

Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

**Vlastní čísla a vlastní vektory matic a jejich aplikace v ekonomických
disciplínách**

Jana Macháčková

**Bakalářská práce
2017**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jana Macháčková**
Osobní číslo: **E14437**
Studijní program: **B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor: **Ekonomika a provoz podniku**
Název tématu: **Vlastní čísla a vlastní vektory matic a jejich aplikace
v ekonomických disciplínách**
Zadávací katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Vlastní veličiny matic mají značný význam v různých oborech včetně ekonomiky a rozhodovacích procesů. Cílem práce bude shrnout základní poznatky teorie vlastních veličin matic a jejich teoretický i praktický význam, zmapovat myšlenky a motivace, které vedly k formulování této teorie a na vybraných příkladech z uvedených oborů ilustrovat využití vlastních veličin matic v moderní vědě.

Osnova:

- Základní poznatky teorie vlastních čísel a vlastních vektorů matic.
- Vlastní veličiny matic v historii lineární algebry a jejich aplikací.
- Příklady využití vlastních veličin matic.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 35 stran
Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:

BEČVÁŘ, Jindřich. Z historie lineární algebry. Praha: Matfyzpress, 2007. 519 s. ISBN 978-80-7378-036-4.

BICAN, Ladislav. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. 304 s. ISBN 978-80-200-1707-9.

FOTR, J., PÍŠEK, M. Exaktní metody ekonomického rozhodování. Praha: Academia, 1986. 165 s. ISBN 21-013-86.

CHATELIN, Françoise. Eigenvalues of Matrices: Revised Edition. SIAM, 2012. xxx+392 s. ISBN 978-1-61197-245-0




Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: **4. září 2016**
Termín odevzdání bakalářské práce: **28. dubna 2017**



doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

L.S.



doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. září 2016

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 25. 4. 2017

Jana Macháčková

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Liborovi Koudelovi, Ph.D. za jeho cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování bakalářské práce, a za jeho čas, který mi věnoval při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat manželovi a bratrovi za poskytnuté informace a technické údaje ohledně manipulační techniky, a celé své rodině za trpělivost a podporu po celou dobu studia.

OBSAH

ÚVOD.....	9
1 ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE VLASTNÍCH ČÍSEL A VLASTNÍCH VEKTORŮ MATIC.....	10
1.1 ZÁKLADNÍ POJMY	10
1.2 VLASTNÍ ČÍSLO MATICE A	12
1.3 VLASTNÍ VEKTOR MATICE A.....	13
1.4 PODOBNÉ MATICE.....	13
1.5 DIAGONÁLNÍ MATICE A DIAGONALIZOVATELNOST MATICE.....	14
1.6 SYMETRICKÉ (HERMITOVSKÉ) MATICE	15
1.7 JORDANŮV TVAR V OBECNÉM PŘÍPADĚ	16
2 VLASTNÍ VELIČINY MATIC V HISTORII LINEÁRNÍ ALGEBRY	18
2.1 VÝVOJ TEORIE VLASTNÍCH VELIČIN VE SVĚTĚ.....	18
2.2 PRÁCE ČESKÉHO MATEMATIKA WEYRA	20
2.3 VYUŽITÍ POZNATKŮ O VLASTNÍCH ČÍSLECH A VLASTNÍCH VEKTORECH VE 20. ST.	22
3 VYUŽITÍ VLASTNÍCH VELIČIN MATIC V PRAXI.....	24
3.1 ZÁKLADNÍ POJMY ROZHODOVÁNÍ.....	24
3.2 METODY VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ VARIANT (DÁLE VHV).....	25
3.2.1 Saatyho metoda pro zjištění vah kritérií.....	26
3.2.2 Saatyho metoda pro hodnocení variant – metoda AHP.....	31
4 ŘEŠENÝ PŘÍKLAD - VÝBĚR VYSOKOZDVIŽNÉHO VOZÍKU	34
4.1 STANOVENÍ VAH KRITÉRIÍ.....	36
4.2 HODNOCENÍ STROJŮ DLE JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ	38
4.2.1 Stroje dle kritéria „cena“	38
4.2.2 Stroje dle kritéria „nosnost“	41
4.2.3 Stroje dle kritéria „výška zdvihu“	43
4.2.4 Stroje dle kritéria „výška průjezdu“	45
4.2.5 Stroje dle kritéria „druh pohonu“	47
4.2.6 Stroje dle kritéria „místo provozu“	49
4.3 CELKOVÉ ZHODNOCENÍ VÝBĚRU VYSOKOZDVIŽNÉHO VOZÍKU	51
ZÁVĚR.....	53
POUŽITÁ LITERATURA.....	54

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Obecná Saatyho matice	26
Tabulka 2: Saatyho doporučená bodová stupnice s deskriptory	27
Tabulka 3: Hodnoty R.I.	30
Tabulka 4: Kriteriaální matice.....	35
Tabulka 5: Saatyho matice pro určení vah kritérií	36
Tabulka 6: Porovnání vah získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha	38
Tabulka 7: Hodnocení vozíků na základě ceny	39
Tabulka 8: Porovnání vah dle ceny získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha.....	40
Tabulka 9: Hodnocení vozíků na základě nosnosti	41
Tabulka 10: Porovnání vah dle nosnosti získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha.....	42
Tabulka 11: Hodnocení vozíků na základě výšky zdvihu	43
Tabulka 12: Porovnání vozíků dle výšky zdvihu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha	44
Tabulka 13: Hodnocení vozíků na základě výšky průjezdu	45
Tabulka 14: Porovnání vah dle výšky průjezdu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha	46
Tabulka 15: Hodnocení vozíků na základě druhu pohonu	47
Tabulka 16: Porovnání vah dle výšky průjezdu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha	48
Tabulka 17: Hodnocení vozíků na základě místa provozu.....	49
Tabulka 18: Porovnání vah dle místa provozu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha	50
Tabulka 19: Tabulka výsledného pořadí vysokozdvížných vozíků.....	51

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Kriteriaální matice	25
Obrázek 2: Hierarchická struktura pro VHV.....	32
Obrázek 3: Graf porovnávající váhy jednotlivých kritérií.....	37
Obrázek 4: Hodnocení vozíků s ohledem na cenu	40
Obrázek 5: Hodnocení vozíků s ohledem na nosnost.....	42
Obrázek 6: Hodnocení vozíků s ohledem na výšku zdvihu.....	44
Obrázek 7: Hodnocení vozíků s ohledem na výšku průjezdu	46
Obrázek 8: Hodnocení vozíků s ohledem na druh pohonu.....	48
Obrázek 9: Hodnocení vozíků s ohledem na místo provozu.....	50
Obrázek 10: Celkové hodnocení vysokozdvížných vozíků.....	52

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

A	čtvercová matice A
A^T	transponovaná matice k matici A
A^H	hermitovská matice
P	regulární čtvercová matice P
D	diagonální matice D
P^{-1}	inverzní matice k matici P
E	jednotková matice
R	množina reálných čísel
C	množina komplexních čísel
R^n (C^n)	n -rozměrný vektorový prostor nad R (C)
a_{ij}	prvek matice i -tého řádku a j -tého sloupce
λ	vlastní číslo matice
x	vlastní vektor matice
$p(\lambda)$	charakteristický polynom matice
$\det(A)$	determinant matice A
$\sigma(A)$	spektrum matice A
$\rho(A)$	spektrální poloměr matice A
h	hodnota matice
n	stupeň matice
J_i	Jordanův blok
J	Jordanova matice
$\dim V$	dimenze prostoru V
$N(A - \lambda E)$	nulový prostor matice $(A - \lambda E)$
AHP	analytický hierarchický proces
VHV	vícekritériální hodnocení variant

ÚVOD

Matematika je krásný, velmi zajímavý, ale i dosti náročný vědní obor, bez kterého se v reálném životě neobejde nikdo z nás. Tak jako potřebuje každý člověk někdy alespoň sčítat, násobit nebo si spočítat obsah nějaké plochy, tak každý vědní obor potřebuje využívat poznatky z matematiky ve svých aplikacích.

Tato bakalářská práce je zaměřena na tu část matematiky, které se říká lineární algebra. Konkrétně se jedná o vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matic a možnosti jejich využití v praxi. Cílem práce je vysvětlit teorii vlastních veličin matic a ukázat, že je možno aplikovat tyto znalosti v ekonomických disciplínách. A protože na trhu je velké množství různých dodavatelů a odběratelů, o práci se uchází spousta potencionálních zaměstnanců a podnik chce v dnešní době čím dál silnější konkurence co nejlépe prosperovat, stojí často před důležitou otázkou správného rozhodnutí. Proto zde bude představena oblíbená a často používaná metoda rozhodování, která je stanovena právě na výpočtu vlastního čísla a jemu příslušejícího vektoru.

První dvě kapitoly jsou věnovány matematické teorii, pojednává se v nich o základních vlastnostech čtvercových matic. Jedná se o pojmy ohledně charakteristických veličin matic a je zde vysvětlen postup jejich výpočtu. Dále jsou popsány některé vztahy mezi těmito maticemi. K pochopení textu se předpokládají čtenářovy znalosti základní teorie práce s maticemi. Na závěr jsou uvedeny stručné poznámky o historickém vývoji ve světě i u nás.

Třetí část se zabývá základními pojmy z oblasti rozhodování. Prakticky každý den jsme postaveni před situací, kdy si musíme vybrat z několika dostupných řešení. Správný a rychlý výběr optimální varianty je základem úspěchu jak v osobním, tak v pracovním životě. Rozhodování je v dnešní době jedním ze základních úkolů na všech manažerských pozicích a jeho kvalita se projevuje na efektivním fungování organizace a v dosažených hospodářských výsledcích. V této kapitole je vysvětlena metoda vícekriteriálního hodnocení variant pomocí Saatyho metody.

Na závěr je pro lepší pochopení tato metoda ukázána na zvoleném příkladu, kdy podnik uvažuje o investici do manipulační techniky a má se rozhodnout mezi nabídnutými vysokozdvihnými vozíky.

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE VLASTNÍCH ČÍSEL A VLASTNÍCH VEKTORŮ MATIC

Na začátku této kapitoly jsou uvedeny základní definice týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů matic. Pojem vlastní číslo je identický s pojmem charakteristické číslo, stejně tak pojem vlastní vektor má stejný význam jako pojem charakteristický vektor. Poté jsou vysvětleny jednotlivé pojmy a na konkrétním příkladu vysvětlen postup jejich výpočtu.

Charakteristická čísla a charakteristické vektory jsou definovány pro čtvercové matice a jsou obecně komplexní pro reálné i komplexní matice. Pokud nebude v textu uvedeno jinak, bude se jednat o matice s reálnými (popř. komplexními) prvky.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1. Bud' $A = (a_{ij})$ čtvercová matice stupně n s reálnými nebo komplexními čísly. Jestliže pro jisté λ a pro nenulový vektor x platí

$$Ax = \lambda x, \quad (1.1)$$

pak λ nazveme *vlastním číslem matice A* a vektor x *vlastním vektorem matice A*, který přísluší charakteristickému číslu λ .

Rovnici (1.1) můžeme dále převést na tvar

$$Ax - \lambda Ex = 0, \quad (1.2)$$

kde E je jednotková matice. Úpravou získáme rovnici

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (1.3)$$

což rozepsáno ve složkách znamená

$$\begin{array}{cccccc} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & 0 \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array}$$

Jedná se o homogenní soustavu n rovnic o n neznámých. A protože se hledá netriviální řešení, kdy vlastní vektor musí být různý od 0, musí platit $\det(A - \lambda E) = 0$. Jedná se tedy o matici singulární, kde λ je vlastním číslem matice a každý vektor, který je řešením této rovnice, je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ . V případě, že by matice byla regulární, neexistoval by nenulový vektor x . [3]

Charakteristická matice má tvar

$$(A - \lambda E). \quad (1.4)$$

K získání kořenů charakteristického polynomu, tj. k získání vlastních čísel, slouží charakteristická rovnice matice

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (1.5)$$

kteřá říká, že determinant rozdílu matic A a λE musí být roven nule pro každé vlastní číslo λ .

Charakteristický polynom matice A má tvar

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E), \quad (1.6)$$

což jde dále rozepsat do tvaru

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n). \quad (1.7)$$

Polynom s koeficientem $(-1)^n$ je takového stupně n proměnné λ , jaký je stupeň matice A . Každý polynom má právě n kořenů, počítáme-li i jejich násobnosti.

Spektrum matice A se značí $\sigma(A)$ a určuje množinu všech vlastních čísel.

Spektrální poloměr $\rho(A)$ se rovná maximální absolutní hodnotě vlastního čísla, tj. $\rho(A) = \max \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$

Příklad 1. Všechny výše uvedené pojmy si pro názornost ukážeme na matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- Charakteristická matice

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

- Charakteristická rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

- Charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

- Vlastní čísla – výpočet z rovnice $p(\lambda) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$$

- Vlastní vektory

pro $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

např. $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

pro $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{např. } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Spektrum matice

$$\sigma(A) = \{-1, 3\}$$

- Spektrální poloměr

$$\rho(A) = 3$$

1.2 Vlastní číslo matice A

Číslo λ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když je kořenem charakteristického polynomu (1.6) a platí rovnice (1.5). Charakteristická čísla mohou být jednoduchá neboli jednonásobná, anebo vícenásobná, což znamená, že nemusí být všechna různá. Dále mohou být reálná nebo komplexní. Komplexní čísla se vyskytují vždy ve sdružených párech. To znamená, že pokud najdeme mezi kořeny charakteristického polynomu vlastní číslo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, je také $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ vlastním číslem matice A .

