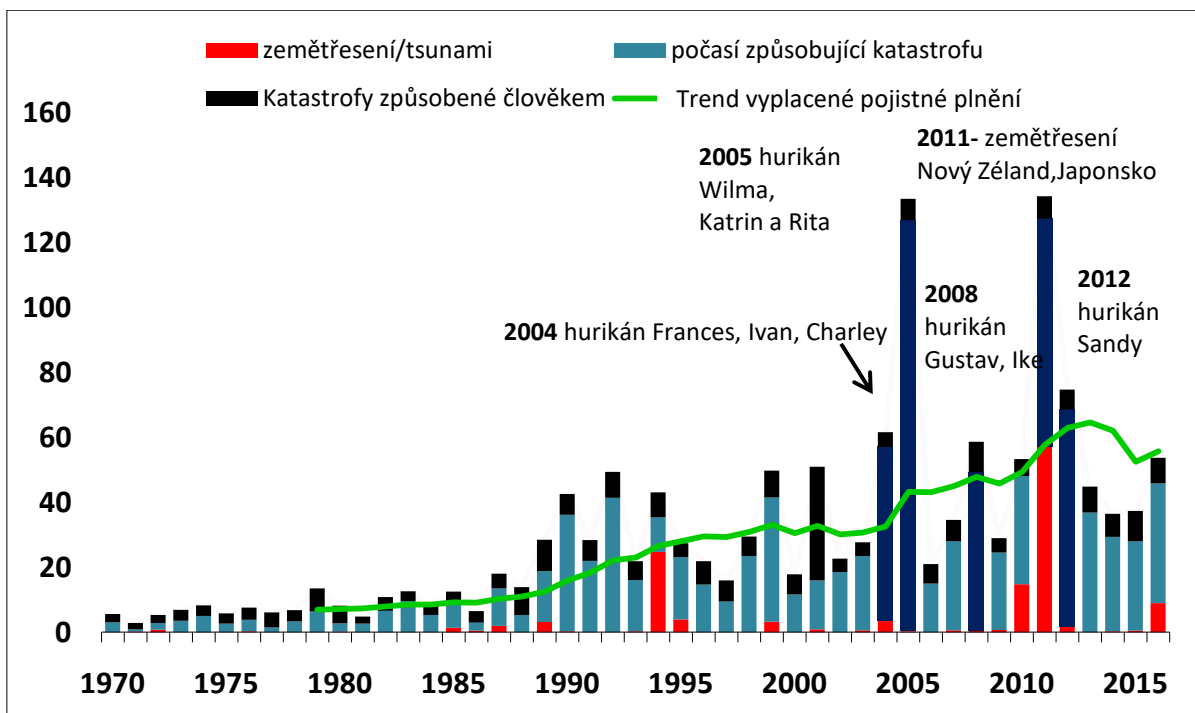
Region - oblast	Ekonomické ztráty v roce 2016 v miliardách amerických dolarů
Asie	83
Severní Amerika	59
Evropa	16
Latinská Amerika a Karibik	6
Oceánie a Austrálie	6
Afrika	3
Moře	1
Celkové ekonomické ztráty	175

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

1.4.1 Vývoj pojistných plnění

Pojišťovny vyplatily na krytí škod v důsledku katastrofických událostí v roce 2016 necelých 54 miliard amerických dolarů, což je pokles téměř o 1/3 oproti předešlému roku. Od roku 1970 je to šesté nejvyšší zaznamenané vyplacené pojistné plnění. Pojišťovny vyplatily 46 miliard amerických dolarů na přírodní katastrofy, což je nárůst od roku 2015 o 20 miliard amerických dolarů. Na katastrofy způsobené člověkem pojišťovny vyplatily 8 miliard amerických dolarů, zde je pokles o 2 miliardy amerických dolarů oproti předešlému roku.

Graf na obrázku 4 znázorňuje vývoj pojištěných katastrofických škod od roku 1970 do roku 2016. Roky vyznačené v grafu byly pro pojišťovny nejvíce finančně nákladné. Pro pojišťovny je velmi důležité sledovat trend, který naznačuje neustálý růst. Modelování důsledků katastrof je vhodné pro zjišťování možného vyplacení pojistných plnění pojišťovnami.



Obrázek 4 Pojištěné katastrofické škody v letech 1970-2016

Zdroj: vlastní zpracování dle[21]

Z obrázku 4 můžeme vidět, že příčinou katastrofických škod byly hurikány či vichřice. Pro pojišťovny byly nejnákladnější tyto katastrofy v jednotlivých letech:

- 2004 hurikán Frances, Ivan, Charley – celkové ekonomické ztráty přesáhly 32 miliard amerických dolarů
- 2005 hurikán Wilma, Katrina, Rita – hurikánové období v Americe způsobilo záplavy v New Orleans (až 80% plochy bylo pod vodou) a značně poškodilo ropné plošiny. Hurikán Katrina se stal jedním z nejsilnějších hurikánů a způsobil celkové pojistné škody přes 80 miliard amerických dolarů. Byla zaznamenána rychlost větru 280km/h, vlny dosahovaly 6 metrů, byla zjištěna kategorie hurikánu pět, počet obětí 1836 a 15 milionů lidí bylo postiženo hurikánem [7]
- 2008 hurikán Gustav, Ike
- 2011 zemětřesení Nový Zéland, Japonsko – tsunami v Japonsku způsobilo zemětřesení o síle 9 Richterovy stupnice. Zapsalo se do povědomí jako druhá nejdražší katastrofa, celkové pojistné ztráty přesáhli 35 miliard amerických dolarů a téměř 20 000 lidí přišlo o život. Velmi zasažena byla jaderná elektrárna Fukušima [17]

- 2012 hurikán Sandy – patří mezi největší hurikány v Atlantickém oceánu. Pojistné ztráty dosáhly výše 35 miliard amerických dolarů, celkové ekonomické škody byly 70 miliard amerických dolarů, 200 lidí přišlo o život, zaznamenaná rychlost hurikánu 150 km/h, zasažena byla oblast Haiti, Kuba a více jak 24 států v USA.

Následující tabulka 3 prezentuje vyplacené pojistné plnění jednotlivých katastrofických událostí v letech 1970 až 2016. Události jsou seřazené od nejdražšího vyplaceného pojistného plnění v miliardách amerických dolarů.

Tabulka 3 Patnáct nejnákladnějších jednotlivých událostí v letech 1970-2016

Rok	Katastrofická událost	Pojištěné ztráty v miliardách USD
2005	hurikán Katrina USA	80,7
2011	zemětřesení Japonsko	37,3
2012	hurikán Sandy USA	30,1
1992	hurikán Andrew USA	27,4
2001	teroristický útok USA	25,5
1994	zemětřesení Northridge USA	24,7
2008	hurikán Ike USA	22,6
2011	zemětřesení NZ	17,0
2004	hurikán Ivan USA	16,4
2011	Silné monzunové deště THA	16,0
2005	hurikán Wilma USA	15,4
1990	zimní bouře ŠVY, GER	14,5
2005	hurikán Rita USA	13,2
2012	sucho USA	11,5
2004	hurikán Charley USA	10,0

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

V roce 2016 dvanáct katastrofických událostí přesáhlo hranici pojistného plnění ve výši 1 miliardy amerických dolarů. Největší pojištěnou ztrátou bylo zemětřesení v období dubna v Japonsku ve výši 4,9 miliardy amerických dolarů. Druhé nejdražší vyplacené pojistné plnění na katastrofické události byly důsledky hurikánu Matthew v USA a Karibiku, kde pojištěné ztráty dosáhly 4 miliardy amerických dolarů. Třetí nejnákladnější katastrofickou událostí byly záplavy v Luisianě.

Pojištěné ztráty podle regionů:

- Severní Amerika 30,4 miliard USD
- Asie 8,8 miliardy USD
- Evropa 7,5 miliardy USD
- Oceánie a Austrálie 3,4 miliardy USD
- Afrika 1,7 miliardy USD
- Latinská Amerika a Karibik 1,4 miliardy USD
- Moře 0,5 miliardy USD

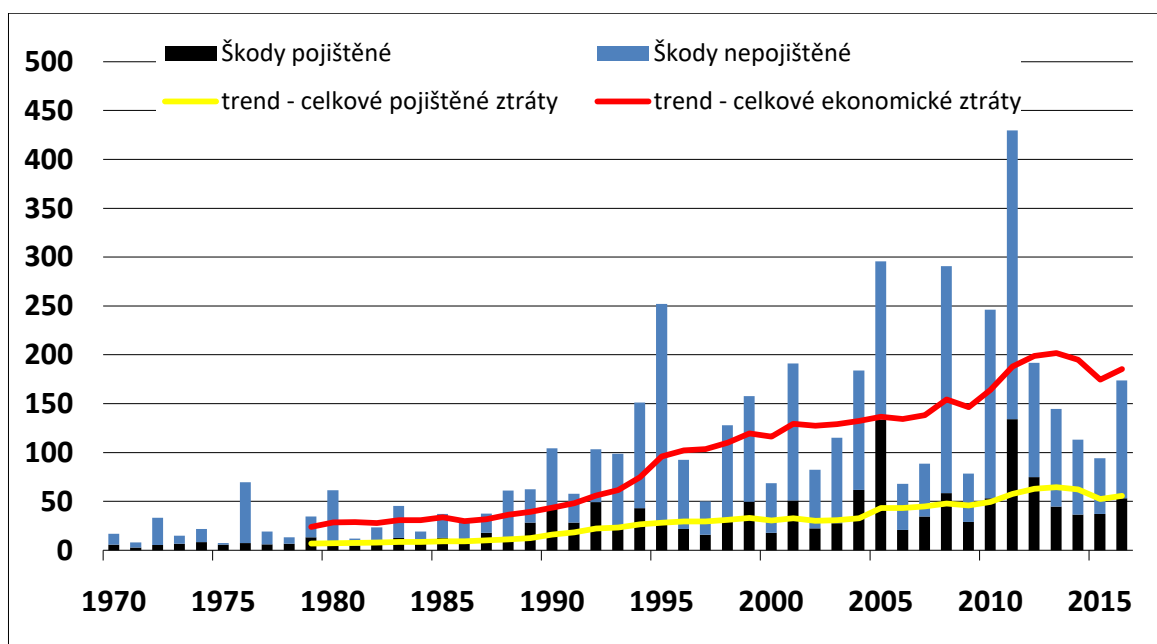
Tabulka 4 zobrazuje sedm katastrofických událostí, které přesáhly hranici 2 miliard amerických dolarů vyplaceného pojistného plnění.

Tabulka 4 Sedm nejnákladnějších pojistných událostí v roce 2016

Vyplacené pojistné – v miliardách USD	Katastrofická událost	Země
4,9	zemětřesení	Japonsko
4,0	hurikán Matthew	USA
3,1	silné bouře a záplavy v Louisianě	USA
3,0	těžká krupobití v San Antoniu	USA
2,9	bouře a záplavy	Německo, Francie
2,8	požáry	Kanada
1,7-2,4	zemětřesení	Nový Zéland

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

Graf na obrázku 5 ukazuje rozdíl mezi pojištěnými a nepojištěnými škodami v období 1970 – 2016. Rozdíl mezi pojištěnými a nepojištěnými škodami v roce 2016 byl téměř 121 miliard USD. Z grafu je jednoznačný rostoucí trend celkových ekonomických ztrát, u trendu pojištěných ztrát trend není tak velké výrazný. Diference mezi těmito dvěma trendy se stále zvyšuje. Důsledkem propasti mezi pojištěnými a nepojištěnými ztrátami může být vznik katastrofických událostí na místech, kde se žádná katastrofa nepředpokládala, vznik událostí v chudých oblastech Střední Ameriky nebo v Asii.