Každé vlastní číslo má dva typy násobností. Jednak algebraickou násobnost vlastního čísla, která je rovna násobnosti kořene charakteristické rovnice a geometrickou násobnost, která odpovídá počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů. Pokud si jsou algebraická a geometrická

násobnost rovny, hovoříme o vlastním čísle nedefektním, pokud je geometrická násobnost menší než algebraická, jde o vlastní číslo defektní. Matice obsahující defektní vlastní číslo je též maticí defektní.

Pro různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a pro jejich násobnost n_1, n_2, \dots, n_n platí:

- $n_1 + n_2 + \dots + n_n = n$, což znamená, že celkový počet vlastních čísel počítaných tolikrát, kolikrát je jejich násobnost se rovná stupni čtvercové matice
- $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_n\lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Tomuto součtu prvků na hlavní diagonále se říká *stopa matice*
- $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_n^{n_n} = \det(A)$, z toho vyplývá, že součin všech různých vlastních čísel matice umocněných na své násobnosti se rovná determinantu matice A

Vlastními čísly trojúhelníkové matice jsou všechny diagonální prvky. [7]

1.3 Vlastní vektor matice A

Vlastní vektor matice A je netriviálním řešením homogenní soustavy lineárních rovnic (1.3), tzn. je vždy nenulový. Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé. Pokud jsou vlastní čísla komplexní, jsou komplexní také příslušné vlastní vektory. Každý násobek vlastního vektoru je opět vlastním vektorem.

Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů k danému charakteristickému číslu λ se rovná číslu $(n - h)$, kde n je stupeň matice $(A - \lambda E)$ a h je hodnost matice $(A - \lambda E)$. Toto číslo se nazývá dimenze vlastního podprostoru matice A , nebo již výše uvedená geometrická násobnost čísla λ , která není nikdy větší než jeho aritmetická násobnost. [7]

1.4 Podobné matice

Definice 1.2. Dvě čtvercové matice A, B stupně n jsou *podobné*, pokud existuje regulární čtvercová matice P stupně n taková, že

$$B = P^{-1}AP. \quad (1.8)$$

Věta 1.1. Bud' A, B čtvercové matice, které jsou si podobné, potom platí, že matice A, B mají stejný charakteristický polynom, tj. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

Tato vlastnost vyplývá z vlastností, které již známe, a sice že

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det[P^{-1}(A - \lambda E)P] = \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \det(P^{-1}P) \det(A - \lambda E) = \det E \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Neplatí však obrácené tvrzení, že pokud matice mají stejný charakteristický polynom, jsou podobné. Tyto matice A, B mají dále stejná vlastní čísla, stejné determinanty a stejnou hodnotu. Je-li x vlastní vektor matice A příslušný vlastní hodnotě λ , pak $x(P^{-1})^{-1}$ je vlastní vektor matice B příslušný λ . Matice B vznikla z matice A podobnostní transformací určenou maticí P . Tato podobnostní transformace má následující vlastnosti:

- je-li B podobná A , je též A podobná B , což jinak znamená, je-li $B = P^{-1}AP$ je též $A = PBP^{-1}$
- podobnostní transformace součtu matic je rovna součtu podobnostních transformací sčítanců

$$P^{-1}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)P = P^{-1}A_1P + P^{-1}A_2P + \dots + P^{-1}A_nP$$

- podobnostní transformace součinu matic je rovna součinu podobnostních transformací činitelů

$$P^{-1}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)P = P^{-1}A_1P \times P^{-1}A_2P \times \dots \times P^{-1}A_nP$$

- podobnostní transformace inverzní matice A^{-1} je rovna inverzní matici k podobnostní transformaci původní matice A [11]

$$P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1}$$

1.5 Diagonální matice a diagonalizovatelnost matice

Věta 1.2. Čtvercová matice A stupně n si je podobná s diagonální maticí D stejného stupně právě tehdy, pokud má matice A n lineárně nezávislých vlastních vektorů a tyto vektory tvoří sloupce matice P . Vektory jsou uspořádány ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní čísla na diagonále matice D . Pak platí rovnost

$$D = P^{-1}AP \tag{1.9}$$

a nedefektní matice A je diagonalizovatelná. [8]

Diagonální matice D má tvar

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou vlastní čísla matice A a také matice D .

Věta 1.3. Má-li matice A stupně n celkem n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Věta 1.4. Pokud je geometrická násobnost některého vlastního čísla menší než jeho algebraická násobnost, pak nelze najít n lineárně nezávislých vlastních vektorů a tyto vektory netvoří bázi prostoru \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n). Potom matici A nelze převést na diagonální tvar. [10]

1.6 Symetrické (hermitovské) matice

Definice 1.3. Reálná matice A se nazývá symetrická, jestliže platí $A = A^T$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Komplexní matice A se nazývá hermitovská, jestliže platí $A = A^H$, tj. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Matice A^T je transformovaná matice k matici A , tzn. že i -tý řádek matice A se stává i -tým sloupcem matice A^T . Matice A tedy musí být maticí čtvercovou.

Matice A^H se nazývá maticí konjugovanou k matici A a platí, že $A^H = \overline{A^T}$. Jedná se o matici transponovanou a komplexně sdruženou k matici A . Komplexně sdružená matice vznikne, pokud vyměníme všechny prvky za prvky k nim komplexně sdružené.

Symetrická matice může vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Ukázka hermitovské matice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 - 3i & i \\ 2 + 3i & 1 & -5 \\ -i & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Pokud se $AA^T = E$, nazývá se matice A ortogonální, v případě že je $AA^H = E$, nazývá se matice unitární.

Věta 1.5. Bud' A čtvercová matice stupně n . Je-li matice A symetrická (hermitovská), jsou všechna její vlastní čísla reálná a algebraická násobnost každého vlastního čísla je rovna jeho násobnosti geometrické.

Věta 1.6. Vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům symetrické (hermitovské) matice jsou navzájem ortogonální (kolmé).

Věta 1.7. Ke každé symetrické (hermitovské) matici A stupně n nad \mathbb{R} (\mathbb{C}), která má všechna vlastní čísla navzájem různá, existuje ortogonální matice P a diagonální matice D tak, že $D = P^T A P$. Sloupce matice P jsou tvořeny lineárně nezávislými vlastními vektory matice A ,

kteře jsou navzájem kolmé a tedy tvoře ortonormální bázi. Diagonála matice D obsahuje vlastní čísla matice A .

Vztah

$$D = P^T A P \quad (1.10)$$

se nazývá ortogonální transformací matice A na diagonální tvar. Pro ortogonální matice P platí rovnost mezi vztahy $D = P^T A P$ a $D = P^{-1} A P$. [10]

1.7 Jordanův tvar v obecném případě

Pokud není matice diagonalizovatelná a nelze ji převést na diagonální tvar, existuje možnost, jak tuto situaci vyřešit. Tato možnost je založena na skutečnosti, že ke každé matici lze nalézt matici podobnou, která je "téměř" diagonální, a proto se zavádí Jordanův tvar matice.

Definice 1.4. (*Jordanův blok*) Matice J_i se nazývá Jordanův blok stupně n příslušný vlastnímu číslu λ .

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

kde všechny prvky na diagonále se rovnají stejnému číslu λ , všechny prvky bezprostředně nad hlavní diagonálou se rovnají 1 a ostatní prvky jsou nulové. Rozměr matice J_i je roven násobnosti vlastního čísla λ_i . [3]

Matice $(J - \lambda E)$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, její hodnost se rovná $n-1$ a její dimenze je rovna 1. Algebraická násobnost vlastního čísla λ není rovna té geometrické, tudíž matice J není diagonalizovatelná.

Věta 1.8. Pokud jsou splněny obě následující podmínky, je matice A podobná Jordanovu bloku J_s :

- 1) matice A má jediné n - násobné číslo λ , které pak tvoře diagonálu Jordanova bloku J_s .
- 2) Existují vektory q^1, \dots, q^n takové, že

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)q^1 &= 0 & q^1 &\neq 0 \\ (A - \lambda E)q^k &= q^{k-1} & k &= 2, \dots, n \end{aligned}$$

Vektory q^1, \dots, q^n nazýváme řetězcem délky n , který odpovídá jednomu vlastnímu číslu λ matice A . Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. První vektor řetězce q^1 je vlastním vektorem matice a zároveň jejím přidruženým vektorem stupně 0. [13]

Věta 1.9. Necht' je matice A podobná Jordanovu bloku J_s a necht' pro matici Q platí

$$Q^{-1}AQ = J_s, \quad (1.11)$$

potom sloupce matice Q tvoří řetězec délky n odpovídající n -násobnému číslu λ matice A .

Věta 1.10. (O Jordanově kanonickém tvaru) Každá čtvercová matice A je podobná nějaké Jordanově matici J právě tehdy, když existuje regulární matice Q taková, že platí

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}.$$

Jordanova matice je blokově diagonální a až na pořadí bloků je dána jednoznačně. Každá z matic J_i pro $i = 1, \dots, k$, je Jordanův blok nějakého stupně n_i příslušný vlastnímu číslu λ_i . Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vlastní čísla matice A a $n_1 + \dots + n_k = n$. Na diagonále každého bloku je vlastní číslo matice A a počet těchto bloků je roven $\dim(N_\lambda)$. Sloupce matice Q jsou tvořeny řetězci, které odpovídají jednotlivým vlastním číslům matice A a jejich pořadí odpovídá pořadí bloků na diagonále matice J . [3][11]

2 VLASTNÍ VELIČINY MATIC V HISTORII LINEÁRNÍ ALGEBRY

Pojmy jako je charakteristická rovnice, charakteristický a minimální polynom, vlastní čísla a vlastní vektory se vyskytovaly ještě před vznikem teorie matic a to zejména v teorii binárních a kvadratických forem, které úzce souvisí s geometrií a nebeskou mechanikou. Vlastní čísla byla velmi důležitá při studiu pohybu nebeských těles. S rozvojem klasické matematické fyziky se během 19. století objevilo mnoho úloh o vlastních hodnotách při problémech kmitání.

Když se během minulého století v různých fyzikálních a technických oborech objevila řada úloh vedoucí právě k výpočtu vlastních hodnot, stala se tato problematika jednou z nejdůležitějších v lineární algebře. Proto také bylo věnováno velké úsilí a mnoho myšlenek na vypracování metod jejich výpočtu. Z počátku se jednalo o metody přímé, které však nebyly z důvodu přesnosti vhodné pro náročnější úlohy. Později se tyto úlohy začaly řešit výpočtem vlastních čísel a vlastních vektorů metodou nepřímou.

Pokud nebude v textu uvedeno jinak, je tato kapitola sepsána podle literatury [1] a [2].

2.1 Vývoj teorie vlastních veličin ve světě

Základy nebeské mechaniky byly postaveny na zákonech německého matematika, astrologa a astronoma Johanna Keplera (1571-1630) a o několik desítek let později na myšlenkách anglického matematika, fyzika a astronoma Isaaca Newtona (1643-1727). Vzájemné působení kosmických těles bylo zaznamenáváno lineárními diferenciálními rovnicemi s reálnými koeficienty. Matice A těchto soustav byly symetrické a důležitou roli hrály jejich charakteristické rovnice tvaru $\det(A - \lambda E) = 0$. Charakteristická rovnice se v nebeské mechanice nazývala sekulární a byla takového stupně, který odpovídal počtu známých planet.

Mezi matematiky, kteří publikovali své myšlenky z nebeské mechaniky, patřili italsko-francouzský matematik, fyzik a astronom Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a francouzský matematik, fyzik a astronom Pierre Simon Laplace (1749-1827). Oba se zabývali problémem reálnosti a násobnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Podle nich by v případě komplexních vlastních čísel docházelo k rozpadu solárního systému. Dalšími, kteří se intenzivně věnovali vlastním číslům a vlastním vektorům, byli německý matematik Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) a francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Cauchy na rozdíl od ostatních využil svých znalostí z teorie determinantů. Ve své práci *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* roku 1829 se snažil převést kvadratickou formu n proměnných

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \dots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \dots$$

na součet čtverců

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \dots$$

Předpokládal transformaci, kterou dnes nazýváme ortogonální a vyjádřil ji podmínkou

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dots = 1.$$

Dále uvedl schéma

$$\begin{cases} A_{xx} - s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \dots \\ A_{xy}, & A_{yy} - s, & A_{yz}, & \dots \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz} - s, & \dots \\ \text{etc.} \dots \end{cases}$$

a tvrdil, že položíme-li determinant této matice $A - sE$ roven nule, dostaneme charakteristickou rovnici, jejíž kořeny jsou právě výše uvedené koeficienty s_1, s_2, \dots

Pomocí determinantů Cauchy dokázal, že v případě reálné symetrické matice jsou kořeny s_1, s_2, \dots také reálné.

Obecnější tvrzení dokázal roku 1855 francouzský matematik Charles Hermite (1822-1901), kdy Cauchyův výsledek rozšířil na komplexní matice. Tento francouzský matematik se zabýval reálností vlastních čísel matic, dnes nazývaných hermitovské, v práci *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*.

Na využívání vlastních čísel bylo závislé řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic, pomocí kterých řeší problematiku malých oscilací německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) ve svém článku z roku 1858, který nazval *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen*. O deset let později v práci *Zur Theorie der bilinear und quadratischen Formen* uvedl podmínky, na kterých stojí podobnost a diagonalizovatelnost matic, ve své podstatě dospěl k Jordanovu kanonickému tvaru.