Obrázek 5 Pojištěné a nepojištěné škody v období 1970 - 2016

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

Ekonomické ztráty na obrázku 5 představují pojištěné i nepojištěné ztráty. Ceny jsou v miliardách USD uvedeny podle roku 2016. (Poznámka: všechny peněžní hodnoty se přepočítávají každý rok podle inflace).

V tabulce 5 jsou shrnuty všechny základní údaje o roku 2016.

Tabulka 5 Celkové shrnutí údajů v roce 2016

2016	Celkem	Způsobené přírodou	Způsobené člověkem
Katastrofická událost	327	191	136
Oběti	10 898	6 884	4 014
Pojistná plnění	53 741 000	45 944 000	7 797 000
Způsobené škody	174 514 000 000	165 591 000	8 923 000

Zdroj: vlastní zpracování

1.5 Důsledky katastrofických událostí pro pojistné trhy

Tato kapitola nám přiblíží význam zajištění při katastrofických událostech.

Definice: Zajištění je převod části rizika, které pojistitel převzal od pojištěných, na jiné organizátory nositelů rizik, kteří nemají k pojištěným žádný smluvní vztah. [3]

Vznik katastrofické události nemá negativní vliv jenom na zasažené území, ale ovlivní také hospodářství v celé zasažené oblasti, popřípadě ovlivní celý svět (například poškození

ropné plochy). V dnešní době pojišťovny a zajišťovny přebírají rizika z celého světa. Pro krytí katastrofických událostí je třeba zajistit dostatek finančních prostředků a zajistit stabilitu pojišťovny i zajišťovny po vzniku škodné události.

V poslední době se trh v oblasti katastrofického pojištění mění. Především větší zájem lidí o majetkové pojištění v případě přírodních katastrof má vliv na pojišťovny a zajišťovny. Pojistitelé se více zabývají hledáním nejlepších možných prostředků pro zajištění. Celosvětově roste poptávka po zajištění. Pro pojišťovny je velmi klíčové řešení zajištění vzniklých katastrof. [20]

Pro správné pochopení této kapitoly o zajištění je důležité rozumět všem základním pojmům.

- Druh zajištění
 - obligatorní – zajistná smlouva je vytvořena pro skupinu portfolia pojistných smluv
 - fakultativní – prvopojistitel a zajistitel sjednává pojistné smlouvy individuálně.
- Typ zajištění
 - proporcionalní – prvopojistitel a zajistitel se v daném poměru dělí o pojistné, pojistnou částku a pojistné plnění
 - neproporcionalní – při přesáhnutí sjednané priority prvopojistitele zajistitel převezme za předem daných podmínek část pojistného plnění za prvopojistitele
- Prvopojistitel – pojistitel, který převede část rizika na zajistitele
- Zajistitel – subjekt, který převezme část rizika již pojištěného pojistitelem
- Zajistné – prvopojistitel platí zajistiteli pojistné za zajistnou ochranu
- Cese – převod rizika na zajistitele
- Kapacita – objem rizik, který je schopen pojistitel maximálně pojistit
- Limit – část pojištěného rizika, kterou zajistitel převezme. [3]

1.5.1 Neproporcionalní zajištění

Neproporcionalní zajištění je často využíváno v neživotním pojištění. K plnění zajistitele dochází v případě, kdy škoda přesáhne prioritu v uzavřené zajistné smlouvě. Prvopojistitel uzavře se zajistitelem pojistnou smlouvu, kde předem stanoví prioritu. Zajistná smlouva se

nejčastěji uzavírá na jeden rok. Maximální část vzniklé katastrofické události (škody), kterou hradí prvopojistitel, se říká prioritou. Prvopojistitel může sjednat více vrstev se zajistiteli. Přesahuje-li maximální část vzniklé škody prioritou prvopojistitele, část škody nad prioritou je hrazena zajistitelem, který nazýváme vrstva (layer). Při správném uspořádání všech vrstev může dojít k celkovému snížení ceny zajištění. Vrstvy můžeme rozdělit na spící vrstvy (malá pravděpodobnost výskytu událostí vyšší vrstvy) a pracovní vrstvy (vyšší frekvence škod nižší vrstvy). Priorita zajištění neproporcionálního typu je sjednána pro pojistné smlouvy jednotlivě (WXL/R), v případě katastrofických událostí se sečtou škody pro pojistné smlouvy portfolia stejné škodné události (CatXL zajištění a WXL/E) nebo v případě celoročního objemu škod (SL zajištění). [3]

CatXL

CatXL zajištění se využívá při škodní události která má katastrofický charakter. Můžeme se setkat s názvem zajištění škodního nadměrku katastrofické události. Dochází k náhodné kumulaci škod (povodeň, bouře, zemětřesení a jiné). Škodní událost v tomto CatXL zajištění je velmi důležité správně specifikovat. Důležité zohlednění je především u prostorové souvislosti a časové souvislosti. Nedá se u každé události jednoznačně říci, co ji zapříčinilo, a proto rozlišuje některé charaktery:

- geologický a tektonický – zemětřesení, vulkanický výbuch
- meteorologický charakter – bouře
- technický – požár
- a jiné...

V případě přírodní katastrofy kdy dochází k časovému intervalu, jsou kryty škodní události podle n-hodinové klauzule. Škody mají daný časový limit, ve kterém dochází ke kumulaci katastrofické události a následnému vyplacení. [3]

Tabulka 6 n-hodinová klauzule

Čas v hodinách	Událost
48 h	hurikán
72 h	zemětřesení
168 h	povodně, záplavy

Zdroj: vlastní zpracování dle [3]

Jestliže kumulace škod překročí limit v tabulce 6, tak nedojde k vyplacení. CatXL zajištění má prioritu danou na tak vysoké hranici, aby na ní dosáhla jen kumulativní katastrofická škoda.

Umbrella Cover

Principem zajištění Umbrella Cover je kumulace škod vznikem jedné katastrofické události. Příkladem může být hurikán, který zasáhl osídlenou část státu (město) a vznikne zde kumulace škod v různých odvětvích pojištění (životní, požární, úrazové, havarijní a podobně). Forma Umbrella Cover pro efektivnější zajištění vyžaduje individuální krytí jednotlivých odvětví zajištěných CatXL. Priorita je nastavena tak vysoko, aby k jejímu přesazení došlo při zásahu minimálně ve dvou odvětvích při vzniku katastrofické události. [20]

1.5.2 Katastrofické dluhopisy

Rizika způsobená katastrofickými událostmi jsou příliš velká, aby je byl schopen pojistný trh krýt. Dochází k přenosu rizik na jiné subjekty. Využití katastrofických dluhopisů patří v pojišťovnictví k nástrojům sekuritizace pojistných rizik. Přenos rizik na kapitálový trh, který je mnohem větší než pojistný trh, nám zajistí katastrofické dluhopisy. První katastrofické dluhopisy vydala pojišťovna AIG a zajišťovna Hannover Re na začátku devadesátých let. [3]

V dnešní době stále více pojišťoven využívá katastrofických dluhopisů k diverzifikaci a ke zvyšování finanční flexibility. Pojišťovny a zajišťovny pomocí emitenta vydávají na trh s cennými papíry katastrofické dluhopisy. V nejčastějších případech pojišťovny využívají speciálně vytvořené subjekty, které zrealizují celou transakci.

- Specializovaný subjekt, který vydá katastrofický dluhopis na určitý druh katastrofy v určité oblasti, se domluví s pojišťovnou na výšce vyplacení v případě vzniklé katastrofické škody.
- Emitent katastrofického dluhopisu přijímá pravidelné částky od pojišťovny za převzetí rizika.
- Investoři nakupují katastrofické dluhopisy od emitenta, kterému zaplatí nominální hodnotu dluhopisu.
- Emitent získané prostředky zhodnocuje. Své prostředky vkládá do depozitní banky. Výnos z investovaných prostředků mu banka vyplácí ve výši úrokové sazby.

Prémie a výnosy z investic jsou použity na výplatu investorům, kteří nakoupili katastrofické dluhopisy.

Výhodou zajištění pomocí katastrofických dluhopisů je poskytnutí dlouhodobé ochrany za předem stanovenou cenu. Pro investory je velmi motivující investovat do katastrofických dluhopisů díky vyšší výnosnosti oproti jiným dluhopisům. Při zařazení těchto dluhopisů do svého investičního portfolia investor snižuje rizikovost svého portfolia. Na druhé straně stojí velmi vysoké transakční náklady. [3] [20]

Klasické zajištění je stále více využíváno oproti katastrofickým dluhopisům, které jsou jednou z možností, jak zajistit pojistitelnost katastrofických rizik. Katastrofické dluhopisy mají nákladné transakce a je zde přísný dohled nad sektorem pojišťovnictví. Vyšší úroky z katastrofických dluhopisů jsou u dluhopisů, které se zaměřují na určitou oblast. Zde je snadnější předvídat vývoj katastrofy. Na trhu se obchoduje s katastrofickými dluhopisy, které jsou předem definované. Malý zájem je o dluhopisy s neznámými oblastmi. V dnešní době především velké celosvětové firmy již čím dál tím více využívají katastrofických dluhopisů. Do budoucna se předpokládá stálý nárůst využívání katastrofických dluhopisů. [20]

2 METODY MODELOVÁNÍ EXTRÉMNÍCH POJIŠTĚNÝCH ŠKOD

Pro pojišťovny jsou potřebné informace, které uvádějí počty škod a výše škod v daném pojistném kmeni. Tyto informace slouží pojišťovně při stanovení pojistného. Teorie rizika se zabývá problémem malého počtu reálných dat. Pomocí modelů pojišťovny mohou určit náklady a předpokládané pojistné plnění. Využívají statistických testů a matematických vztahů. Na výši pojistného se podílí způsobené riziko (škoda). [1]

Teorie pravděpodobnosti nám při výskytu pojistné události, která spadá do velkého pojistného kmene, může odhalit určité zákonitosti. Pojistná událost je jev náhodný. Může nastat, ale nemusí. Náhodné veličiny se rozdělují na diskrétní a spojité. Při výpočtech využíváme rozdělení pravděpodobnosti nebo používáme popisné statistiky (modus, medián, kvartil, rozptyl).

Neznámé parametry pro modelování výše a počtu škod musíme odhadnout matematicko - statistickými metodami. Pro rozdělení počtu škod využíváme nejčastěji binomické rozdělení, Poisonovo a negativně binomické rozdělení. Metoda maximální věrohodnosti nám pomůže při odhadu neznámých parametrů. Zda jsme vybrali správné rozdělení, k tomu nám poslouží testy dobré shody (Kolmogorův - Smirnov test, Pearsonův χ^2 test). [14]

Pro modelování katastrofických událostí hledáme nejvhodnější pravděpodobnostní rozdělení, které je pravostranně asymetrické. Hustota pravděpodobnosti pomalu konverguje k nule. Mezi vhodná rozdělení patří gama, lognormální a hlavně Paretovo rozdělení. V některých případech i tyto klasická rozdělení selhávají. K využití použijeme rozdělení, která jsou takzvaně nad prahovou hodnotou (zobecněné Paretovo rozdělení, Benktanderovo pravděpodobnostní rozdělení). [18] [14]

2.1 Pravděpodobnostní modely

V tomto případě budeme využívat spojitá rozdělení (pravostranně asymetrické) pro vhodné modelování výše škod. Výše škod zde představuje náhodnou veličinu, škoda nabývá kladných hodnot a v případě pojištěné věci je škoda shora omezena.