Další významnou osobností je francouzský matematik Camille Marie Ennemonde Jordan (1838-1922), který v roce 1870 vydal knihu *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Zavedl kanonický tvar, jemuž odpovídá matice sestavená z buněk s vlastními čísly

na diagonále. Při snaze o nalezení všech lineárních substitucí se stejným kanonickým tvarem dospěl k závěru, že takové dvě substituce A, B splňují vztah $B = P^{-1}AP$, kde P je vhodná substituce. Podle něho se dnes používají názvy Jordanův kanonický tvar, Jordanova buňka a Jordanova matice. Jako jiní vyjadřoval všechny své výsledky v řeči bilineárních a kvadratických forem.

Kanonickými tvary se dále zabýval německý matematik Georg Frobenius (1849-1917), jehož práce *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878 pojednává o pojmech, jako je charakteristická rovnice, minimální polynom, podobnost, atd.

Kanonické tvary byly v řeči bilineárních a kvadratických forem formulovány až do konce 19. století a teprve počátkem 20. století došlo k překládání řady výsledků do řeči matic. Výsledky týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů se vzápětí zařadily do spektrální teorie lineárních operátorů.

2.2 Práce českého matematika Weyra

Velice uznávaným v oblasti kanonických tvarů byl český matematik Eduard Weyr (1852 - 1903), který v 80. letech 19. století své výsledky publikoval již v řeči matic. Z jeho prací jsou dnes nejvíce oceňovány publikace s maticovou tematikou, zejména o teorii charakteristických čísel.

V roce 1885 byly v časopisu *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* publikovány dva jeho krátké články, *Sur la théorie des matrices a Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* prezentující některé poznatky, které později rozvinul ve své teorii charakteristických čísel a typických matic. Tato teorie je podrobně vysvětlena především v práci *O theorii forem bilineárných*. Proč zvolil autor zrovna tento název, když se tam pojem bilineární forma téměř nevyskytuje, není známo. Možná právě proto, že pojem matice nebyl mezi matematiky dobře znám a Weyr se tak bál malého zájmu o publikaci. Veškeré jeho poznatky byly napsány v nové symbolice a terminologii, celý text je psán v řeči matic.

Ve čtvrté kapitole této knihy s názvem *O kořenech matice a jich charakteristických číslech* autor uvedl charakteristickou rovnici pro matici stupně n ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

potom přirozená čísla $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ nazveme charakteristická čísla příslušná k vlastnímu číslu λ matice A . Pro tyto charakteristická čísla platí

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = s.$$

Jestliže $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou charakteristické kořeny matice A a r_1, \dots, r_k počty příslušných charakteristických čísel, potom

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

je minimální polynom matice A .

Dalším poznatkem bylo to, že matice A a B jsou podobné, pokud mají stejná vlastní čísla a k nim příslušná charakteristická čísla.

V šesté kapitole pojednání *O theorii forem bilineárných* uvedl velmi jednoduchý tvar matice M , který později nazval typickým tvarem. Prvky této matice jsou pouze vlastní čísla, jedničky a nuly. Až na malé změny v uspořádání prvků se jedná o Jordanovu matici. Na tento typický tvar lze pomocí transformační matice Q převést každou komplexní matici N . Ve své knize *Z historie lineární algebry* uvedl Jindřich Bečvář slova Eduarda Weyra: „Každá matice N má svou typickou matici M ; je-li M typickou maticí o týchž kořenech a číslech charakteristických jako N , lze ... stanovit matici Q tak, že platí $N = Q^{-1}MQ$, a tu zoveme M typickou maticí náležící ku N .“ ([2], str. 232)

Na výše uvedené Weyrovy výsledky měla odezva české matematické obce značné zpoždění. Teprve roku 1949 na ně reagoval Miroslav Novotný svým článkem *O zobecnění Weyrovy teorie charakteristických čísel matic* vydaným v Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky roku 1950 a o tři roky později otiskl článek *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic*. Dalším, kdo používal Weyrovu teorii charakteristických čísel, typických matic a normálních soustav, byl Jiří Čermák, který publikoval své tři práce o soustavách diferenciálních a diferenčních rovnic. Také Otakar Borůvka ve svých přednáškách a pracích upozorňoval na možnosti využití výsledků Eduarda Weyera. Jeho teorii podrobně vyložil roku 1971 v knížce *Základy teorie matic*.

2.3 Využití poznatků o vlastních číslech a vlastních vektorech ve 20. st.

Ve 20. století začaly hrát velkou roli jak v teoretických, tak v praktických aplikacích. Jejich využití našlo uplatnění v řadě oborů, od matematiky, přes chemii, dynamické struktury až po

ekonomiku. V matematice se znalost vlastních veličin využívá např. v rámci diferenčních a diferenciálních rovnic, stochastických matic a Markovových řetězců. V ekonomické teorii se jedná např. o Leontiefův model. Dále se využívají ve faktoriální analýze dat, v dynamických strukturách, v chemii má uplatnění v kvantové chemii, v teorii grafů a v chemických reakcích. Tyto aplikace je možné podrobněji nastudovat v knize od Francoise Chatelina nazvané *Eigenvalues of Matrices*. [8]

Poznatky o charakteristických veličinách matic využívá v současné době také profesor univerzity v Pittsburghu v USA Thomas L. Saaty narozen roku 1926. Na základech maximálního vlastního čísla a jemu příslušejícího vektoru postavil v 80 letech metodu vícekritériálního rozhodování zvanou Analytický hierarchický proces (AHP). Tato metoda je dnes velice oblíbená a často používaná na celém světě v rozmanitých rozhodovacích situacích ve všech možných oborech. Pomocí ní byl vypracován komplexní dopravní plán pro Súdán. Svým rozhodovacím procesem Saaty pomáhal např. při analýze dalšího vývoje ve firmě Ford Motor Company. Tato metoda se dá využít na rozhodování o všem možném a používat ji může jak jednotlivec sám pro sebe, tak skupina lidí pro potřeby firemní nebo i státní.

3 VYUŽITÍ VLASTNÍCH VELIČIN MATIC V PRAXI

Využití vlastních čísel a vlastních vektorů matic se objevuje např. v metodě od profesora Saatyho, o němž je zmínka na konci předcházející kapitoly. Saatyho metoda slouží k určení vah v úlohách vícekritériálního rozhodování. V úvodu této části jsou uvedeny základní pojmy z rozhodování, na něž navazuje přiblížení Saatyho metody, která se využívá pro zjištění vah kritérií a své uplatnění najde také v metodě AHP (Analytic Hierarchy Process).

3.1 Základní pojmy rozhodování

Rozhodování je důležitou činností na všech úrovních řízení organizace. Jedná se o funkci průběžnou, která prostupuje všemi sekvenčními funkcemi. Zejména se uplatňuje v plánování.

Rozhodovací procesy řeší určité rozhodovací problémy, kde jsou alespoň dvě varianty řešení. V tomto procesu jde o výběr optimální varianty vhodné k realizaci. Rozhodovací procesy dělíme na rozhodování za jistoty (známe důsledky variant a s jistotou víme, jaký stav světa nastane), rozhodování za rizika (známe důsledky variant při stavech světa, které mohou nastat a zároveň známe i jejich pravděpodobnosti) a rozhodování za nejistoty (známe důsledky variant, ale neznáme jejich pravděpodobnosti). [5]

Mezi základní prvky rozhodovacího procesu patří:

- cíl rozhodování – určitý stav k uspokojení potřeby nebo ke splnění nějaké funkce, kterého se má pomocí rozhodovacího procesu dosáhnout
- kritéria hodnocení – hlediska, podle kterých se posuzují jednotlivé varianty. Každé kritérium má podle rozhodovatele jinou váhu. Kritéria dělíme na kvantitativní (vyjádřena číselně) a kvalitativní (vyjádřena slovně).
- subjekt rozhodování (rozhodovatel) – subjekt, který má učinit rozhodnutí o tom, která varianta je optimální. Může se jednat o jednu osobu, ale i o skupinu lidí.
- objekt rozhodování – určitá oblast, které se problém týká
- varianta rozhodování – jeden z realizovatelných způsobů vedoucí k řešení daného problému
- důsledky variant – dopady na objekt rozhodování, které předpokládáme po realizaci určité varianty. Při rozhodování za jistoty jsou jednoznačné, jinak závisí na stavech světa.
- stavy světa – možné stavy okolí rozhodovatele, které je mimo jeho kontrolu

3.2.1 Saatyho metoda pro zjištění vah kritérií

Jedná se o jednu z nejpoužívanějších metod odhadu vah kritérií, kdy rozhodovatel mezi sebou porovnává všechny možné dvojice kritérií. Na začátku je nutné sestavit matici intenzit preferencí S , tzv. Saatyho matici (tab. 1), která má ve shodném pořadí jak v řádcích, tak i ve sloupcích uvedena jednotlivá kritéria K_{ij} . Prvky matice s_{ij} vyjadřují odhady podílu vah i -tého a j -tého kritéria. Poslední tři sloupce obsahují s_i jako součin n prvků jednotlivých řádků, dále R_i vyjadřující n -té odmocniny s_i a hodnotu v_i udávající normovaný geometrický průměr. [5]

Tabulka 1: Obecná Saatyho matice

Kritérium	K_1	K_2		K_3	K_4	...	K_k	s_i	R_i	v_i
K_1	1	s_{12}		s_{13}	s_{14}	...	s_{1k}	$\prod_{j=1}^k s_{1j}$	$\sqrt[k]{s_1}$	$\frac{R_1}{\sum_{i=1}^k R_i}$
K_2	$\frac{1}{s_{12}}$	1		s_{23}	s_{24}	...	s_{2k}	$\prod_{j=1}^k s_{2j}$	$\sqrt[k]{s_2}$	$\frac{R_2}{\sum_{i=1}^k R_i}$
K_3	$\frac{1}{s_{13}}$	$\frac{1}{s_{23}}$		1	s_{34}	...	s_{3k}	$\prod_{j=1}^k s_{3j}$	$\sqrt[k]{s_3}$	$\frac{R_3}{\sum_{i=1}^k R_i}$
K_4	$\frac{1}{s_{14}}$	$\frac{1}{s_{24}}$		$\frac{1}{s_{34}}$	1	...	s_{4k}	$\prod_{j=1}^k s_{4j}$	$\sqrt[k]{s_4}$	$\frac{R_4}{\sum_{i=1}^k R_i}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
K_k	$\frac{1}{s_{1k}}$	$\frac{1}{s_{2k}}$		$\frac{1}{s_{3k}}$	$\frac{1}{s_{4k}}$...	1	$\prod_{j=1}^k s_{kj}$	$\sqrt[k]{s_k}$	$\frac{R_k}{\sum_{i=1}^k R_i}$
									$\sum_{i=1}^k R_i$	1

Zdroj: upraveno podle [4]

Na základě preferencí rozhodovatele jsou vztahy dvojic v tab. 1 hodnoceny a bodovány podle tab. 2, která obsahuje Saatyem doporučenou bodovou stupnici s deskriptory. Každý rozhodovatel by měl pečlivě zvážit, jaké kritérium považuje za nejdůležitější a kolikrát převyšuje ostatní kritéria.

Tabulka 2: Saatyem doporučená bodová stupnice s deskriptory

Počet bodů	Deskriptor
1	Kritéria jsou stejně významná
3	První kritérium je slabě významnější než druhé
5	První kritérium je dosti významnější než druhé
7	První kritérium je prokazatelně významnější než druhé
9	První kritérium je absolutně významnější než druhé

Zdroj: [5]

Bodová stupnice obsahuje pouze lichá čísla od 1 do 9. Čísla 2, 4, 6, 8 lze použít k přesnějšímu vymezení rozestupu preferencí dvojic kritérií. Počty bodů vyjadřují, kolikrát je jedno kritérium důležitější než druhé. Hodnota 1 znamená stejnou důležitost obou kritérií, naopak hodnota 9 ukazuje na velký rozdíl preferencí jednoho kritéria před druhým. Pokud je kritérium v řádku důležitější než kritérium ve sloupci, запиše se do příslušného políčka hodnota 1-9, pokud má ale kritérium v řádku nižší důležitost než ve sloupci, uvede se převrácená hodnota zvoleného čísla. [9]

Po doplnění horní trojúhelníkové matice S je vložení ostatních preferencí velice jednoduché. Pro prvky na diagonále s_{ii} a prvky v dolní trojúhelníkové matici s_{ji} platí následující rovnice

$$s_{ii} = 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.1)$$

$$s_{ji} = \frac{1}{s_{ij}} \quad \text{pro všechna } i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2)$$

Rovnice (3.2) je typická pro reciprokou matici. Jelikož je hodnotící stupnice sestavena pouze z kladných čísel a jejich převrácená hodnota je opět kladné číslo, platí, že všechny prvky matice jsou kladné. Kladná matice je speciálním typem ireducibilní matice, pro kterou platí Perron-Frobeniova věta ([8], s.33): Je-li S ireducibilní čtvercová matice stupně m s nezápornými prvky, pak

- matice S má jednoduché kladné maximální vlastní číslo λ_{max}

- vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu má kladné složky a je určen jednoznačně až na kladný násobek
- pro maximální vlastní číslo a libovolný vektor $x \geq 0$ z \mathbb{R}^m platí

$$\lambda_{max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m} \frac{(Sx)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{(Sx)_i}{x_i}.$$

Tato věta má velký význam pro matici párových srovnání, protože na základě jejího tvrzení má matice S maximální vlastní číslo i jemu příslušející vlastní vektor.