2.1.1 Rozdělení gama $\Gamma(a;b)$

Je obecnější tvar exponenciálního rozdělení, který má navíc jeden parametr. S parametry (a, b) se řadí mezi dvouparametrické rozdělení.

$$X \sim \Gamma(a; b) \quad (2.1)$$

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \quad (2.2)$$

kde $x \geq 0$ a $\Gamma(a)$ je gama funkce:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2.3)$$

$$E(X) = \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

$$D(X) = \frac{a}{b^2} \quad (2.5)$$

kde: X ...výše škod

a, b ...parametry

$f(x)$...hustota rozdělení

$E(X)$...střední hodnota

$D(X)$...rozptyl

Pokud parametr $a=1$, říkáme, že gama rozdělení přechází do exponenciálního pravděpodobnostního rozdělení. Chí-kvadrát rozdělení nastává v případě, kdy pro parametry platí [14]:

$$a = \frac{n}{2} \text{ a } b = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

2.1.2 Rozdělení lognormální $LN(\mu, \sigma^2)$

Dvouparametrické kladně zešikmené rozdělení s parametry μ, σ^2 nejčastěji využívané při živelném pojištění (požár, vichřice), v havarijním pojištění nebo úrazovém pojištění. Nízké hodnoty náhodné proměnné, stejně jako vysoké hodnoty náhodné proměnné jsou málo pravděpodobné. Nejpravděpodobnější jsou hodnoty středně vysoké.

Lognormální rozdělení označujeme:

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2), \text{ kde } -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \quad (2.7)$$

a platí

$$\ln X \sim N(\mu; \sigma^2) \quad (2.8)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ pro } x > 0 \quad (2.9)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx, & \text{pro } x > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.11)$$

$$D(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2} \quad (2.12)$$

kde X ...výše škod

μ, σ ...parametry

$f(x)$...hustota rozdělení

$F(x)$...distribuční funkce log-normálního rozdělení

$E(X)$...střední hodnota

$D(X)$...rozptyl

2.1.3 Rozdělení Weibullovo $W(\gamma, c)$

Dvouparametrické rozdělení s $\gamma > 0, c > 0, x > 0$, modeluje malá pojistná plnění s pravděpodobností nízkou a plnění středně vysoké s velkou pravděpodobností. Neživotní pojištění v modelování výše škod pracuje s parametrem γ , parametr může nabývat hodnoty $0 < \gamma < 1$. Toto rozdělení využijeme v modelování vyššího pojistného plnění s velmi nízkou pravděpodobností. Hustota leží na pravé straně mezi Paretovým rozdělením a exponenciálním rozdělením. [14]

$$X \sim W(\gamma; c) \text{ pro } \gamma > 0, c > 0, x > 0 \quad (2.13)$$

$$f(x) = c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma}, \text{ pro } c, \gamma, x > 0 \quad (2.14)$$

$$F(x) = 1 - e^{-cx^\gamma} \quad (2.15)$$

$$E(X) = c^{-\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.16)$$

$$D(X) = c^{-\frac{2}{\gamma}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.17)$$

kde: X ...výše škod

γ, c ...parametry

$f(x)$...hustota rozdělení

$F(x)$...distribuční funkce Weibullova rozdělení

$E(X)$...střední hodnota

$D(X)$...rozptyl

2.2 Rozdělení Pareto Pa(a,b)

Paretovo pravidlo je pojmenováno podle italského ekonoma Vilfreda Pareta. Paretovo pravidlo lze obecně vyjádřit tak, že 20 % příčin způsobuje 80 % výsledků. [16]

Využívá se při extrémních situacích, jelikož velkým hodnotám s velmi nízkou pravděpodobností jsou přiděleny větší váhy než v jiném rozdělení. Výhodou rozdělení je pomalé konvergování k nule. Setkáme se s tímto rozdělením u pojištění požárního, kde dochází ke zničení zděných budov nebo v pojištění nemocenském.

Paretovo rozdělení má dva tvary - americký tvar a evropský tvar rozdělení. V této práci se budeme věnovat pouze evropskému tvaru Paretova rozdělení.

2.2.1 Rozdělení Pareto – evropský tvar

Dvouparametrické rozdělení $Pa(a,b)$ pro nejvyšší hodnoty pojistného plnění. Pravděpodobnostní rozdělení nezačíná v nule. Charakteristika rozdělení [16]:

$$X \sim Pa(a, b), \text{ kde } a > 0, b > 0 \quad (2.18)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x > a \quad (2.19)$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x > a \quad (2.20)$$

Hustotu Paretova rozdělení dostaneme derivací funkce distribuční. Náhodná veličina X má Paretovo evropské rozdělení, jestliže platí:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{ba^b}{x^{b+1}} \text{ pro } x > a, a > 0, b > 0 \quad (2.21)$$

$$E(X) = \frac{ba^2}{a-1} \text{ pro } b > 1 \quad (2.22)$$

$$D(X) = \frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)} \text{ pro } b > 2 \quad (2.23)$$

kde X ...náhodná proměnná

a, b ...parametry

$F(x)$...distribuční funkce Paretova rozdělení

$f(x)$...hustota rozdělení

$E(X)$...střední hodnota

$D(X)$...rozptyl

2.3 Grafická analýza dat

V této části budou popsány grafické metody zobrazování analyzovaných dat, které slouží k optickému posouzení vybraného modelu.

- **Q-Q graf**

Quantile – Quantile plot podle anglického názvu umožňuje opticky posoudit, zda analyzovaná data pocházejí ze zkoumaného rozdělení. Tento kvantilový graf slouží k posouzení shody, teoretického a empirického rozdělení. Empirické rozdělení v Q-Q grafu je popsáno empirickou kvantilovou funkcí a srovnáno s kvantilovou funkcí zvoleného teoretického rozdělení.

Q-Q graf má na svislé ose uspořádané hodnoty $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ a vodorovnou osu tvoří kvantily teoretického rozdělení. Při záměně os je důležité vědět, která osa co znamená. Na jedné ose jsou hodnoty reálné, seřazené dle velikosti. Na druhé ose jsou hodnoty předpokládané. Body zanesené v grafu jsou proloženy přímkou. Zda data pocházejí ze zvoleného rozdělení, poznáme z přímkou, na které body leží. U vhodně zvoleného modelu body leží na přímce nebo v těsné blízkosti. Jestliže se body od přímky v grafu vzdalují, musíme zvolit jiné pravděpodobnostní rozdělení.

Kvantilový Q-Q graf je tvořen těmito body:

$$\left\{x_{(k)}F^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)\right\} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

jestliže je uspořádaný náhodný výběr $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ s náhodnými veličinami X_1, X_2, \dots, X_n a s distribuční funkcí F .

- **Histogram**

Je sloupcový graf, podle kterého můžeme odhadnout tvar rozdělení analyzovaných dat. Sloupce představují četnosti hodnot, které jsou zaznamenány na ose y . Na ose x jsou zaznamenány roztríděné hodnoty proměnné X .

- **Graf časové řady**

Tento graf nám může přiblížit, kdy extrémní hodnoty nastaly. Při shluku extrémních hodnot v kratším časovém období dojde k porušení identického rozdělení a předpokladu nezávislosti náhodného výběru.

2.4 Testy dobré shody

Pro zjištění shody zvoleného rozdělení pravděpodobnosti s empirickým rozdělením testovaných dat využijeme testy dobré shody. K ověření správně zvoleného pravděpodobnostního rozdělení využijeme hlavně:

- Kolmogorovův - Smirnovův test dobré shody
- Pearsonův χ^2 test dobré shody. [14]

2.4.1 Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody

Kolmogorov – Smirnovův test označován (K-S test) je využíván při malém rozsahu n empirického souboru. Dojde-li k možnosti využití Pearsonův χ^2 test dobré shody i K-S testu, využívá se Kolmogorovův-Smirnovův test, který má vyšší sílu testu, resp. pravděpodobnosti zamítnutí nesprávné nulové hypotézy. Hypotézy mají tvar:

H_0 : náhodná proměnná X má pravděpodobnostní rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$

H_1 : náhodná proměnná X nemá pravděpodobnostní rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$

Při testování se vychází ze vzestupně uspořádaných netříděných údajů $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Pro takto uspořádaný výběrový soubor je definována empirická distribuční funkce:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq x_1 \\ \frac{i}{n}, & \text{pro } x_{(i)} < x \leq x_{(i+1)} \quad i=1,2,\dots,n-1 \\ 1, & \text{pro } x > x_n \end{cases} \quad (2.25)$$

Testovací kritérium má tvar:

$$d_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (2.26)$$

Nulová hypotéza H_0 je přijata na hladině významnosti α za předpokladu $d_n < d_{n;1-\alpha}$, při čemž kvantil pravděpodobnostního rozdělení testovacího kritéria d_n je $d_n < d_{n;1-\alpha}$. [14]

2.4.2 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Pro testování pomocí toho testu je zapotřebí velký rozsah n výběrového souboru. Při testování zamítneme nulovou hypotézu H_0 , nebo nulovou hypotézu H_0 přijmeme.

H_0 : náhodná proměnná X má pravděpodobnostní rozdělení s hustotou $f(x; \Theta)$

H_1 : náhodná proměnná X nemá pravděpodobnostní rozdělení s hustotou $f(x; \Theta)$

Tvar testovacího kritéria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (2.27)$$

Empirické údaje náhodné proměnné X x_1, x_2, \dots, x_n jsou roztrženy do k skupin s četnostmi O_1, O_2, \dots, O_k . Testovací kritérium χ^2 má chí – kvadrát pravděpodobnostního rozdělení s $k-1-p$ stupni volnosti, kde p představuje počet odhadnutých parametrů rozdělení.

Nulová hypotéza se nezamítá, pokud hodnoty χ^2 nepadnou do kritické oblasti

$$W = \{\chi^2: \chi^2 > \chi_{1-\alpha; k-1-p}^2\}. \quad [14]$$

3 SIMULACE EXTRÉMních POJIŠTĚNÝCH ŠKOD

Pro simulaci extrémních hodnot budeme využívat metodu kvantilového modelování, využívající kvantilové funkce a teorii pořádkových statistik. Tato metoda patří k méně využívaným způsobem pravděpodobnostního modelování a její rozvoj je patrný především v posledních třech desetiletích. Je paradoxní, že první zmínky empirické kvantilové funkce pocházejí již z roku 1875. Graf znázorňující vzestupné uspořádání výšky mužů proti jejich proporcionálnímu postavení v souboru uveřejnil F. Galton. Avšak o pár let později statistická teorie zaznamenává rozvoj hlavně v souvislosti s využitím normálního rozdělení a momentových statistických charakteristik, na kterém se podílí hlavně K. Pearson. Galtonova kvantilová funkce nebyla využívána až do roku 1940, kdy pojem kvantil byl znovu zaveden M. G. Kendalem. Pojem kvantilové funkce pro definování tvaru pravděpodobnostního rozdělení jako první použil E. Parzen v roce 1979. [19]

3.1 Kvantilový model

Kvantilový model umožňuje najít pravděpodobnostní rozdělení spojité náhodné proměnné v základním souboru, korespondující s vlastnostmi výběrového souboru. Používá se při modelování pravděpodobnostního rozdělení spojité náhodné proměnné v případě, kdy pomocí klasické metody (příkladem je test dobré shody) nenajdeme vhodný tvar distribuční funkce nebo funkce hustoty. Výhodné vlastnosti kvantilových funkcí umožňují při dodržení určitých základních pravidel upravovat a kombinovat tyto funkce tak, aby výsledný tvar byl znovu kvantilovou, tedy neklesající funkcí, se statisticky interpretovatelnými parametry. [6]

Rozdělení spojité náhodné proměnné X vyjadřujeme ve tvaru distribuční funkce $F(x)$, definované vztahem:

$$F(x) = P(X \leq x) = p \quad (3.1)$$

nebo funkcí hustoty $f(x)$ - představuje derivace $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.2)$$

Kvantilová funkce $Q(p)$ je méně častý způsob definování rozdělení pravděpodobnosti. Je definována pro každé reálné p , $0 \leq p \leq 1$, resp. pro každou hodnotu pravděpodobnosti p vztahem

$$Q(p) = x \quad (3.3)$$

příčemž libovolné pravděpodobnosti p přiřadí právě tu hodnotu x náhodné proměnné X , pro kterou platí vztah (2.29). Pro tuto hodnotu x se používá označení x_p a nazýváme ji p - kvantil. [9]

Kvantilová funkce $Q(p)=x_p$ je neklesající funkcí p a inverzní funkce k distribuční funkci $F(x)$.