Pro prvky s_{ij} vyjadřující poměr vah v_i a v_j platí vztah

$$s_{ij} = \frac{v_i}{v_j}, \quad (3.3)$$

kde v_i je váha i -tého kritéria a v_j je váha j -tého kritéria. Hodnota s_{ij} vyjadřuje poměr významnosti mezi prvky x_i a x_j vzhledem k prvku z nadřazené úrovně. Protože poměr těchto vah není předem znám, využívá se k jejich stanovení matice S . Prvky s_{ij} matice S odpovídají číslům základní škály hodnocení z tab. 2. [12]

Čtvercová matice S stupně k je tedy odhadem matice, pro kterou platí

$$v_{ij} = \frac{1}{v_{ji}}. \quad (3.4)$$

Jedná se o plně konzistentní matici, kdy pro libovolnou trojici indexů h, i, j jejich prvků musí platit rovnice

$$s_{hj} = s_{hi} \cdot s_{ij} \quad \text{pro všechna } h, i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) znamená, že pokud je např. prvek k_h dvakrát významnější než prvek k_i a ten je čtyřikrát významnější než prvek k_j , musí být prvek k_h osmkrát významnější než prvek k_j . Konzistence matice vypovídá o skutečnosti, zda porovnání dvojic prvků v matici je důkladně promyšlené.

Pokud se podaří zadat matici S plně konzistentně, což znamená, že její prvky splňují rovnici (3.5), potom má všechna vlastní čísla kromě jednoho nulová a tím jediným je stupeň k matice S . Platí tedy maticový zápis

$$S \cdot v = k \cdot v, \quad (3.6)$$

jehož odvození je popsáno pomocí následujících vztahů, který v knize ([4], s. 90) uvádějí autoři Fiala, Jablonský, Maňas. Po sloučení výrazu

$$s_{ji} = \frac{v_j}{v_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.7)$$

s výrazem

$$s_{ij} \cdot s_{ji} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.8)$$

dostáváme

$$s_{ij} \frac{v_j}{v_i} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.9)$$

Odtud plyne rovnost

$$\sum_{j=1}^k s_{ij} \frac{v_j}{v_i} = k, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.10)$$

resp.

$$\sum_{j=1}^k s_{ij} v_j = k \cdot v_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.11)$$

V podstatě to samé, ale shrnuté do jedné rovnice uvádí Ramík v knize ([12], s. 89), kdy ve vzorečku vyjadřuje i -tou složku vektoru v .

$$(Sv)_i = \sum_{j=1}^k s_{ij} v_j = \sum_{j=1}^k \frac{v_i}{v_j} v_j = \sum_{j=1}^k v_i = k v_i. \quad (3.12)$$

K takové situaci, kdy je matice plně konzistentní, však dochází pouze ve výjimečných případech. Pokud je známa pouze matice S , která nesplňuje podmínku (3.5), potom je aproximací konzistentní matice a neplatí pro ni existence pouze jediného vlastního čísla λ . Největší vlastní číslo λ_{max} je o něco málo větší než stupeň matice k a ostatní se svou velikostí blíží nule. Poté pro odvození intenzit preferencí slouží vyřešení soustavy

$$S \cdot v = \lambda_{max} \cdot v, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^k v_i = \alpha,$$

kde α je intenzita preference prvku na vyšší úrovni, vůči kterému dané prvky porovnáváme. V případě tříúrovňové hierarchické struktury zobrazené na obr. 2 bude pro úroveň kritérií

$\alpha = 1$, protože nad touto úrovní je pouze jeden cíl a celá hodnota normované váhy, která je rovna 1 se nemá mezi co dělit. Pro porovnávání variant vůči K_i bude $\alpha = v_i$. [4]

Výše uvedený postup lze použít pouze v případě, že je matice dostatečně konzistentní. K tomuto ověření slouží index konzistence $C.I.$

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k-1}, \quad (3.14)$$

kde λ_{max} je největší vlastní číslo matice S a k je počet kritérií. Matice je dostatečně konzistentní, pokud je hodnota indexu menší než 0,1. Ověření lze také provést poměrem konzistence $C.R.$

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}, \quad (3.15)$$

kde $R.I.$ znamená průměrný index konzistence pro 500 náhodně generovaných recipročních matic. [4]

Tabulka 3 uvádí hodnoty $R.I.$ pro různé stupně matic.

Tabulka 3: Hodnoty $R.I.$

k	3	4	5	6	7	8	10	12	14
R.I.	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,49	1,53	1,59

Zdroj: [4]

Po sestavení matice párového porovnávání Saaty doporučuje jako základní metodu pro zjištění vah výpočet vlastního čísla λ_{max} a k němu příslušejícího vektoru pomocí vzorce

$$Sw = \lambda_{max}w, \quad (3.16)$$

který je totožný s

$$(S - \lambda_{max}I)w = 0, \quad (3.17)$$

kde I je jednotková matice a 0 je sloupcový nulový vektor. Váhy stanovíme ze získaných vlastních vektorů w_i pomocí následující rovnice

$$v_i = \frac{w_i}{\|w\|}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.18)$$

kde

$$\|w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2}, \quad (3.19)$$

značí normu (velikost) vektoru w . [12]

Pro výpočet největšího vlastního čísla λ_{max} dvojice autorů Fotr, Píšek ([6], s. 29) doporučuje řešit rovnici

$$\lambda_{max}^{k+1} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} h_i^{k+1}}{\max_{1 \leq i \leq n} h_i^k}, \quad (3.20)$$

kde se vektor h^{k+1} se získá z vektoru h^k pomocí rekurentního vztahu

$$h^{k+1} = S \cdot h^k \quad (3.21)$$

s počáteční volbou $h^0 = (1, 1, \dots, 1)$. [6]

Jelikož pro matici obsahující více než tři kritéria by byl výpočet vlastního čísla λ_{max} velice náročný a bez použití počítače prakticky nemožný, používá se ke zjištění aproximativní hodnoty vah kritérií např. metoda aritmetických průměrů, metoda nejmenších čtverců, ale nejčastěji metoda geometrických průměrů, jejíž odhadnuté váhy se minimálně liší od vah skutečných. Tato metoda je založena na vynásobení k prvků jednotlivých řádků a následné k -té odmocniny těchto součinů, jak je uvedeno již v tab. 1. Odhady vah kritérií v_i získáme normováním geometrických průměrů podle vzorce,

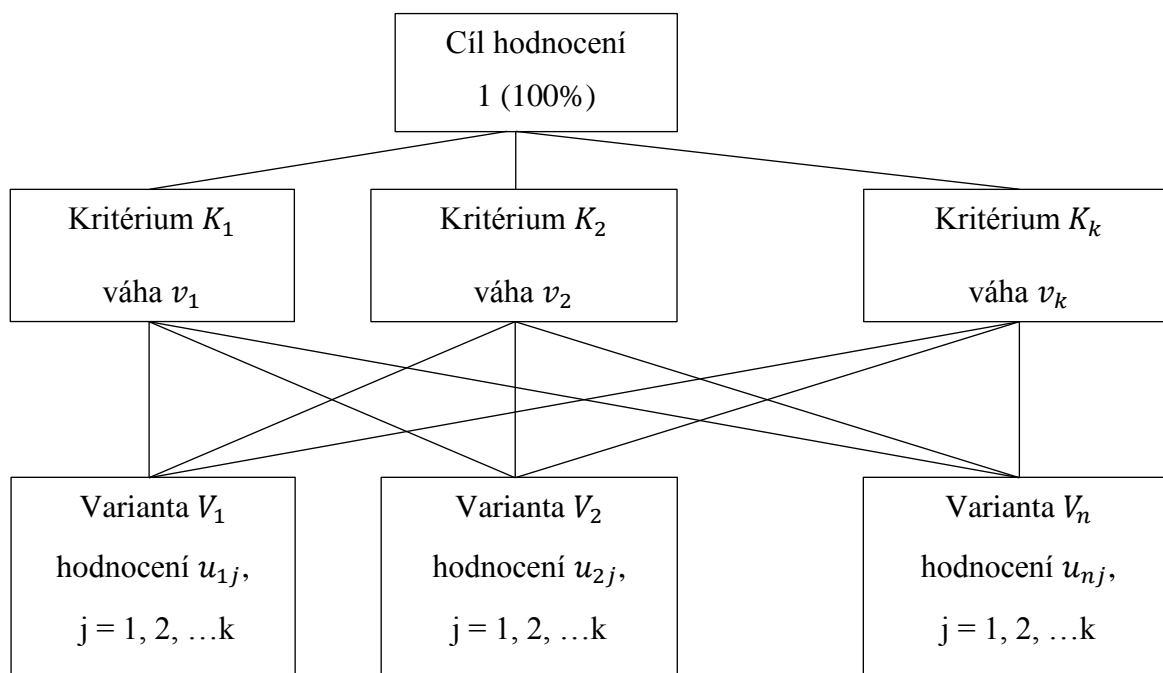
$$v_i = \frac{[\prod_{j=1}^k s_{ij}]^{\frac{1}{k}}}{\sum_{i=1}^k [\prod_{j=1}^k s_{ij}]^{\frac{1}{k}}}, \quad (3.22)$$

kde v čitateli jsou geometrické průměry jednotlivých řádků, a ve jmenovateli je součet všech geometrických průměrů. [4]

3.2.2 Saatyho metoda pro hodnocení variant – metoda AHP

Jedná se o metodu párového srovnávání prvků na jednotlivých úrovních hierarchické struktury, která byla navržena prof. Saatyem v 80 letech 20. století. Podle složitosti rozhodování obsahuje struktura určitý počet úrovní a každá z nich se skládá z několika prvků. Čím vyšší je úroveň, tím se skládá z obecnějších prvků. Na samém vrcholu je pouze jediný prvek, kterým je cíl hodnocení variant. Prvky po sobě následujících úrovní jsou mezi sebou propojeny určitým

vztahem. Při analýze jednoduché úlohy může mít hierarchická struktura pouze tři úrovně a těmi jsou – cíl vyhodnocování, kritéria a varianty. Schéma takové struktury je na obr. 2. Hodnota 1 na nejvyšší úrovni je rozdělena mezi kritéria podle jejich preference a stejně tak váhy jednotlivých kritérií se dále dělí mezi varianty, které tak dostávají preferenční index u_{ij} hodnocení i -té varianty podle j -tého kritéria. [9]



Obrázek 2: Hierarchická struktura pro VHV

Zdroj:[9]

Princip je shodný se Saatyho metodou stanovení vah kritérií, která byla popsána v předchozí kapitole. Rozdíl spočívá v tom, že matice neporovnává velikost preferencí dvojic kritérií, ale preference dvojic variant pro určité kritérium. Z toho vyplývá, že kolik existuje jednotlivých kritérií, tolik je matic porovnávajících zvolené varianty. Každá matice je stupně n , kde n je počet variant. Z každé matice vzejdou dílčí utility (hodnocení) variant u_{ij} tak, že normované vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu λ_{max} nebo normované geometrické průměry jednotlivých řádků jsou vynásobeny váhou kritéria, vůči kterému se varianty v dané matici porovnávaly. Celkové hodnocení i -té varianty u_i je dáno váženým průměrem

$$u_i = \sum_{j=1}^k v_j \cdot u_{ij} \quad \text{pro } i=1, 2, \dots, n, \quad (3.23)$$

kde v_j jsou váhy kritérií, n je počet variant a k je počet kritérií hodnocení. [5]

Výhoda metody AHP spočívá v tom, že je schopna porovnávat jak kritéria kvantitativní, tak kvalitativní. Nevýhodou je obtížné stanovení preferencí mezi jednotlivými prvky, které nemusí být vždy objektivní a dále její rozsáhlost výpočtů, kdy při vyšších počtech kritérií a variant stoupá počet párových porovnávaní. Např. již pro 5 variant, které budou zhodnoceny na základě 7 kritérií, musí rozhodovatel zadat $\binom{7}{2} + 7\binom{5}{2}$, tj. celkem $21 + 70 = 91$ párových porovnávaní a vše vyřešit pomocí 8 Saatyho matic. [9]

4 ŘEŠENÝ PŘÍKLAD - VÝBĚR VYSOKOZDVIŽNÉHO VOZÍKU

Vícekritériální hodnocení variant za použití Saatyho metody je aplikováno na příkladu pro výběr vysokozdvížného vozíku potřebného pro provoz ve vnitřních prostorech firmy. Jedná se o techniku potřebnou k horizontální, ale především vertikální manipulaci s materiálem.

Pro hodnocení je vybráno šest vysokozdvížných vozíků s různými parametry. Představena je manipulační technika dvou firem, kterými jsou Toyota Material Handling CZ s.r.o. a Jungheinrich (ČR) s.r.o.