Funkci hustoty dostaneme pomocí derivace distribuční funkce $F(x)$ podle x a derivováním $Q(p)$ podle p získáme kvantilovou funkci hustoty:

$$q(p) = \frac{dQ(p)}{dp} \text{ pro } 0 \leq p \leq 1 \quad (3.4)$$

Platí, že $Q(p)$ je neklesající funkcí p , pak její derivace $q(p)$ je nezáporná funkce pro $0 \leq p \leq 1$.

Kvantilové rozdělení je vyjádřené formou kvantilové distribuční funkce a kvantilové funkce hustoty. [9]

3.1.1 Pořádková statistika

Pro uspořádaný náhodný výběr používáme označení $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(r)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)}$. Příslušné náhodné proměnné označujeme jako $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(n)}$ a nazýváme uspořádané (pořádkové) statistiky.

$X_{(n)}$ je náhodná proměnná, která představuje nejvyšší zjištěnou hodnotu ve výběrovém souboru rozsahu n . Pokusíme se najít její kvantilové rozdělení a vyjádřit jej pomocí známé kvantilové funkce $Q(p)$. [8]

Distribuční funkce proměnné $X_{(n)}$ je definována vztahem $F_{(n)}(x) = p_{(n)}$. Zřejmě platí:

$$F_{(n)}(x) = p_{(n)} = P(X_{(n)} \leq x) \quad (3.5)$$

a je to i pravděpodobnost, ze všech n pozorování náhodné veličiny X je menších, nanejvýš rovných hodnotě x . Protože tato pravděpodobnost je pro každou proměnnou rovná právě p , podle pravidla o násobení pravděpodobností platí

$$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{p}^n, \text{ pak } \mathbf{p} = \mathbf{p}_{(n)}^{\frac{1}{n}} \text{ a } F(x) = \mathbf{p} = \mathbf{p}_{(n)}^{\frac{1}{n}} \quad (3.6)$$

Protože x vyjadřuje inverzní funkci nejen k $F_{(n)}(x)$ ale také i k $F(x)$, dostáváme důležitý vztah

$$\mathbf{Q}_{(n)}(\mathbf{p}_{(n)}) = \mathbf{Q}\left(\mathbf{p}_{(n)}^{\frac{1}{n}}\right) \quad (3.7)$$

Náročnější je výpočet kvantilové funkce pro libovolnou r -tou uspořádanou statistiku $X_{(r)}$. Distribuční funkce proměnné $X_{(r)}$ vyjadřuje vztah

$$\mathbf{p}_{(r)} = F_{(r)}(z) = \mathbf{P}(X_{(r)}) \leq z \quad (3.8)$$

To je i pravděpodobnost toho, že nejméně r nezávislých pozorování je menších, nanejvýš rovných hodnotě z . Pravděpodobnost toho, že právě s pozorování je menších nebo rovných z , vyjadřuje binomická formule

$$\mathbf{P}(s \text{ pozorování } \leq z) = \binom{n}{s} \mathbf{p}^s (1 - \mathbf{p})^{(n-s)} \quad (3.9)$$

kde $\mathbf{p} = F(z)$. Pak platí:

$$\mathbf{p}_{(r)} = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} \mathbf{p}^s (1 - \mathbf{p})^{(n-s)} \quad (3.10)$$

Tato funkce představuje neúplnou funkci beta a označíme ji jako

$$\mathbf{p}_{(r)} = \mathbf{I}(\mathbf{p}, r, n - r + 1). \quad (3.11)$$

Najdeme li k ní funkci inverzní, můžeme psát

$$\mathbf{p} = \mathbf{BETAINV}(\mathbf{p}_{(r)}, r, n - r + 1). \quad (3.12)$$

Z posledních dvou rovnic získáváme důležitý výsledek:

$$(\mathbf{Q}_{(r)})(\mathbf{p}_{(r)}) = \mathbf{Q}\left(\mathbf{BETAINV}(\mathbf{p}_{(r)}, r, n - r + 1)\right) \quad (3.13)$$

známý jako *pravidlo rozdělení pořádkových statistik*.

Kvantily pořádkových statistik můžeme tedy vyjádřit přímo ze známé kvantilové funkce $Q(p)$, jelikož $\mathbf{BETAINV}()$ je standardní funkce MS Excel. [18]

Například pro $p_{(r)} = 0,5$ bude $Q(BETAINV(0,5, r, n - r + 1))$ medián r -té pořádkové statistiky, 99-ty percentil pořádkové statistiky $X_{(r)}$ dostaneme jako $Q(BETAINV(0,99, r, n - r + 1))$ apod.

3.2 Teoretický popis metod simulace

Statistické programy společně s tabulkovými procesory nám umožňují generování náhodných čísel. Generovaná náhodná čísla jsou z intervalu $[0,1]$ a reprezentují náhodná pozorování ze spojitého rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti na tomto intervalu. Kvantilovou funkci rovnoměrného rozdělení intervalu $[0,1]$ vyjádříme:

$$S(p) = p, \text{ pro } 0 \leq p \leq 1 \quad (3.14)$$

Pomocí generátoru náhodných čísel můžeme generovat nezávislé hodnoty u_1, u_2, \dots, u_n z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Takto generovaná náhodná čísla a jejich použití v pravděpodobnostním modelu libovolného typu nazýváme *simulace*. Základem takové simulace je následující *pravidlo Q-transformace*:

Jestliže $z = T(x)$ je neklesající funkcí x a $Q(p)$ je kvantilová funkce, potom $T(Q(p))$ je rovněž kvantilová funkce.

Pokud je neklesající funkcí $T(x)$ kvantilová funkce $Q(p)$ libovolného rozdělení, aplikací pravidla Q-transformace pro případ kvantilové funkce rovnoměrného rozdělení $S(p) = p$ můžeme simulovat hodnoty x z rozdělení s kvantilovou funkcí $Q(p)$ jako

$$x_i = Q(u_i), \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

kde u_1, u_2, \dots, u_n představují hodnoty simulované z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0,1]$. Dosazením u_i do kvantilové funkce $x = Q(u)$ získáme uspořádané hodnoty $x_{(i)}$, což zaručuje neklesající tvar kvantilové funkce.

V mnoha aplikacích metod simulace pomocí kvantilových funkcí se pozornost soustřeďuje hlavně na extrémní pozorování z konce rozdělení. Kvantilová funkce má kromě jiných i tu výhodnou vlastnost, že umožňuje simulovat pouze nejvyšší hodnoty, aniž bychom simulovali centrální hodnoty náhodné veličiny.

Předpokládejme pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. Ukázali jsme, že rozdělení pravděpodobnosti nejvyšší pozorované hodnoty můžeme vyjádřit ve tvaru $Q(p^{1/n})$. Tedy nejvyšší pozorovanou hodnotu můžeme simulovat jako $x_{(n)} = Q(u_{(n)})$, kde $u_{(n)} = v_n^{1/n}$,

přičemž v_n je náhodné číslo z intervalu $[0,1]$. Pokud nyní definujeme posloupnost transformovaných proměnných ve tvaru [13]

$$\mathbf{u}_{(n)} = \mathbf{v}_n^{\frac{1}{n}} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}_{(n-1)} = (\mathbf{v}_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \mathbf{u}_{(n)} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u}_{(n-2)} = (\mathbf{v}_{n-2})^{\frac{1}{n-2}} \mathbf{u}_{(n-1)} \quad (3.18)$$

⋮

Kde v_i , pro $i = n, n - 1, n - 2, \dots$ představuje množinu vygenerovaných hodnot jako náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení. Pak hodnoty $\mathbf{u}_{(i)}$, pro $i = n, n - 1, n - 2, \dots$ dle jejich definice tvoří rostoucí posloupnost:

$$\mathbf{u}_{(i-1)} < \mathbf{u}_i \quad (3.19)$$

Vztah pro simulaci má jednotnou formu:

$$\mathbf{u}_{(m)} = (\mathbf{v}_m)^{\frac{1}{m}} \mathbf{u}_{(m+1)}, \text{ pro } m = n - 1, n - 2, \dots \quad (3.20)$$

Pořádkové statistiky pro největší pozorování proměnné X jsou pak simulovány jako:

$$\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{(n)}) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{x}_{(n-1)} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{(n-1)}) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{x}_{(n-2)} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{(n-2)}) \quad (3.23)$$

⋮

Ve většině případů simulací se generuje m vzorků s n pozorováními a induktivní analýza, m -krát opakovaná, poskytuje obraz jejich chování. Někdy se využívá alternativní technika, pomocí které generujeme jen jeden výběr ideálních pozorování, který voláme *profil*. Takové ideální pozorování můžeme získat například použitím mediánových hodnot M_r , pro $r = 1, 2, \dots, n$. [18] [15]

4 APLIKACE METOD MODELOVÁNÍ A SIMULACE EXTRÉMNÍCH POJIŠTĚNÝCH ŠKOD

Tato kapitola se zaměří na samotnou aplikaci metod, které byly popsány v předchozí kapitole. Pro modelování byl využit statistický program Statgraphics Centurion XVII, který je dostupný ke stažení na (<http://www.statgraphics.com/centurion-xvii>).

Tabulka 7 Data 40 nejvýše pojištěných ztrát

80 699	25 456	16 417	13 199	8 852	7 789	6 388	5 502	4 555	4 000
37 344	24 773	16 005	11 498	8 804	7 522	6 062	4 895	4 259	3 954
30 141	22 577	15 447	10 033	8 577	7 057	5 820	4 890	4 180	3 946
27 368	17 072	14 524	9 950	8 356	6 546	5 695	5 000	4 066	3 893

Zdroj: vlastní zpracování dle [21]

V tabulce 7 jsou hodnoty 40 nejvyšších pojištěných ztrát od roku 1970 po rok 2016, uvedeny v miliardách amerických dolarů. Data jsou publikována v časopisu Sigma [21], který vydává každý rok zajišťovna Swiss Re.

4.1 Charakteristika vybraných dat

Pomocí programu Statgraphics Centurion XVII je popsána základní charakteristika vybraných dat. Jedná se o 40 dat, které představují nejvýše pojištěné škody z období 1970–2016.

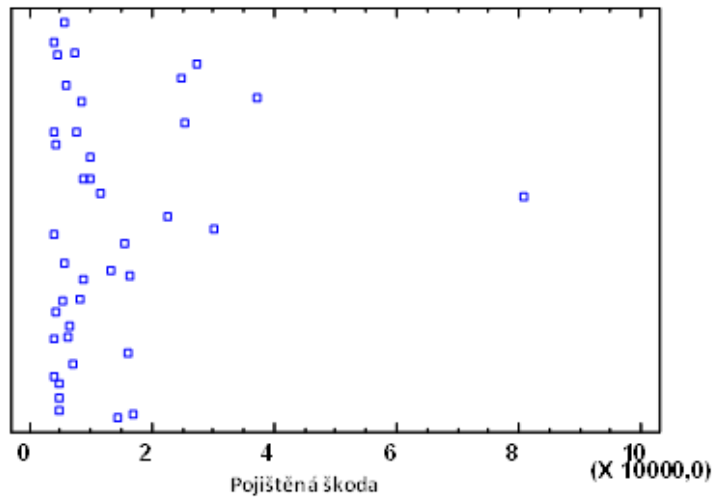
Tabulka 8 Základní statistické charakteristiky analyzovaných dat

Počet dat	40
Průměrná výše pojištěné ztráty	12 827,8
Směrodatná odchylka	13 791,4
Variační koeficient	107,512%
Minimum	3 893
Maximum	80 699
Rozptyl	76 806
Koeficient šikmost	8,79201
Koeficient špičatosti	19,1267

Zdroj: vlastní zpracování, dle Statgraphics Centurion XVII

V tabulce 8 jsou uvedeny základní charakteristiky analyzovaných dat. Z tabulky je patrný velký rozptyl a pozitivně zešikmené rozdělení pravděpodobnosti. To nám určuje hodnota koeficientu šikmosti 8,79201.

Scatterplot

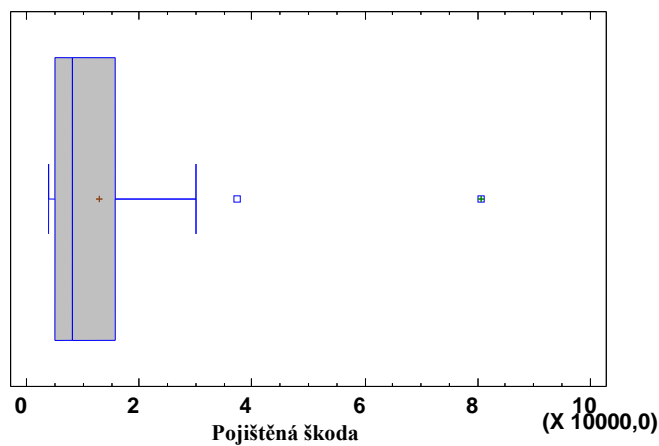


Obrázek 6 Bodový diagram

Zdroj: vlastní zpracování, dle Statgraphics Centurion XVII

Na obrázku 6 je znázorněn bodový graf, kde je vidět rozmístění výše jednotlivých škod. Nejvíce škod je v intervalu $\langle 0; 20\ 000 \rangle$, šest škod se nachází v intervalu $\langle 20\ 000; 40\ 000 \rangle$, jedna nejvyšší škoda je velmi odlehlá a leží v intervalu $\langle 80\ 000; 85\ 000 \rangle$.

Box-and-Whisker Plot



Obrázek 7 Krabicový graf

Zdroj: vlastní zpracování, dle Statgraphics Centurion XVII

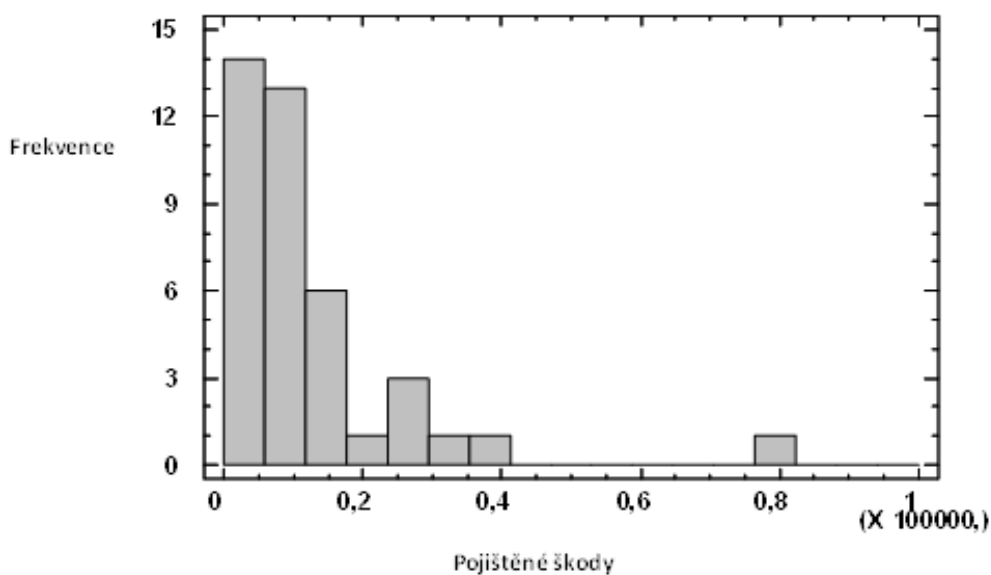
Krabicový graf na základě vzdálenosti kvartilů potvrzuje pravostranné zešíkmení a odhaluje extrémní hodnoty, které jsou odlehlé.

Tabulka 9 Frekvence v jednotlivých intervalech

Počet	Interval	Četnost	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Kumulativní relativní četnost v %
1	<0;6 000>	14	0,350	14	35,0
2	<6 000;12 000>	13	0,325	27	67,5
3	<12 000;18 000>	6	0,150	33	82,5
4	<18 000;24 000>	1	0,025	34	85,0
5	<24 000;30 000>	3	0,075	37	92,5
6	<30 000;36 000>	1	0,025	38	95,0
7	<36 000;42 000>	1	0,025	39	97,5
8	<76 000;83 000>	1	0,025	40	100,0

Zdroj: vlastní zpracování, dle Statgraphics Centurion XVII

Tabulka 9 představuje frekvenci analyzovaných dat, roztríděných do osmi intervalů. Grafické znázornění výsledků třídění představuje obrázek 8.



Obrázek 8 Histogram výsledků třídění

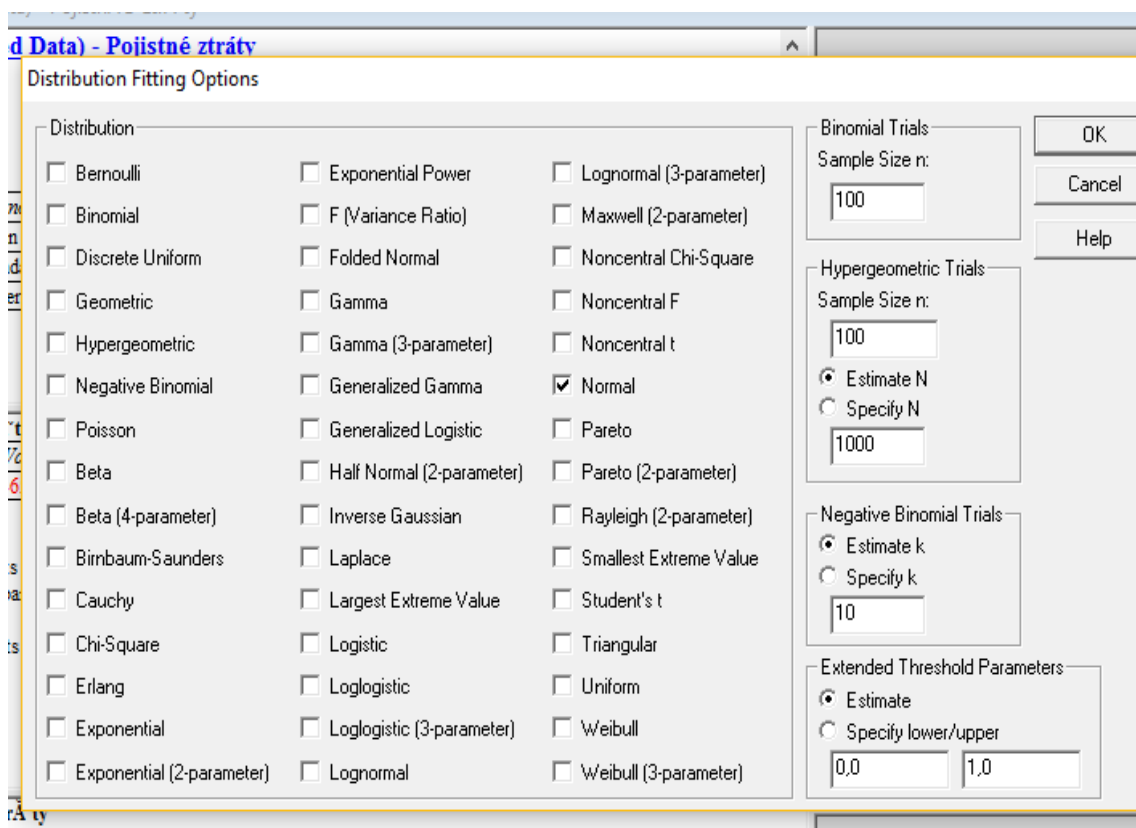
Zdroj: vlastní zpracování, dle Statgraphics Centurion XVII

4.2 Pravděpodobnostní rozdělení

V této následující části je uveden postup ověřování vhodnosti těchto čtyř pravděpodobnostních rozdělení pro modelování nejvyšších pojištěných škod při přírodních katastrofách na základě znalosti 40 nejvyšších hodnot. V práci jsou využívány následující rozdělení:

- Gamma rozdělení
- Lognormální rozdělení
- Paretovo rozdělení
- Weibullovo rozdělení.

Obrázek 9 představuje všechny možnosti pravděpodobnostního rozdělení, který nabízí program Statgraphics Centurion XVII. V nabídce je 45 pravděpodobnostních rozdělení.



Obrázek 9 Možnosti pravděpodobnostního rozdělení

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

Pomocí následujících grafů se pokusíme vybrat nejvhodnější pravděpodobnostní rozdělení. Budou využity dva typy grafů. Shodu kvantilové funkce empirických dat s kvantilovou funkcí zvoleného rozdělení pravděpodobnosti nám umožní posoudit Q - Q graf

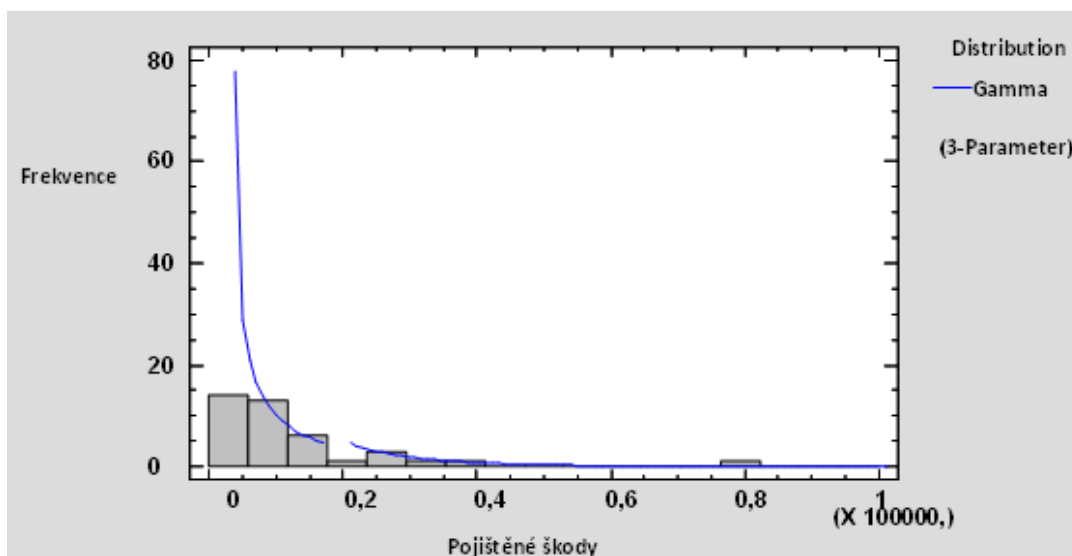
(Quantile - Quantile Plot). Druhým grafem, který slouží k posouzení dobré shody s pravděpodobnostním rozdělením, je histogram empirických dat, proložený hustotou zvoleného rozdělení.