Jako kritéria jsou vybrána ta, o kterých se předpokládá, že jsou důležitá při pořizování tohoto dlouhodobého majetku, i když v závislosti na rozhodovateli o výběru stroje se mohou tyto kritéria značně měnit. Jelikož se nejedná o konkrétní situaci, ale pouze o ukázkou, jak dané rozhodování řešit, nejsou zadány žádné intervaly, ve kterých se mají parametry zařízení nacházet. Pro příklad byly stanoveny tyto kritéria:

- cena – zde se předpokládá, že by měla být k odpovídající kvalitě a funkčním požadavkům na stroj co nejnižší
- nosnost – jedná se o klíčové kritérium. Uvedená nosnost stroje je ovlivňována přepravovaným břemenem a výškou, do které je břemeno zvedáno. Každý vozík má předepsané těžiště uložení břemene. Pokud jsou rozměry přepravovaného materiálu větší, nosnost stroje se snižuje. Také platí, že čím je potřeba zdvihnout břemeno výše, tím je potřeba snížit jeho hmotnost.
- výška zdvihu – toto kritérium udává, do jaké výšky je vozík schopen zvednout náklad. Jak již bylo naznačeno u nosnosti, výška zdvihu má vliv na stabilitu vozíku, a proto má každý stroj redukci nosnosti s ohledem na zdvih.
- výška průjezdu – udává výšku potřebnou pro průjezd stroje v základní poloze
- druh pohonu – stroje jsou dodávány s níže uvedenými pohony
 - spalovací dieselový – podle typu stroje možnost použití vně i uvnitř, ale s ohledem na spaliny jsou vhodné především pro venkovní použití
 - spalovací plynový – podle typu stroje možnost použití vně i uvnitř. Oproti dieselovým motorům se vyznačují levnějším provozem a jsou šetrnější k životnímu prostředí.
 - elektrický – podle typu stroje možnost použití vně, ale především uvnitř. Jsou nejšetrnější k životnímu prostředí a mají nejtišší chod. Baterie v těchto strojích jsou gelové nebo kyselinové. Nevýhodou kyselinových baterií je skutečnost, že pro jejich nabíjení je potřebná samostatná místnost.

- místo provozu – podle požadovaného účelu je možné manipulační techniku používat pouze venku, pouze uvnitř, nebo využívat v obou prostorech.

Na počátku celého rozhodovacího procesu je v tab. 4 sestavena kritériální matice, ve které jsou uvedeny typy strojů, jednotlivá kritéria a všechny parametry.

Tabulka 4: Kritériální matice

		Cena [Kč]	Nosnost [t]	Výška zdvihu [m]	Výška průjezdu [m]	Druh pohonu	Místo provozu
		K₁	K₂	K₃	K₄	K₅	K₆
RRE 140	V₁	650 000	1,4	12	5	elektrický – gelová baterie	v hale
RRE 180	V₂	800 000	1,8	8	3	elektrický – gelová baterie	v hale
GT 30	V₃	1 300 000	3	4,5	2	spalovací plynový	v hale i uvnitř
EFG 218	V₄	520 000	1,8	5,5	2,4	elektrický – kyselinová baterie	v hale i uvnitř
TFG 425	V₅	760 000	2,5	5,5	2,5	spalovací plynový	v hale i uvnitř
DFG 435	V₆	1 100 000	3,5	4	2,2	spalovací dieselový	v hale i uvnitř

Zdroj: vlastní zpracování

Hodnoty uvedené v kritériální matici lze považovat ve vztahu k uvedeným typům vysokozdvizných vozíků pouze za orientační. Jak ceny, tak parametry se mohou v závislosti na požadavcích zákazníka lišit. Zejména cena je údaj, který je značně pohyblivý. Záleží na přídatných funkcích a komponentech a dále na úpravách stroje, ke kterým často dochází ještě

před samotným uvedením do provozu z důvodu nevyhovujících funkcí pro chod v již existujících prostorech.

4.1 Stanovení vah kritérií

Prvním krokem VHV je určení vah kritérií ze sestavené matice (tab. 5). Tato matice je oranžově podbarvená a k ní jsou přidány dva sloupce a jeden řádek. Sloupec s označením R_i udává geometrické průměry, sloupec s označením v_i udává normované váhy kritérií a poslední řádek v tabulce udává součet sloupců matice.

Jelikož je Saatyho matice stupně 6, není přesné stanovení maximálního vlastního čísla λ_{max} , ze kterého by bylo možno vypočítat váhy, bez použití počítačového programu reálné. Váhy jednotlivých matic uvedené v tab. 5 jsou vypočítány pomocí geometrických průměrů jednotlivých řádků, které jsou následně znormovány.

Tabulka 5: Saatyho matice pro určení vah kritérií

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	R_i	v_i
K ₁	1	1	3	5	3	9	2,7200	0,3213
K ₂	1	1	3	5	3	9	2,7200	0,3213
K ₃	1/3	1/3	1	3	1	7	1,1517	0,1360
K ₄	1/5	1/5	1/3	1	1/3	5	0,5302	0,0626
K ₅	1/3	1/3	1	3	1	7	1,1517	0,1360
K ₆	1/9	1/9	1/7	1/5	1/7	1	0,1922	0,0228
Σ	2,9778	2,9778	8,4762	17,2000	8,4762	38,0000	8,4659	1

Zdroj: vlastní zpracování

Hodnota R_i se vypočítá podle níže uvedeného vzorečku, kde je pro ukázkou vypočítaná hodnota pro první řádek

$$R_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^k s_{ij}} \Rightarrow R_1 = \sqrt[6]{\prod_{j=1}^6 s_{1j}} = \sqrt[6]{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9} = 2,7200$$

K hodnotě v_i se dospěje následujícím vztahem, taktéž s ukázkou pro první řádek

$$v_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^k R_i} \Rightarrow v_1 = \frac{R_1}{\sum_{i=1}^6 R_i} = \frac{2,7200}{8,4659} = 0,3213$$

Pro výpočet přibližného vlastního čísla použijeme násobení dvou vektorů. První řádkový vektor je tvořen součtem sloupců matice a druhý sloupcový vektor odpovídá vypočteným normovaným vahám. Všechny hodnoty jsou převzaty z tab. 5.

$$\lambda_{max} = [2,9778 \quad 2,9778 \quad 8,4762 \quad 17,2000 \quad 8,4762 \quad 38,0000] \cdot \begin{bmatrix} 0,3213 \\ 0,3213 \\ 0,1360 \\ 0,0626 \\ 0,1360 \\ 0,0228 \end{bmatrix} = 6,1622$$

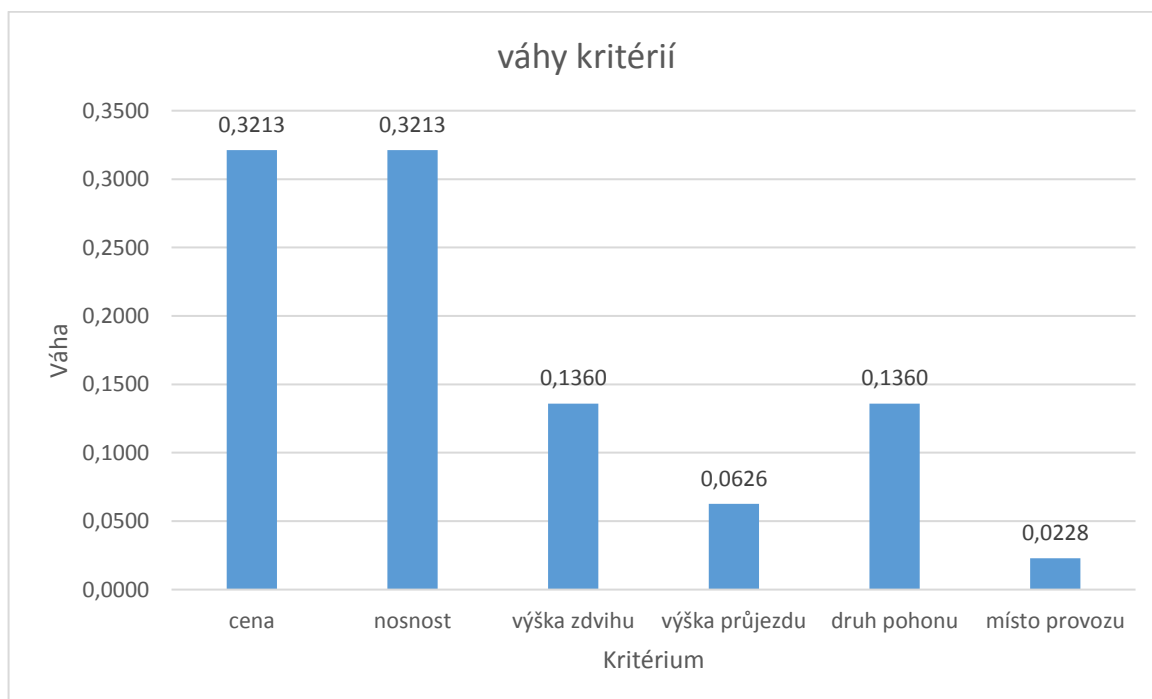
Nyní už známe λ_{max} a můžeme ověřit, zda je matice dostatečně konzistentní. Jak je uvedeno v kapitole 3.2.1, slouží k tomuto ověření index konzistence *C.I.* podle vzorečku (3.14)

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,1622 - 6}{6 - 1} = 0,0324$$

$$0,0324 < 0,1$$

Z výsledku hodnoty indexu, který má být menší než 0,1 je vidět, že matice je dostatečně konzistentní.

Pro lepší představu jsou rozdíly jednotlivých vah znázorněny v grafu na obr. 3.



Obrázek 3: Graf porovnávací váhy jednotlivých kritérií

Zdroj: vlastní zpracování

Pro dokázání, že se hodnoty získané pomocí geometrického průměru skutečně od hodnot Saatyho metodou příliš neliší, jsou pro porovnání uvedeny v tab. 6 hodnoty vah a vlastní číslo vypočítané metodou geometrických průměrů a získané pomocí výpočetního systému WolframAlpha. Tyto charakteristické parametry matice spolu s indexem konzistence je možné pro porovnání získat také Saatyho metodou za pomoci programu MCA7. Tento program vytvořil Petr Kroviny v rámci své dizertační práce a je volně ke stažení na internetové stránce http://korviny.cz/mca7/mca7_download.php.

Tabulka 6: Porovnání vah získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,3213	0,3202
Nosnost	0,3213	0,3202
Výška zdvihu	0,1360	0,1358
Výška průjezdu	0,0626	0,0645
Druh pohonu	0,1360	0,1358
Místo provozu	0,0228	0,0236
λ_{max}	6,1622	6,2135
<i>C.I.</i>	0,0324	0,0427

Zdroj: Vlastní zpracování

Nyní jsou již známy hodnoty vah kritérií a může se přistoupit k hodnocení jednotlivých variant.

4.2 Hodnocení strojů dle jednotlivých kritérií

V tomto příkladu, kde se rozhoduje mezi šesti druhy vysokozdvihných vozíků, bude podle postupu uvedeného v kapitole 3.2.2 vytvořeno 6 matic. Každá matice hodnotí alternativy výběru podle jednoho kritéria a na jeho základě vzejdou dílčí utility variant u_{ij} .

4.2.1 Stroje dle kritéria „cena“

Vyhodnocení, který stroj má jakou váhu podle ceny je uvedeno v tab. 7.

Tabulka 7: Hodnocení vozíků na základě ceny

CENA $v_1 =$ 0,3213	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i1}
RRE 140	1	3	8	1/2	2	6	2,2894	0,2603	0,0837
RRE 180	1/3	1	6	1/4	1/2	4	1,0000	0,1137	0,0365
GT 30	1/8	1/6	1	1/9	1/7	1/3	0,2190	0,0249	0,0080
EFG 218	2	4	9	1	3	7	3,3879	0,3853	0,1238
TFG 425	1/2	2	7	1/3	1	5	1,5060	0,1713	0,0550
DFG 435	1/6	1/4	3	1/7	1/5	1	0,3910	0,0445	0,0143
Σ	4,1250	10,4167	34,0000	2,3373	6,8429	23,3333	8,7933	1	0,3213

Zdroj: Vlastní zpracování

Postup výpočtu hodnot R_i a v_i je vysvětlen u stanovení vah kritérií. Nyní bude ukázán výpočet hodnoty dílčí utility u_{ij} :

$$u_{ij} = v_i \cdot w_i \Rightarrow u_{11} = v_1 \cdot w_1 = 0,3213 \cdot 0,2603 = 0,0836$$

Velikost λ_{max} se získá vynásobením vektorů:

$$\lambda_{max} = [4,1250 \quad 10,4167 \quad 34,0000 \quad 2,3373 \quad 6,8429 \quad 23,3333] \cdot \begin{bmatrix} 0,2603 \\ 0,1137 \\ 0,0249 \\ 0,3853 \\ 0,1713 \\ 0,0445 \end{bmatrix} = 6,2158$$

Nyní můžeme ověřit konzistenci matice.

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,2158 - 6}{6 - 1} = 0,0432$$

$$0,0432 < 0,1$$

Z výsledku hodnoty indexu konzistence vyplývá, že matice je dostatečně konzistentní.