4.2.1 Gama rozdělení

Tabulka 10 Odhad parametrů gama rozdělení

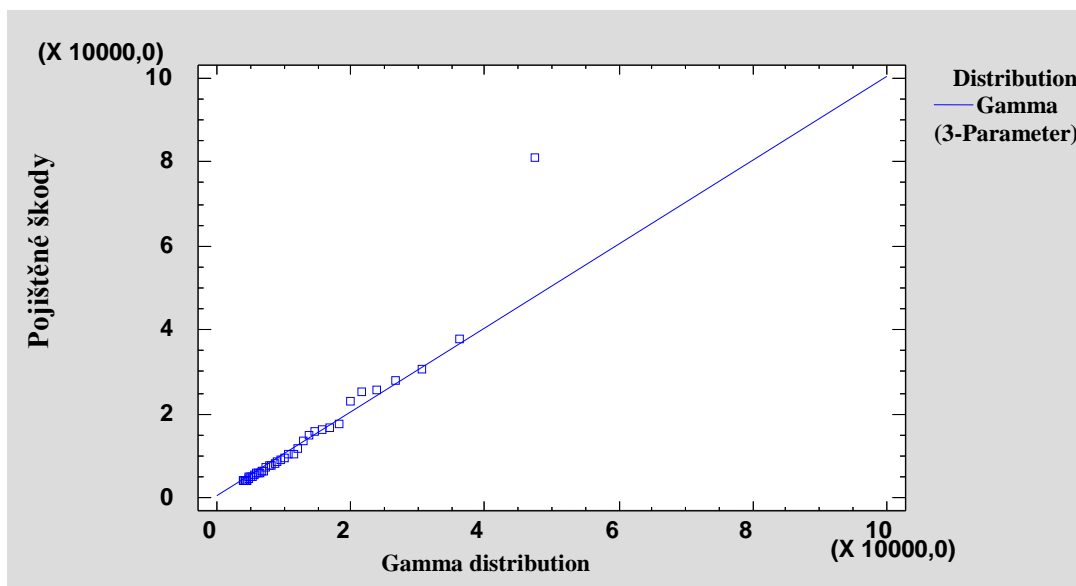
<i>Gamma (3-Parameter)</i>
shape = 0,60615
scale = 0,0000723076
lower threshold = 3893,0

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 10 Histogram pro vizuální ověření shody s gama rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 11 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s gama rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

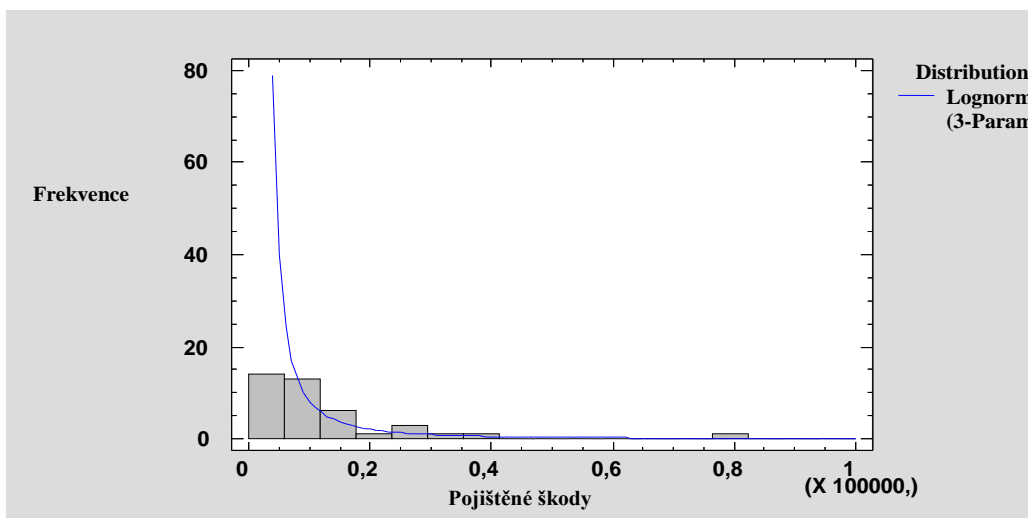
Na obrázku 10 a 11 je zobrazeno vizuální ověření dobré shody s gama rozdělením pravděpodobnosti. Až na pár výjimek výběr kopíruje přímku v Q-Q grafu a je oprávněn předpoklad dobré shody s tímto rozdělením, co ověříme testem dobré shody.

4.2.2 Lognormální rozdělení

Tabulka 11 Odhad parametrů lognormálního rozdělení

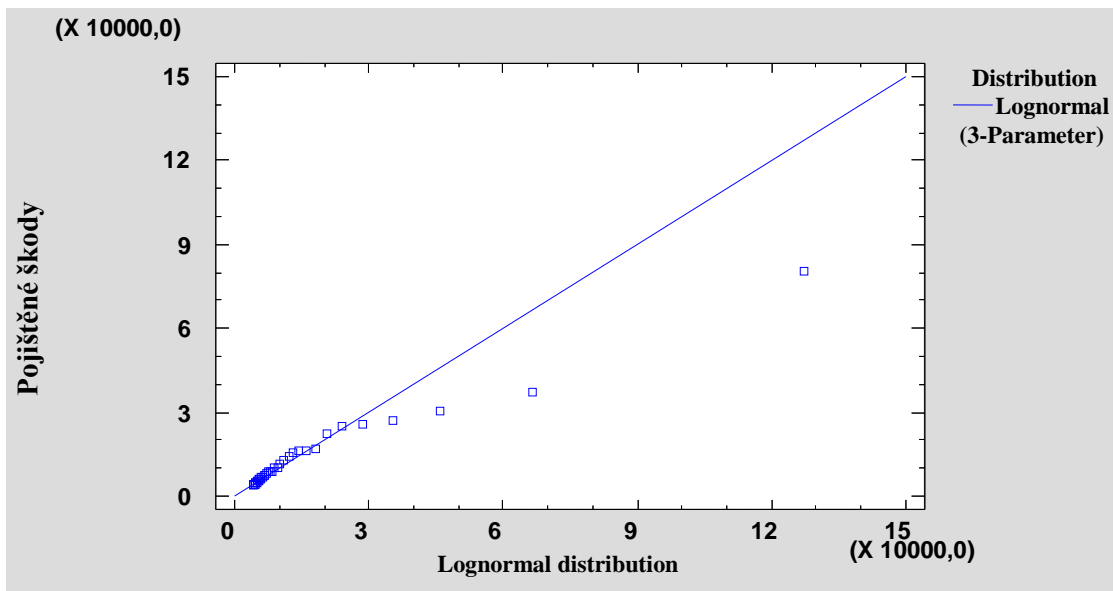
<i>Lognormal (3-Parameter)</i>
mean = 17831,8
standard deviation = 61588,4
lower threshold = 3846,19

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 12 Histogram pro vizuální ověření shody s lognormálním rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 13 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s lognormálním rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

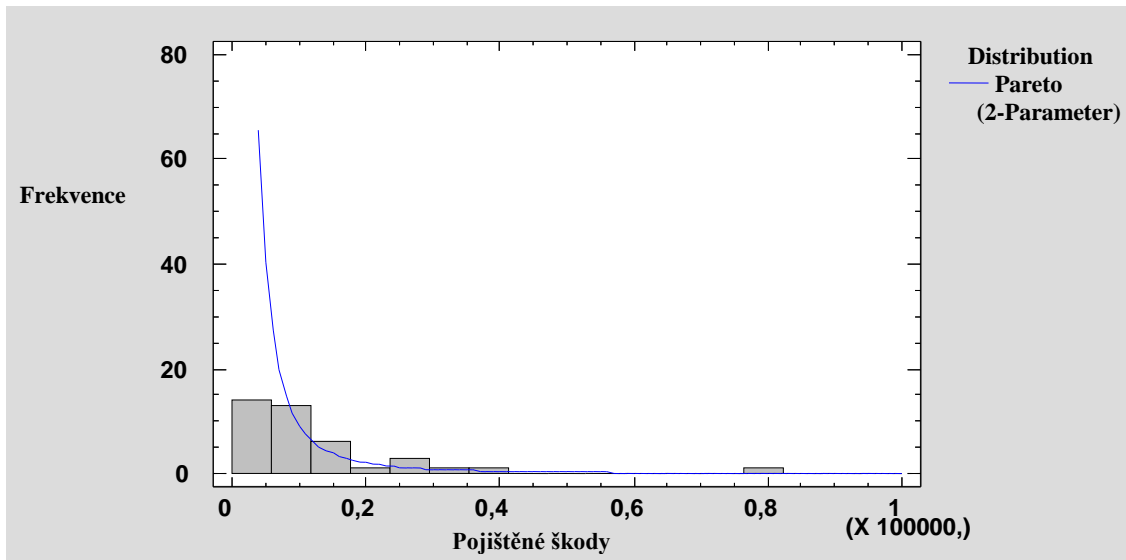
Na obrázku 12 a 13 je vidět vizuální ověření dobré shody s lognormálním rozdělením. Grafické výstupy ukazují na horší shodu na pravé straně rozdělení, protože toto rozdělení nadhodnocuje nejvyšší škody.

4.2.3 Paretovo rozdělení

Tabulka 12 Odhad parametrů Paretova rozdělení o

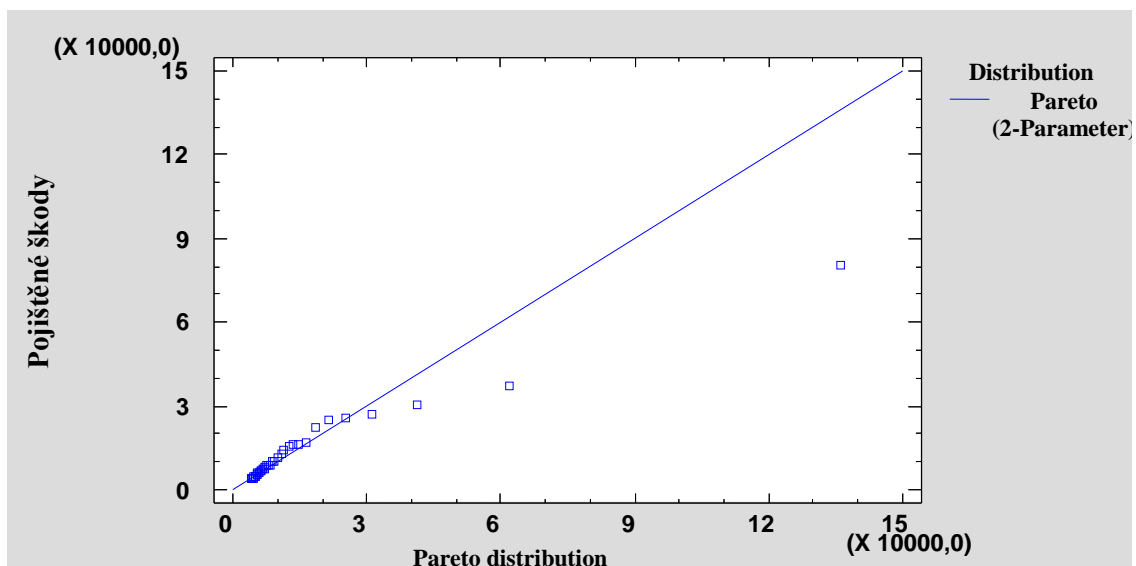
<i>Pareto (2-Parameter)</i>
shape = 1,14811
lower threshold = 3893,0

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 14 Histogram pro vizuální ověření shody s Pareto rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 15 Q-Q graf pro vizuální ověření shody s Pareto rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

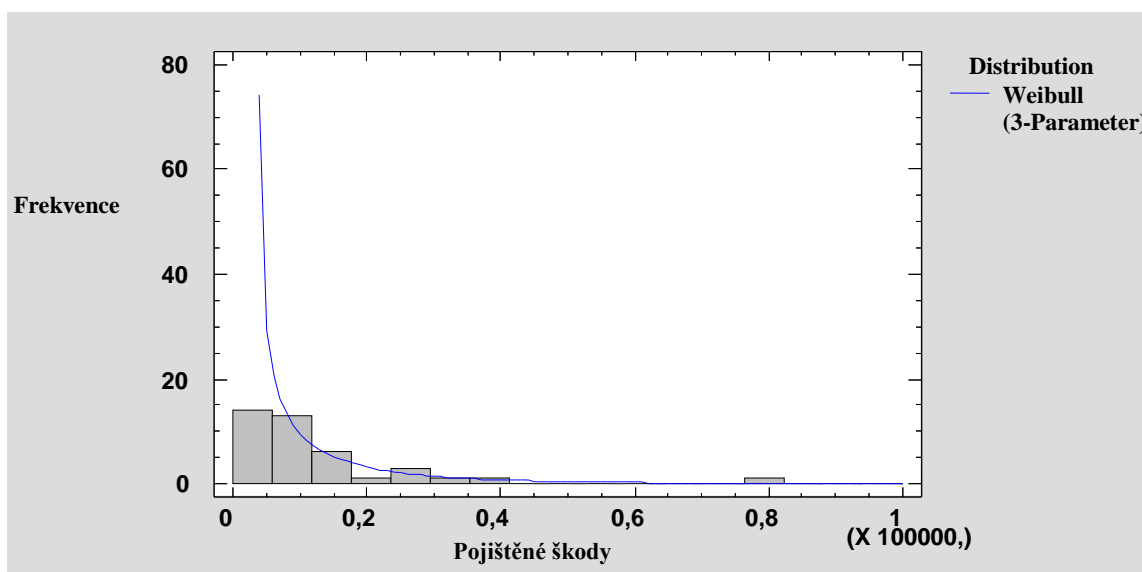
Obrázky 14 a 15 prezentují rovněž méně dobrou shodu s Pareto rozdělením na pravém konci nejvyšších pojištěných škod.

4.2.4 Weibullovo rozdělení

Tabulka 13 Odhad parametrů Weibullova rozdělení

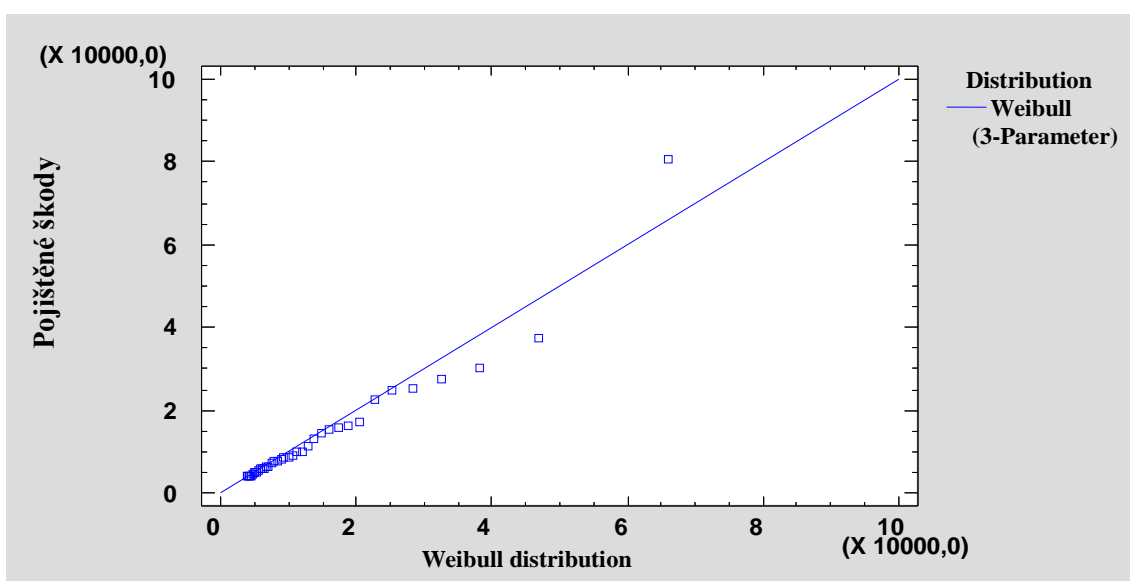
<i>Weibull (3-Parameter)</i>	
shape	= 0,685739
scale	= 7988,74
lower threshold	= 3893,0

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII



Obrázek 16 Histogram pro vizuální ověření shody s Weibullovým rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

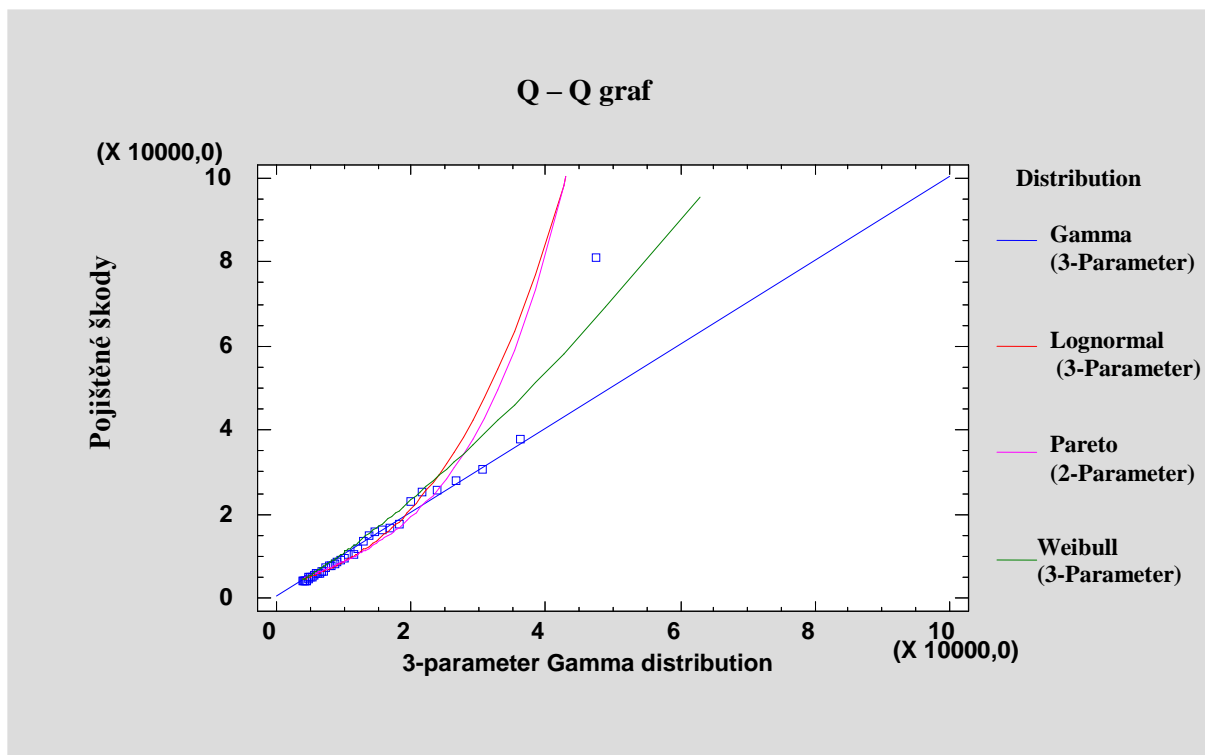


Obrázek 17 Q-Q pro vizuální ověření shody s Weibullovým rozdělením

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

Na obrázku 16 a 17 je vizuální porovnání shody empirických dat nejvyšších pojištěných škod s Weibullovým rozdělením.

Následující Q-Q grafy na obrázku 18 prezentují vizuální porovnání shody zvolených pravděpodobnostních modelů v jednom grafu, ve kterém je za základ porovnání zvoleno gama rozdělení. Na základě obrázku 18 se toto rozdělení jeví jako nejvhodnější pravděpodobnostní model nejvyšších pojištěných škod při přírodních katastrofách ve světě.



Obrázek 18 Q-Q grafy pro vizuální porovnání dobré shody zvolených rozdělení

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

Testování dobré shody empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti umožňuje program Statgraphics Centurion XVII, který k tomu nabízí sedm testů dobré shody. Dva nejzákladnější testy byly již popsány v předchozí kapitole. Jsou to Kolmogorovův - Smirnovův (K-S) test a Pearsonův χ^2 -test.

Tabulka 14 Výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu dobré shody

	<i>Gamma (3-Parameter)</i>	<i>Lognormal (3-Parameter)</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>	<i>Weibull (3-Parameter)</i>
DPLUS	0,0724471	0,0611812	0,0769806	0,0862181
DMINUS	0,0448719	0,0893027	0,0839387	0,0160928
DN	0,0724471	0,0893027	0,0839387	0,0862181
P-Value	0,984655	0,907189	0,940711	0,927467

Zdroj: výstup z programu Statgraphics Centurion XVII

Tabulka 14 poskytuje výsledky Kolmogorova – Smirnovova testu dobré shody pro všechny čtyři zvolené pravděpodobnostní modely. Protože všechny p-hodnoty (P-Value) jsou vyšší jako zvolená hladina významnosti $\alpha = 0,05$, všechny čtyři rozdělení pravděpodobnosti s parametry odhadnutými metodou maximální věrohodnosti můžeme na této hladině významnosti považovat za modely s dobrou shodou s empirickými daty. Protože p-hodnota je nejvyšší pro gama rozdělení, toto rozdělení považujeme za nejvhodnější pravděpodobnostní model nejvyšších pojištěných škod při přírodních katastrofách, v souladu s výsledky vizuálního posouzení. Druhou nejlepší shodu představuje Paretovo rozdělení, které má rovněž výhodný tvar kvantilové funkce, proto ho pro simulaci extrémních škod upřednostníme před rozdělením gama.

4.3 Simulace extrémních pojištěných škod

Pomocí programu Statgraphics Centurion XVII bylo na základě znalosti 40 hodnot nejvyšších pojištěných ztrát ověřena vhodnost Paretova rozdělení jako pravděpodobnostního modelu nejvyšších škod při přírodních katastrofách ve světě. Paretovo rozdělení se nejčastěji používá při modelování a simulaci extrémních hodnot. Pomocné výpočty byly tvořeny v tabulkovém procesoru MS Excel 2007.

Paretovo rozdělení s parametry odhadnutými metodou maximální věrohodnosti a uvedenými v tabulce 12 bude dále využito pro simulaci 5 nejvyšších možných ze 40 nejvyšších pojištěných škod při přírodních katastrofách ve světě. Následuje simulace nejvyšších extrémních škod při daných 40 pojištěných škodách postupem kvantilového modelování, který je popsán v kapitole 3. Pomocné výpočty byly vykonány v tabulkovém procesoru MS Excel 2007.