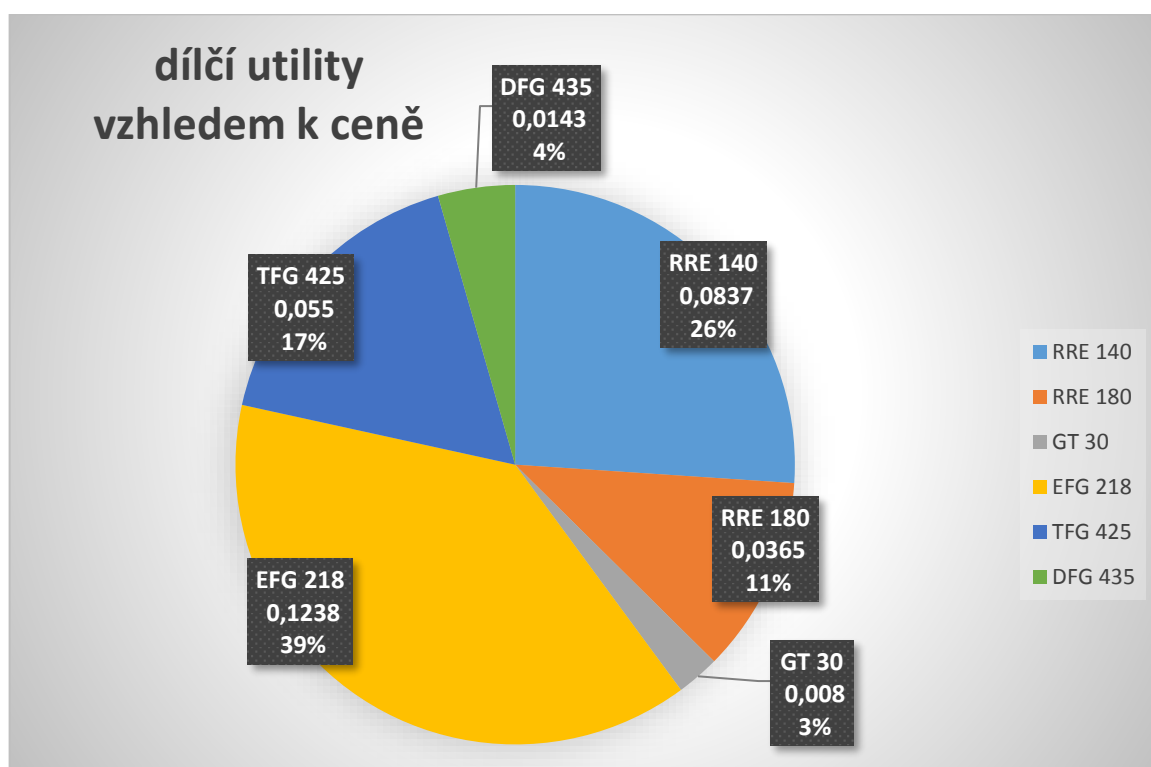
V tab. 8 jsou pro porovnání opět uvedeny hodnoty vah a vlastního čísla vypočítané pomocí metody geometrických průměrů a aplikace WolframAlpha.

Tabulka 8: Porovnání vah dle ceny získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,2603	0,2578
Nosnost	0,1137	0,1146
Výška zdvihu	0,0249	0,0255
Výška průjezdu	0,3853	0,3869
Druh pohonu	0,1713	0,1700
Místo provozu	0,0445	0,0452
λ_{max}	6,2158	6,2465
C.I.	0,0432	0,0493

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 4 je znázorněn graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k ceně.



Obrázek 4: Hodnocení vozíků s ohledem na cenu

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu je patrné, že nejvyšší hodnocení má vysokozdvihový vozík s označením EFG 218, naopak na dvou posledních místech skončily vozíky typu GF30 a DFG 435, jejichž cena překročila 1 mil Kč.

4.2.2 Stroje dle kritéria „nosnost“

Stanovení dílčích vah strojů podle nosnosti je uvedeno v tab. 9.

Tabulka 9: Hodnocení vozíků na základě nosnosti

NOSNOST $v_2 = 0,3213$	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i2}
RRE 140	1	1/3	1/9	1/3	1/7	1/9	0,2410	0,0254	0,0081
RRE 180	3	1	1/7	1	1/5	1/7	0,4801	0,0507	0,0163
GT 30	9	7	1	7	3	1	3,3133	0,3500	0,1125
EFG 218	3	1	1/7	1	1/5	1/7	0,4801	0,0507	0,0163
TFG 425	7	5	1/3	5	1	1/3	1,6398	0,1732	0,0556
DFG 435	9	7	1	7	3	1	3,3133	0,3500	0,1125
Σ	32,0000	21,3333	2,7302	21,3333	7,5429	2,7302	9,4676	1	0,3213

Zdroj: Vlastní zpracování

Výpočet λ_{max} vynásobením vektorů:

$$\lambda_{max} = [32,0000 \quad 21,3333 \quad 2,7302 \quad 21,3333 \quad 7,5429 \quad 2,7302] \cdot \begin{bmatrix} 0,0254 \\ 0,0507 \\ 0,3500 \\ 0,0507 \\ 0,1732 \\ 0,3500 \end{bmatrix} = 6,1936$$

Nyní můžeme ověřit konzistenci matice.

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,1936 - 6}{6 - 1} = 0,0387$$

$$0,0387 < 0,1$$

Z výsledku hodnoty indexu lze konstatovat, že matice je dostatečně konzistentní.

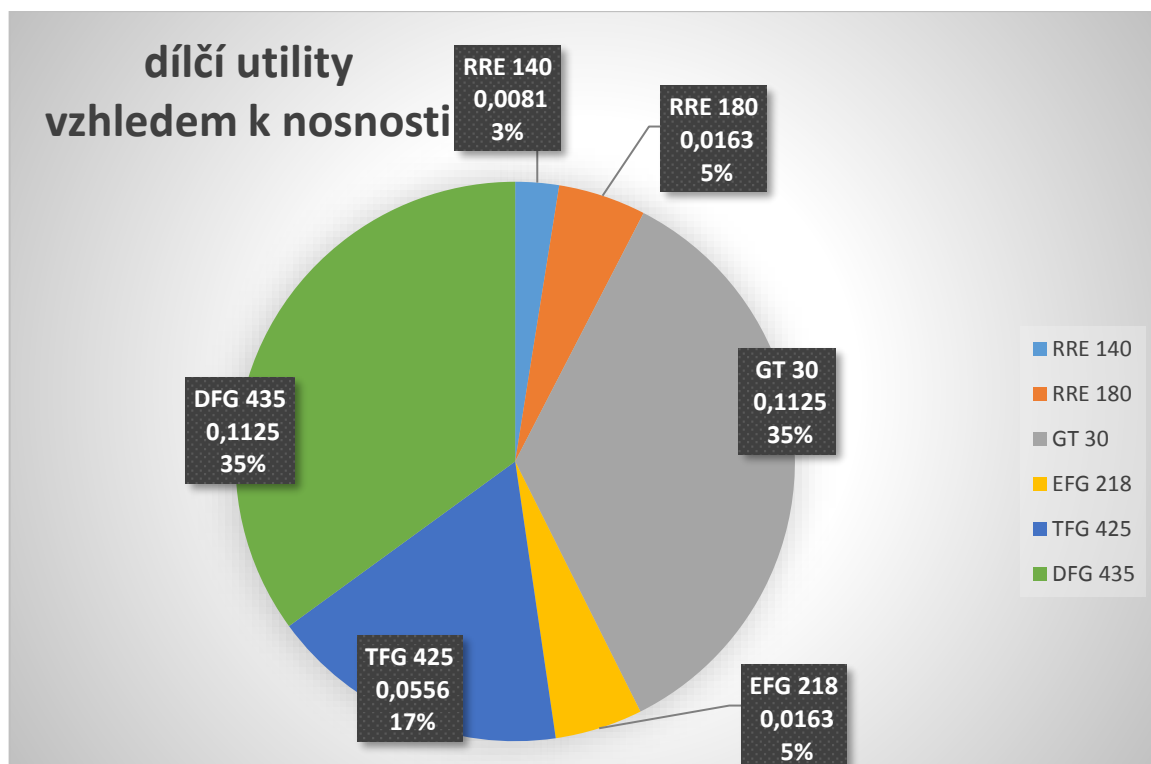
V tab. 10 jsou pro porovnání opět uvedeny hodnoty vah a vlastního čísla vypočítané pomocí metody geometrických průměrů a aplikace WolframAlpha.

Tabulka 10: Porovnání vah dle nosnosti získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,0254	0,0261
Nosnost	0,0507	0,0505
Výška zdvihu	0,3500	0,3484
Výška průjezdu	0,0507	0,0505
Druh pohonu	0,1732	0,1762
Místo provozu	0,3500	0,3484
λ_{max}	6,1936	6,2204
C.I.	0,0387	0,0441

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 5 je uveden graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k nosnosti.



Obrázek 5: Hodnocení vozíků s ohledem na nosnost

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu je na první pohled znatelné, že nejvíce hodnocení jsou dva vozíky, jeden s označením DFG 435 a druhý s názvem GT 30. Tato skutečnost je dána jejich nosností

převyšující 3 tuny. Naopak na posledním místě je technika s označením RRE 140, která unese pouze 1,4 tuny.

4.2.3 Stroje dle kritéria „výška zdvihu“

Výsledky porovnání strojů podle výšky zdvihu je uvedeno v tab. 11.

Tabulka 11: Hodnocení vozíků na základě výšky zdvihu

VÝŠKA ZDVIHU $v_3 = 0,1360$	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i3}
RRE 140	1	1	5	3	3	7	2,6085	0,3206	0,0436
RRE 180	1	1	5	3	3	7	2,6085	0,3206	0,0436
GT 30	1/5	1/5	1	1/3	1/3	3	0,4870	0,0599	0,0081
EFG 218	1/3	1/3	3	1	1	5	1,0889	0,1338	0,0182
TFG 425	1/3	1/3	3	1	1	5	1,0889	0,1338	0,0182
DFG 435	1/7	1/7	1/3	1/5	1/5	1	0,2546	0,0313	0,0043
Σ	3,0095	3,0095	17,3333	8,5333	8,5333	28,0000	8,1364	1	0,1360

Zdroj: Vlastní zpracování

Výpočet λ_{max} :

$$\lambda_{max} = [3,0095 \quad 3,0095 \quad 17,3333 \quad 8,5333 \quad 8,5333 \quad 28,0000] \cdot \begin{bmatrix} 0,3206 \\ 0,3206 \\ 0,0599 \\ 0,1338 \\ 0,1338 \\ 0,0313 \end{bmatrix} = 6,1278$$

Ověření konzistence matice.

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,1278 - 6}{6 - 1} = 0,0256$$

$$0,0256 < 0,1$$

Ze získané hodnoty indexu je vidět, že matice je dostatečně konzistentní.

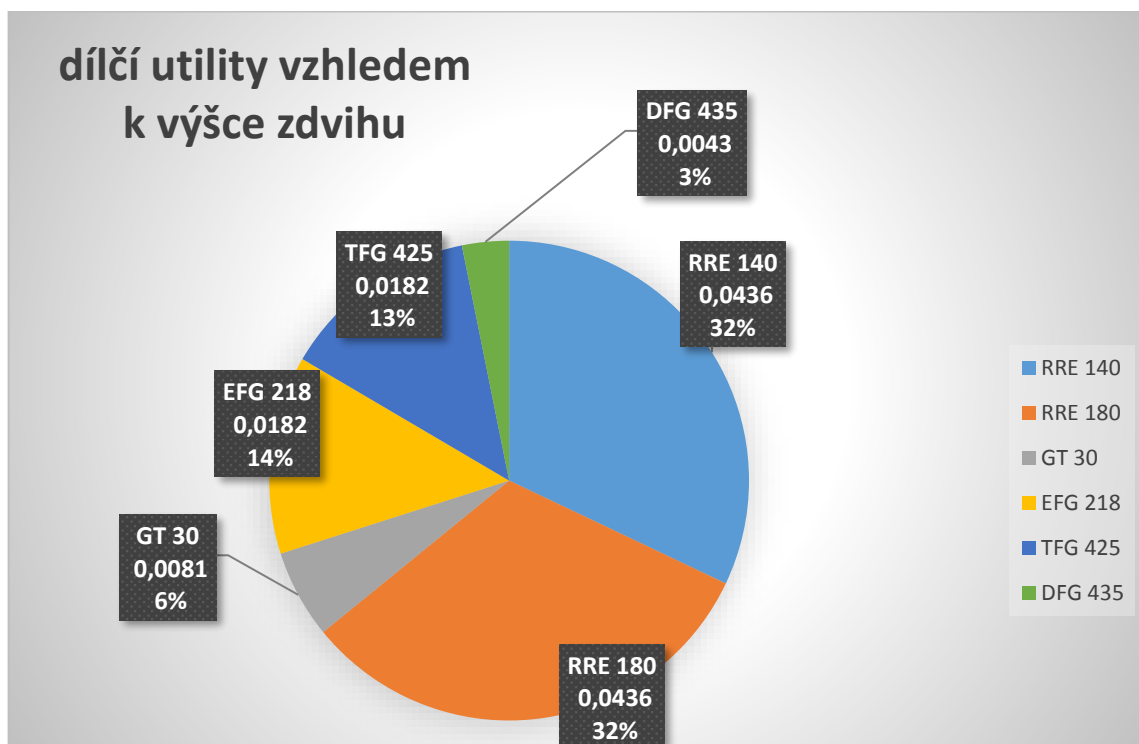
Hodnoty vah a vlastního čísla vypočítané pomocí metody geometrických průměrů a aplikace WolframAlpha jsou pro porovnání opět uvedeny v tab. 12.

Tabulka 12: Porovnání vozíků dle výšky zdvihu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,3206	0,3199
Nosnost	0,3206	0,3199
Výška zdvihu	0,0599	0,0607
Výška průjezdu	0,1338	0,1337
Druh pohonu	0,1338	0,1337
Místo provozu	0,0313	0,0320
λ_{\max}	6,1278	6,1564
C.I.	0,0256	0,0313

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 6 je graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k výšce zdvihu.



Obrázek 6: Hodnocení vozíků s ohledem na výšku zdvihu

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu lze konstatovat, že na 1. místě se umístily dva stroje, které mají výšku zdvihu alespoň 8 metrů. Jedná se o vozíky s označením RRE 140 a RRE 180. Naopak na posledním místě je technika s označením DFG 435.