Kvantilovou funkci Paretova rozdělení dostaneme jako inverzní funkci k distribuční funkci (2.20) ve tvaru

$$Q(p) = \frac{a}{(1-p)^{1/b}} \quad (4.1)$$

Tabulka 15 Pomocné výpočty simulace

v	n	$v^{1/n}$	u	$Q(u)$
0,235493	40	0,964494	0,964494	71279,54
0,331321	39	0,972073	0,937558	43593,33
0,331321	38	0,971348	0,910695	31920,49
0,331321	37	0,970585	0,883908	25400,2
0,331321	36	0,969781	0,857197	21208,23

Zdroj: výstup z MS Excel 2007

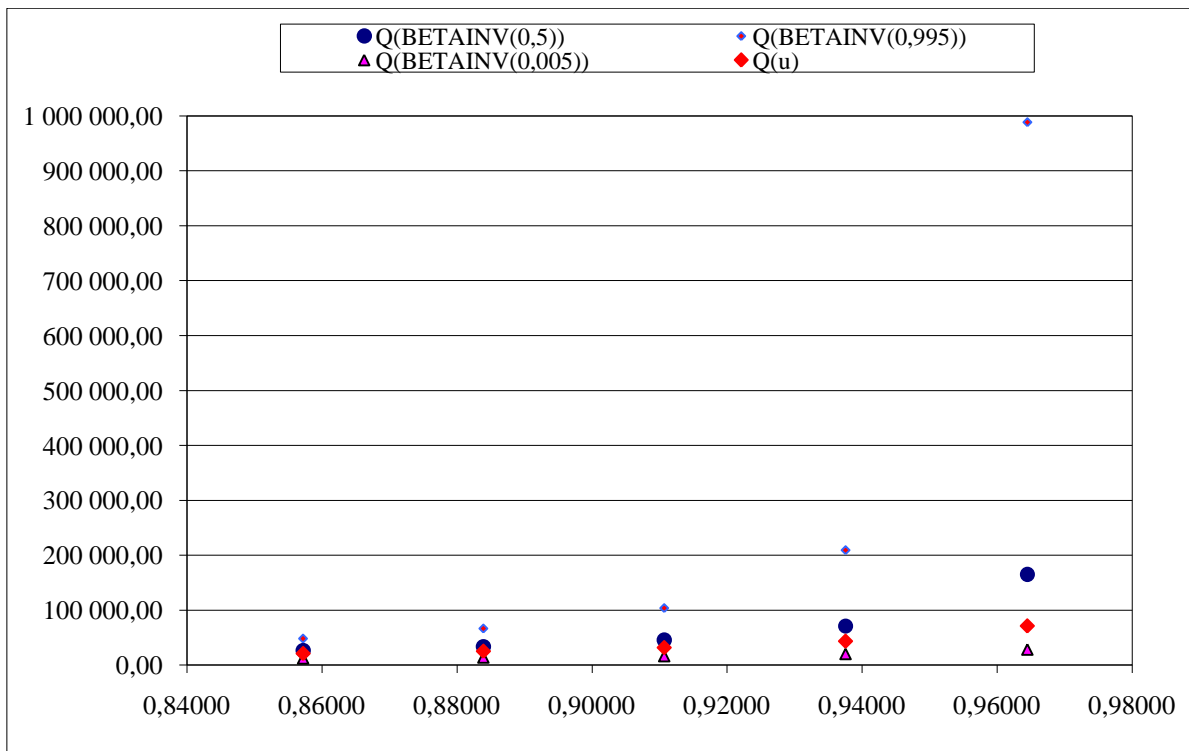
Tabulka 15 ukazuje pomocné výpočty simulace podle vztahů (3.16) - (3.23) pěti nejvyšších pojištěných škod v posledním sloupci tabulky.

Tabulka 16 Výsledky simulace

$Q(\text{BETAINV}(0,5))$	$Q(\text{BETAINV}(0,995))$	$Q(\text{BETAINV}(0,005))$	$Q(u)$
164 921,30	988 741,88	28 339,77	71 279,54
70 901,33	209 433,44	20 240,49	43 593,33
45 453,34	103 926,06	16 310,27	31 920,49
33 581,25	66 732,91	13 870,61	25 400,20
26 690,91	48 400,55	12 172,50	21 208,23

Zdroj: výstup z MS Excel 2007

V tabulce 16 jsou kromě simulované extrémní škody $x = Q(u)$ pro každou pořádkovou statistiku $X_{(40)}, X_{(39)}, \dots, X_{(36)}$ uvedeny i její medián a kvantily $x_{0,995}, x_{0,005}$, které ohraničují interval, z kterého jsou hodnoty příslušné pořádkové statistiky s pravděpodobností 0,99. K jejich výpočtu byl použit vztah (3.13). Výsledky z tabulky 16 jsou graficky zobrazeny na obrázku 19.



Obrázek 19 Výsledky simulace extrémních škod při přírodních katastrofách

Zdroj: výstup z MS Excel 2007

Simulace nejvyšších extrémních škod je důležitá pro neproporcionální pojištění a zajištění škod při přírodních katastrofách a posouzení kapacity pojistných trhů.

ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo teoreticky popsat metody pravděpodobnostního modelování rizik souvisejících s výskytem a ekonomickými důsledky přírodních katastrof a aplikovat je na reálná publikovaná data.

Diplomová práce byla rozdělena do čtyř hlavních kapitol. První kapitola byla zaměřená na vývoj počtu a důsledků katastrof. Kapitola je věnována základním pojmům rozdělení katastrof, vývoji finančních ztrát a důsledků katastrofických událostí pro pojistné trhy. Kapitola obsahuje grafické zpracování počtu událostí s popisem jednotlivých let, rozdělení katastrof způsobené člověkem a přírodní katastrofy. Dále v této kapitole jsou popsány a graficky znázorněny nejtragičtější katastrofické události od roku 1970. Nejnákladnější pojistné události jsou znázorněny od roku 1970 do roku 2016, ale také jsou zobrazeny jen pro rok 2016. Po grafickém znázornění následuje charakteristika pojmu zajištění. Podrobněji je popsáno neproporcionální zajištění s definicí CatXL zajištění pro katastrofická rizika a katastrofické dluhopisy.

Druhá kapitola je zaměřena na metody modelování extrémních škod. V této kapitole jsou popsány čtyři pravděpodobnostní modely, důležitá grafická analýza dat a testy dobré shody, kterými ověřujeme shodu pravděpodobnostního modelu s empirickým rozdělením.

Třetí kapitola popisuje simulaci extrémních pojištěných škod. Je zde teoretický popis možností modelování pomocí kvantilových funkcí.

V poslední čtvrté kapitole je praktická ukázka metod modelování extrémních škod. Teoretické poznatky popsány v předcházejících kapitolách byly aplikovány na reálných datech. Modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí bylo aplikováno na údajích o 40 nejvyšších pojištěných ztrát od roku 1970 po rok 2016. Pomocí testů dobré shody ve statistickém programovém balíku Statgraphics Centurion XVII byla prokázána vhodnost gama, lognormálního, Paretova a Weibullova rozdělení pro pravděpodobnostní modelování nejvyšších pojištěných škod při přírodních katastrofách ve světě. Poté byla provedena simulace pěti extrémních pojištěných škod pomocí kvantilové funkce Paretova rozdělení, která byla realizována v programu Microsoft Office Excel 2007.

Diplomová práce v souladu s cílem a zásady pro vypracování poskytuje teoretické poznatky k modelování a simulaci extrémních pojištěných škod a následně praktickou ukázkou jejich aplikace. Jsou to klíčové informace pro pojišťovny a zajišťovny v souvislosti s řízením a redukcí důsledků přírodních katastrof, kterých počet a finanční důsledky mají rostoucí tendenci.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] CIPRA, T. Pojistná matematika: teorie a praxe. Praha: Ekopress, 1999. ISBN 80-86119-17-3.
- [2] CIPRA, T. Finanční a pojistné vzorce. Praha: Grada, 2006. ISBN 80-247-1633-X.
- [3] CIPRA, T. Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: Grada, 2004. Finanční trhy a instituce. ISBN 80-247-0838-8.
- [4] DRÁPAL, R. Oceňování rizikového XL zajištění. Pojistné rozpravy, 2011 [online]. [cit. 2017-06-04]. Dostupné na: <http://www.pojistnerozpravy.cz/archiv/46-2011-27>
- [5] DUCHÁČKOVÁ, E. Katastrofy a světové pojišťovnictví v roce 2006, str. 9. Dostupné na: <http://www.pojistnyobzor.cz/archiv/73-2007-3>
- [6] GILCHRIST, W. G. Statistical Modelling with Quantile Functions. New York: Chapman&Hall/CRC, 2000. 320 s. ISBN 1-58488-174-7.
- [7] HANDWERK B., Eye on the Storm: Hurricane Katrina Fast Facts, National Geographic News, 2015, [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: http://news.nationalgeographic.com/news/2005/09/0906_050906_katrina_facts.html
- [8] KUBANOVÁ, J. Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi. Bratislava: Statis, 2003. 247 s. ISBN 80-85659-31-X.
- [9] LINDA, B. Pravděpodobnost. 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. ISBN 978-80-7395-303-4
- [10] Munich Re: NatCatSERVICE [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <https://www.munichre.com/en/reinsurance/business/non-life/natcatservice/index.html>
- [11] Munich Re: Reinsurance&Non-Life reinsurance [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <https://www.munichre.com/en/reinsurance/business/non-life/index.html>
- [12] Natuurrampen: Natural disasterrs: [online]. 2015 [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <http://natuurrampen1.jouwweb.nl/>
- [13] PACÁKOVÁ V., JINDROVÁ P., Simulation of Extreme Insured Losses in Natural Catastrophes. Recent Advances in Mathematics and Computational Science, 2016, pp. 30-34
- [14] PACÁKOVÁ, V. Aplikovaná poistná štatistika. 3., preprac. a dopl. vyd. Bratislava: Elita, 2004. ISBN 80-8078-004-8.

- [15] PACÁKOVÁ, V., LINDA. B. Simulations of Extreme Losses in Non-Life Insurance. E+M. Ekonomie a Management, 2009, č. 4. DOI:1212-3609. [online]. 2009 [cit. 2017-06-04]. Dostupné na: http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826735_d523/10_pacakova_linda.pdf
- [16] Paretovo optimum. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-06-05]. Dostupné na: https://cs.wikipedia.org/wiki/Paretovo_optimum.
- [17] PLETCHER K., Rafferty J. P. Japan earthquake and tsunami of 2011. Encyclopedia Britannica [online]. Australia: 2016 [cit. 2017-06-11]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/event/Japan-earthquake-and-tsunami-of-2011>
- [18] Sipková, L., Sodomová, E. Modelovanie kvantilovými funkciami. Bratislava: Ekonóm, 2007. 175 s. 1. Vyd. ISBN 978-80-225-2346-2.
- [19] STIGLER, S. M. Statistics on the table: the history of statistical concepts and methods. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1999. ISBN 0-674-00979-7.
- [20] Strategic reinsurance and insurance: the increasing trend of customised solutions: Sigma no5/2016 Swiss Re [online]. [cit. 2017-06-02]. Dostupné na: http://www.swissre.com/library/052016_Strategic_reinsurance_and_insurance_the_increasing_trend_of_customised_solutions.html
- [21] Swiss Re Institute: Sigma No 2/2017 [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: http://media.swissre.com/documents/sigma2_2017_en.pdf
- [22] Swiss Re: Sigma explorer [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <http://www.sigma-explorer.com/>
- [23] Swiss Re: Sigma Research [online]. [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <http://institute.swissre.com/research/overview/sigma/>
- [24] TOOTHMAN, J., GERBIS, N. Climate&weather. 10 Most Destructive Storms [online]. 2009 [cit. 2017-06-03]. Dostupné na: <http://science.howstuffworks.com/nature/climate-weather/storms/most-destructive-storms.htm>