4.2.4 Stroje dle kritéria „výška průjezdu“

Vyhodnocení strojů podle výšky průjezdu je uvedeno v tab. 13.

Tabulka 13: Hodnocení vozíků na základě výšky průjezdu

VÝŠKA PRŮJEZDU $v_4 = 0,0626$	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i4}
RRE 140	1	1/3	1/7	1/5	1/5	1/7	0,2546	0,0313	0,0019
RRE 180	3	1	1/5	1/3	1/3	1/5	0,4870	0,0599	0,0037
GT 30	7	5	1	3	3	1	2,6085	0,3206	0,0201
EFG 218	5	3	1/3	1	1	1/3	1,0889	0,1338	0,0084
TFG 425	5	3	1/3	1	1	1/3	1,0889	0,1338	0,0084
DFG 435	7	5	1	3	3	1	2,6085	0,3206	0,0201
Σ	28,000	17,3333	3,0095	8,5333	8,5333	3,0095	8,1364	1	0,0626

Zdroj: Vlastní zpracování

Výpočet λ_{max} vynásobením vektorů:

$$\lambda_{max} = [28,0000 \quad 17,3333 \quad 3,0095 \quad 8,5333 \quad 8,5333 \quad 3,0095] \cdot \begin{bmatrix} 0,0313 \\ 0,0599 \\ 0,3206 \\ 0,1338 \\ 0,1338 \\ 0,3206 \end{bmatrix} = 6,1279$$

Nyní můžeme ověřit konzistenci matice.

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,1279 - 6}{6 - 1} = 0,0256$$

$$0,0256 < 0,1$$

Z výsledku hodnoty indexu konzistence je vidět, že matice splňuje požadovanou konzistenci.

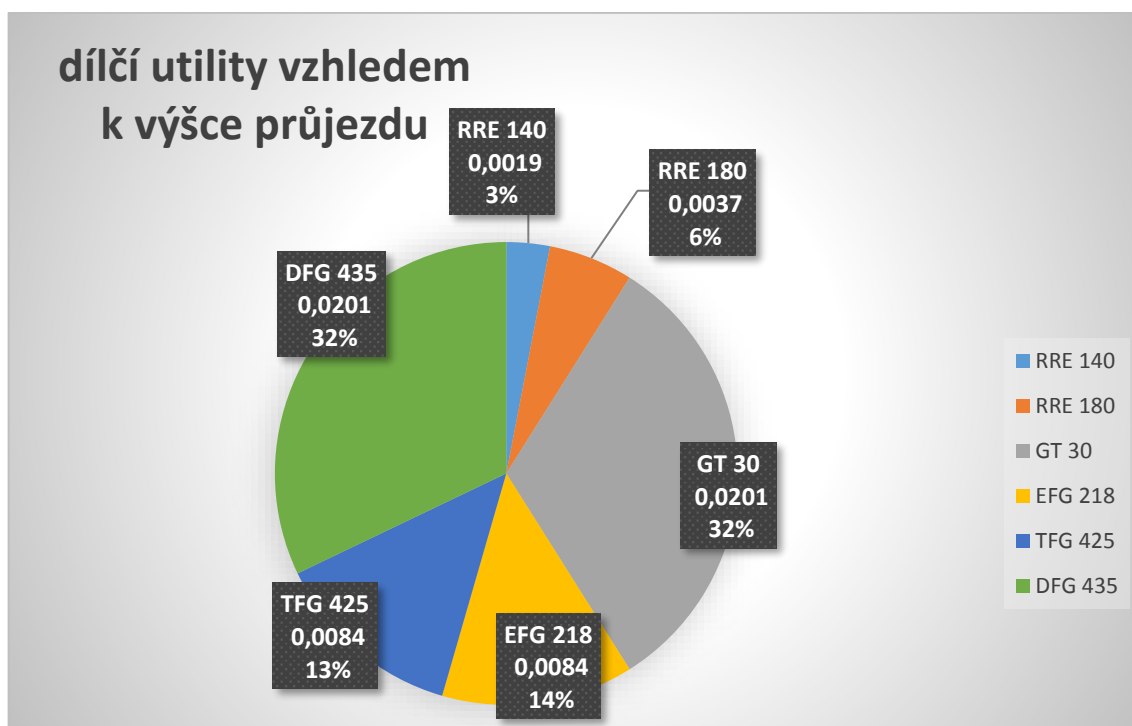
V tab. 14 jsou pro porovnání opět uvedeny hodnoty vah a vlastního čísla získané metodou geometrických průměrů a pomocí aplikace WolframAlpha.

Tabulka 14: Porovnání vah dle výšky průjezdu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,0313	0,3200
Nosnost	0,0599	0,0607
Výška zdvihu	0,3206	0,3199
Výška průjezdu	0,1338	0,1337
Druh pohonu	0,1338	0,1337
Místo provozu	0,3206	0,3199
λ_{\max}	6,1279	6,1564
C.I.	0,0256	0,0313

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 7 je vyobrazen graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k výšce průjezdu.



Obrázek 7: Hodnocení vozíků s ohledem na výšku průjezdu

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu je patrné, že na 1. místě se umístily vozíky, které mají výšku průjezdu do 2,2 metrů. Jedná se o vozíky s označením GF 30 a DFG 435. Naopak na posledním místě je stroj RRE 140, který má výšku průjezdu 5 metrů.

4.2.5 Stroje dle kritéria „druh pohonu“

Porovnání strojů podle druhu pohonu je uvedeno v tab. 15.

Tabulka 15: Hodnocení vozíků na základě druhu pohonu

DRUH POHONU $v_5 = 0,1360$	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i5}
RRE 140	1	1	5	3	5	9	2,9618	0,3372	0,0459
RRE 180	1	1	5	3	5	9	2,9618	0,3372	0,0459
GT 30	1/5	1/5	1	1/3	1	5	0,6368	0,0725	0,0099
EFG 218	1/3	1/3	3	1	3	7	1,3831	0,1575	0,0214
TFG 425	1/5	1/5	1	1/3	1	5	0,6368	0,0725	0,0098
DFG 435	1/9	1/9	1/5	1/7	1/5	1	0,2033	0,0231	0,0031
Σ	2,8444	2,8444	15,2000	7,8095	15,2000	36,0000	8,7836	1	0,1360

Zdroj: Vlastní zpracování

Výpočet λ_{max} :

$$\lambda_{max} = [2,8444 \quad 2,8444 \quad 15,2000 \quad 7,8095 \quad 15,2000 \quad 36,0000] \cdot \begin{bmatrix} 0,3372 \\ 0,3372 \\ 0,0725 \\ 0,1575 \\ 0,0725 \\ 0,0231 \end{bmatrix} = 6,1839$$

Nyní můžeme ověřit konzistenci matice.

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - k}{k - 1} = \frac{6,1839 - 6}{6 - 1} = 0,0368$$

$$0,0368 < 0,1$$

Na základě vypočteného indexu konzistence je matice dostatečně konzistentní.

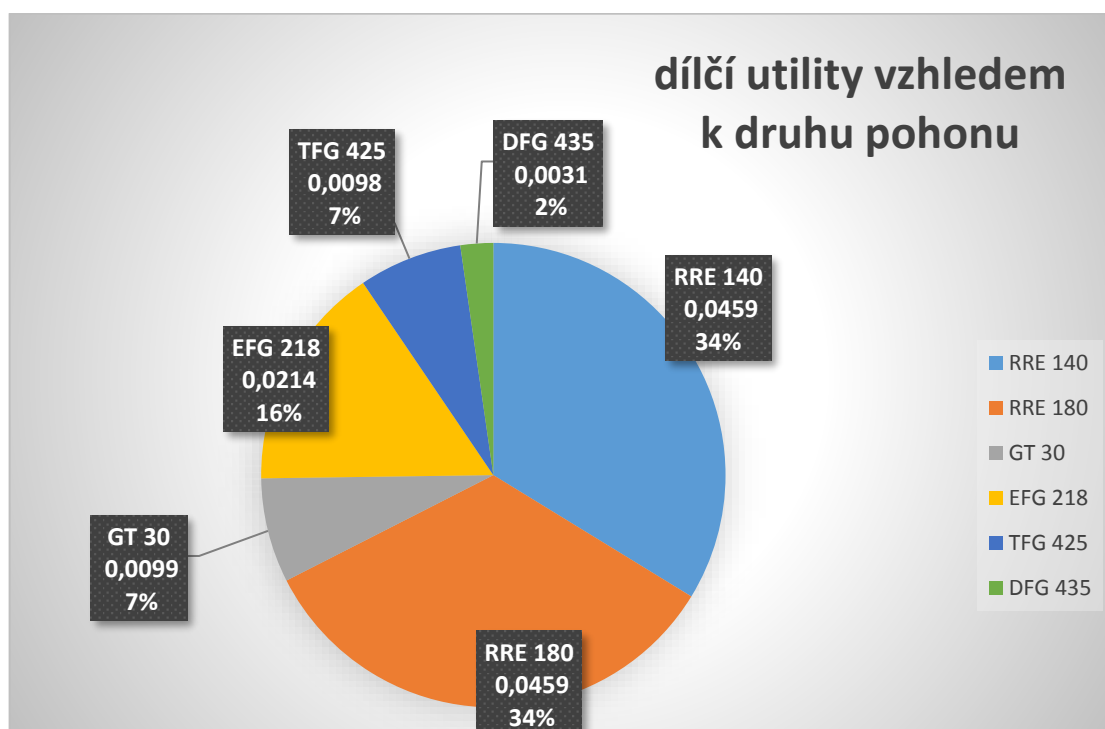
Hodnoty vah a vlastního čísla vypočítané pomocí aplikace WolframAlpha a metody geometrických průměrů jsou pro porovnání opět uvedeny v tab. 16.

Tabulka 16: Porovnání vah dle výšky průjezdu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,3372	0,3358
Nosnost	0,3372	0,3358
Výška zdvihu	0,0725	0,0728
Výška průjezdu	0,1575	0,1586
Druh pohonu	0,0725	0,0728
Místo provozu	0,0231	0,0242
λ_{max}	6,1839	6,2316
C.I.	0,0368	0,0463

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 8 je graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k druhu pohonu.



Obrázek 8: Hodnocení voziků s ohledem na druh pohonu

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu se dá vyčíst, že na 1. místě se umístily vozíky, které mají elektrický pohon s gelovou baterií. Jedná se o vozíky RRE 140 a RRE 180. Naopak na posledním místě je diesellový vozík DFG 435, který není pro použití v hale zrovna ideálním řešením.

4.2.6 Stroje dle kritéria „místo provozu“

Vyhodnocení strojů podle místa provozu je uvedeno v tab. 17.

Tabulka 17: Hodnocení vozíků na základě místa provozu

MÍSTO POUŽÍVÁNÍ $v_6 = 0,0228$	RRE 140	RRE 180	GT 30	EFG 218	TFG 425	DFG 435	R_i	w_i	u_{i6}
RRE 140	1	1	1/3	1/3	1/3	1/3	0,4807	0,0714	0,0016
RRE 180	1	1	1/3	1/3	1/3	1/3	0,4807	0,0714	0,0016
GT 30	3	3	1	1	1	1	1,4422	0,2143	0,0049
EFG 218	3	3	1	1	1	1	1,4422	0,2143	0,0049
TFG 425	3	3	1	1	1	1	1,4422	0,2143	0,0049
DFG 435	3	3	1	1	1	1	1,4422	0,2143	0,0049
Σ	14,0000	14,0000	4,6667	4,6667	4,6667	4,6667	6,7302	1	0,0228

Zdroj: Vlastní zpracování

Výpočet λ_{max} vynásobením vektorů:

$$\lambda_{max} = [14,0000 \quad 14,0000 \quad 4,6667 \quad 4,6667 \quad 4,6667 \quad 4,6667] \cdot \begin{bmatrix} 0,0714 \\ 0,0714 \\ 0,2143 \\ 0,2143 \\ 0,2143 \\ 0,2143 \end{bmatrix} = 6,0000$$

Nyní není potřeba konzistenci matice ověřovat, protože se jedná o případ, kdy je matice plně konzistentní. To je možné ověřit následujícím zkušebním propočtem podle vzorečku (3.5)

$$s_{12} \cdot s_{25} = s_{15}$$

$$1 \cdot 1/3 = 1/3$$

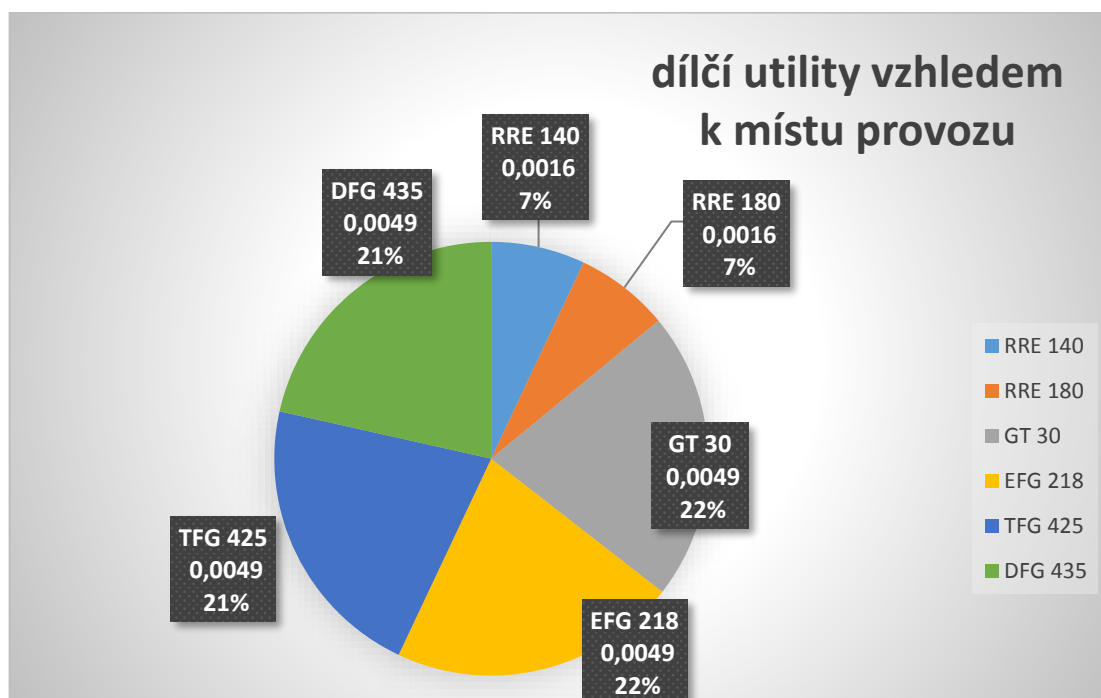
V tab. 18 jsou pro porovnání opět uvedeny hodnoty vah a vlastního čísla vypočítané pomocí aplikace WolframAlpha a metody geometrických průměrů.

Tabulka 18: Porovnání vah dle místa provozu získaných metodou geometrických průměrů a výpočtem vlastních hodnot matice programem WolframAlpha

	Metoda geometrických průměrů	Vlastní hodnoty matice programem WolframAlpha
Cena	0,0714	0,0714
Nosnost	0,0714	0,0714
Výška zdvihu	0,2143	0,2143
Výška průjezdu	0,2143	0,2143
Druh pohonu	0,2143	0,2143
Místo provozu	0,2143	0,2143
λ_{max}	6,0000	6,0000
C.I.	0	0

Zdroj: Vlastní zpracování

Na obr. 9 je graf porovnávající hodnocení strojů vzhledem k místu provozu.



Obrázek 9: Hodnocení vozíků s ohledem na místo provozu

Zdroj: Vlastní zpracování

Z uvedeného grafu lze vyčíst, že čtyři stroje mají vyšší hodnocení než dva ostatní. Je to dáno tím, že vozíky RRE 140 a RRE 180 jsou vhodné pouze k vnitřnímu provozu.

4.3 Celkové zhodnocení výběru vysokozdvížného vozíku

Nyní jsou známy jednotlivé utility podle všech kritérií a může dojít k výběru manipulační techniky, která bude podle zvolených parametrů pro realizaci ideální. V tab. 19 jsou zaznamenány výsledky předchozích propočtů.

Tabulka 19: Tabulka výsledného pořadí vysokozdvížných vozíků

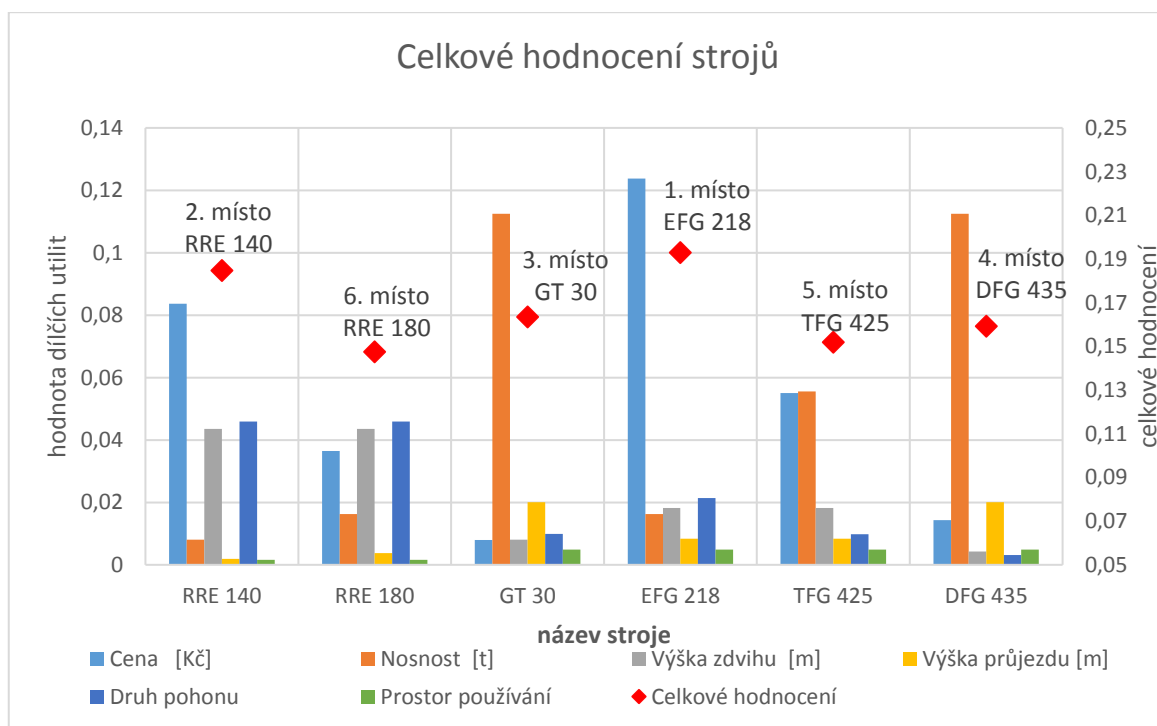
	Cena [Kč]	Nosnost [t]	Výška zdvihu [m]	Výška průjezdu [m]	Druh pohonu	Místo provozu	u_i	Pořadí
RRE 140	0,0837	0,0081	0,0436	0,0019	0,0459	0,0016	0,1848	2.
	650 000	1,4	12	5	elektrický – gelová baterie	v hale		
RRE 180	0,0365	0,0163	0,0436	0,0037	0,0459	0,0016	0,1476	6.
	800 000	1,8	8	3	elektrický – gelová baterie	v hale		
GT 30	0,0080	0,1125	0,0081	0,0201	0,0099	0,0049	0,1635	3.
	1 300 000	3	4,5	2	spalovací plynový	v hale i uvnitř		
EFG 218	0,1238	0,0163	0,0182	0,0084	0,0214	0,0049	0,1930	1.
	520 000	1,8	5,5	2,4	elektrický kyselinová baterie	v hale i uvnitř		
TFG 425	0,0550	0,0556	0,0182	0,0084	0,0098	0,0049	0,1519	5.
	760 000	2,5	5,5	2,5	spalovací plynový	v hale i uvnitř		
DFG 435	0,0143	0,1125	0,0043	0,0201	0,0031	0,0049	0,1592	4.
	1 100 000	3,5	4	2,2	spalovací dieselový	v hale i uvnitř		

Zdroj: Vlastní zpracování

U každého stroje se součtem dílčích hodnocení získá celková utilita. Podle její velikosti se sestaví pořadí vozíků tak, že nejvyšší hodnota celkové utility odpovídá nejlépe hodnocenému stroji. Aby bylo na první pohled jasné, jaké má vítězný stroj parametry, je do tabulky hodnocení ke každému stroji přidán řádek s těmito údaji.

Jako optimální výběr se jeví stroj EFG 218. Tento vysokozdvíhový vozík má skutečně nejnižší cenu, které byla spolu s nosností jako nejdůležitější kritérium. Co se právě ale nosnosti týká, zde se stroj umístil až ve druhé polovině všech míst. Jelikož ale v tomto ukázkovém příkladu nebyla stanovena minimální nosnost, kterou musí vozík splňovat, považuje se za dostatečnou. Kdyby však byla od začátku stanovena vyšší hodnota nosnosti, stroj by byl z nabídky vyřazen a do hodnocení by se vůbec nedostal. Mezi další dvě důležitá kritéria patří výška zdvihu a druh pohonu. Zvolený stroj má výšku zdvihu 5,5 m, což je považováno obvykle za postačující a často poptávané. Pohon je elektrický, takže provoz stroje je tichý a šetrný k životnímu prostředí. Jedinou překážkou by mohla být kyselinová baterie, která musí mít na nabíjení samostatnou místnost. Za méně důležité kritérium je v tomto příkladu považována výška průjezdnosti. S tou se vozík pohybuje mezi těmi nižšími, tedy s výškou 2,4 metrů. Jako velmi slabé kritérium je považováno místo, kde se bude stroj používat. I zde si vozík stojí velmi dobře, protože se může používat jak v uzavřených, tak v otevřených prostorech.

Na samém konci příkladu je na obr. 10 znázorněn graf celkového hodnocení.



Obrázek 10: Celkové hodnocení vysokozdvíhových vozíků

Zdroj: Vlastní zpracování

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo shrnout základní poznatky o vlastních číslech a vlastních vektorech matic, přiblížit jejich historický vývoj a nastínit jejich využití v praxi.

Matematická část teorie o problematice vlastních veličin a o vztazích mezi maticemi byla popsána v první kapitole. Vysvětluje základní pojmy a nutné výpočty k dosažení požadovaných vlastních veličin matic. Pro lepší pochopení je uveden jednoduchý příklad. Na tyto základy navazuje výklad o druzích matic a o vztazích mezi nimi. Na závěr kapitoly je přiblížena problematika matice v Jordanově tvaru.

Druhá kapitola pojednává o tom, proč a v jakém oboru se vlastní čísla a vlastní vektory začaly vyskytovat, kdo z matematiků, fyziků, astronomů, zkrátka kteří vědci z různých oborů je ve své práci používali. Z českých vědců je přiblížena práce Eduarda Weyra. Na konci kapitoly je zmínka o Thomasovi Saatym, který charakteristické veličiny matic využívá ve své metodě AHP.

Využívání v praxi té části lineární algebry, o které tato práce vypovídá, je vysvětlena na problematice rozhodování. Každý rozhodovací proces v sobě ukrývá spoustu nejasností a je důležité se správně rozhodnout. K tomu slouží několik metod, z nichž jedna je postavena právě na výpočtu maximálního vlastního čísla a jemu příslušného vektoru. Tento vektor je klíčový pro hodnocení jednotlivých alternativ. Vše vysvětluje třetí kapitola, kde na začátku jsou popsány nejdůležitější pojmy z rozhodování a poté je popsáno vícekriteriální hodnocení variant metodou AHP. Jedná se o velice oblíbenou metodu, jejíž výhodou je to, že mezi sebou porovnává kritéria jak kvantitativní, tak i kvalitativní. Její postup se dá využít na rozhodování o celé řadě situací, ať už se jedná o výběr vhodného místa pro podnikání, o zvolení vhodného kandidáta na jakoukoli pozici, o volbě dodavatele nebo třeba o výběr nejvhodnější alternativy pro investici. Vždy je pouze důležité správně zvážit jednotlivé preference.

V poslední kapitole je metoda AHP představena na konkrétním příkladu, kdy se firma rozhoduje o pořízení potřebné manipulační techniky v podobě vysokozdvížného vozíku. Na tomto příkladu je vidět, že postup rozhodovacího procesu je skutečně jednoduchý a dá se použít i bez výpočetní techniky

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BEČVÁŘ, J. *Eduard Weyr 1852-1903*. Praha: Prometheus, 1995. 196 s. ISBN 80-7196-024-1
- [2] BEČVÁŘ J. *Z historie lineární algebry*. Praha: Matfyzpress, 2007. str. 519. ISBN 978-80-7378-036-4.
- [3] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. 304 s. ISBN 978-80-200-1707-9.
- [4] FIALA, P., JABLONSKÝ, J., MAŇAS M. *Vícekritériální rozhodování*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1997. 316 s. ISBN 80-7079-748-7.
- [5] FOTR, J., DĚDINA J., HRŮZOVÁ, H. *Manažerské rozhodování*. Vyd. 2. Praha: Ekopress, 2000. 231 s. ISBN 80-86119-20-3.
- [6] FOTR, J., PÍŠEK, M. *Exaktní metody ekonomického rozhodování*. Praha: Academia, 1986. 165 s. ISBN 21-013-86.
- [7] HOJDAROVÁ, M. *Lineární algebra*. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2012. 95 s. ISBN 978-80-87035-65-8.
- [8] CHATELIN, F. *Eigenvalues of Matrices. Revised Edition*. SIAM, 2012. xxx+392 s. ISBN 978-1-61197-245-0.
- [9] JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ, M. *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Praha: Professional Publishing, 2004. 183 s. ISBN 80-86419-49-5.
- [10] KRAJNÍK, E. *Základy maticového počtu* [online]. 2006 [cit. 4. 4. 2017]. Dostupné z https://www.researchgate.net/publication/47141898_Zaklady_maticoveho_poctu
- [11] OLŠÁK, P. *Lineární algebra* [online]. 2007 [cit. 18. 3. 2017]. Dostupné z <http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal.pdf>
- [12] RAMÍK, J. *Vícekritériální rozhodování - analytický hierarchický proces (AHP)*. Karviná: Slezská univerzita, 1999. 211 s. ISBN 80-7248-047-2.
- [13] ROKYTA, M. *Aplikovaná matematika III* [online]. 2011 [cit. 5. 3. 2017]. Dostupné z https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/1112/zs/F_apl_mat/ApMat_III_komplet.pdf