Markéta Brázdová[1]

Lokace odbavovacího centra nákladní pokladny pro víkendový provoz

Klíčová slova: *odbavování zásilek, centrum grafu, vážená excentricita vrcholů sítě, časová náročnost odbavení zásilky, vážená excentricita odbavení zásilky.*

Úvod

Při víkendovém provozu ČD Cargo, a.s. je omezen počet pokladen odbavujících zásilky nákladní přepravy. Proto je třeba stanovit jednu centrální pokladnu dané oblasti, která bude zásilky odbavovat. Cílem úlohy je vybrat, která ze stávajících pokladen na síti má být tímto víkendovým odbavovacím centrem.

1. Charakteristika úlohy odbavování zásilek

Během víkendového provozu ČD Cargo, a.s. nejsou všechny stanice pro nákladní provoz plně obsluhovány. Zákazník, který chce podat zásilku, musí k zásilce připojit i nákladní list. Tento nákladní list vyřizuje zákazník v odbavovacím centru, kterým má být jedna ze stávajících pokladen na síti. Pokud zásilka projíždí odbavovacím centrem, nákladní list lze vyřídit přímo v tomto centru během průjezdu zásilky. Pokud zásilka odbavovacím centrem neprojíždí, je třeba nákladní list vyřídit v odbavovacím centru ještě před začátkem přepravy zásilky. Úkolem je určit na síti takové centrum, které minimalizuje celkový čas potřebný na vyřízení nákladního listu - odbavení zásilky.

2. Řešení lokačních úloh

Popsaná úloha je jednou z mnoha různorodých úloh spadajících do kategorie lokačních problémů. Situaci je možné interpretovat pomocí teorie grafů (1) následovně. Stávající pokladny tvoří vrcholy sítě, železniční tratě pak chápeme jako hrany grafu. Cílem je určit na síti jedno depo (obecně je možné umísťovat i více dep), ze kterého (ze kterých) budou zbývající vrcholy sítě obsluhovány. Podle charakteru úlohy je možné použít k řešení různé typy algoritmů. Při umísťování objektu s kritériem minimalizace součtu euklidovských vzdáleností je vhodné použití např. metodu hyperbolické aproximace (2). Tato metoda může sloužit k numerickému řešení úloh umístění jednoho bodového objektu v rovině vzhledem ke stávajícím objektům na síti. Jsou známy souřadnice stávajících objektů o_i (a_i, b_i) a jejich váhy w_i. Úloha vede na nalezení minima účelové funkce

---

[1] Ing. Markéta Brázdová, Ph.D., ČVUT Praha – Fakulta elektrotechnická, obor Technická kybernetika, v současnosti odborná asistentka - Univerzita Pardubice – DFJP, zaměření Operační analýza.

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} w_i \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \rightarrow \min . \qquad (1)$$

Z nutných a postačujících podmínek pro nalezení extrému funkce se iterační procedurou postupným zpřesňováním určí souřadnice umísťovaného objektu (x, y).

Výsledné umístění objektu však při použití této metody nemusí být totožné s některým ze stávajících objektů. Pro úlohu umístění odbavovacího centra tedy není tato metoda příliš vhodná, protože je dle zadání třeba, aby tímto odbavovacím centrem byla některá ze stávajících pokladen na síti.

Pro umístění jediného objektu na síti, kde kritériem je minimalizace vážených excentricit, se používá také Hakimiho algoritmus (3). Hakimiho algoritmus slouží k nalezení optimálního umístění jednoho bodového objektu vzhledem ke stávajícím objektům na síti na základě minimalizace vážené excentricity bodu *y* na hraně grafu. Vážená excentricita bodu *y* na hraně (v_i, v_j) se určí jako

$$ec(v)=\max_{u\in V}\{d(y,v)\cdot w(u)\}, \qquad (2)$$

kde vzdálenost bodu y na hraně (v_i, v_j) od vrcholu *u* určíme jako

$$d(y,u)=\min\{[e(v_i,y)+d(v_i,u)];[e(y,v_j)+d(v_j,u)]\}. \qquad (3)$$

Bod *y* je na hraně (v_i, v_j) umístěn ve vzdálenosti $e(v_i,y)$ od vrcholu v_i a $e(y,v_j)$ od vrcholu v_j.

Optimálním umístěním je pak bod y^*, pro který platí

$$ec(y^*)=\min_{y\in G}\{ec(y)\}, \qquad (4)$$

Ani tento algoritmus se však pro popsanou úlohu nejeví jako vhodný, protože výsledné umístění centra obsluhy v tomto případě opět nemusí být do stávajících vrcholů na síti, ale může dojít (a často dochází) k situaci, kdy optimální umístění depa je na hraně grafu.

Z těchto důvodů se zdá být pro umístění odbavovacího centra nejvhodnější vycházet z algoritmu pro hledání centra grafu. Protože ale zadání úlohy přesně neodpovídá charakteru centra grafu, je třeba kritérium úlohy (4) upravit, aby odpovídalo požadavkům kladeným na umístění odbavovací pokladny.

3. Metoda stanovení odbavovacího centra

Výchozím algoritmem pro řešení úlohy je algoritmus na určení centra grafu. Centrum grafu je tvořeno množinou centrálních vrcholů. Pro centrální vrchol platí:

$$e(v)=r(G), \qquad (5)$$

kde $e(v)$ je excentricita vrcholu v, $r(G)$ je rádius grafu G (3).

Excentricita vrcholu *v* se určí jako maximální vzdálenost k jinému vrcholu na grafu G:

$$e(v) = \max_{u \in V} \{d(u,v)\}, \tag{6}$$

kde *e*(*v*) je excentricita vrcholu *v*, *d*(*u*, *v*) je vzdálenost vrcholů *u* a *v* (3).

Rádius (poloměr) grafu *G* je číslo stanovené jako minimum z excentricit všech vrcholů na grafu *G*:

$$r(G) = \min_{v \in V} \{e(v)\}, \tag{7}$$

kde *e*(*v*) je excentricita vrcholu *v*, *r*(*G*) je rádius grafu *G* (3).

3.1 Vážená excentricita vrcholů sítě

Pro účely umístění odbavovacího centra za podmínek stanovených v zadání úlohy je však třeba vzít v úvahu také počty odbavených zásilek v pokladnách na železniční síti. Tyto počty odbavených zásilek budou představovat váhy jednotlivých vrcholů sítě. V úloze je proto nutné uvažovat minimalizaci vážené excentricity vrcholů. Váhy budou stanoveny podle počtu odbavených zásilek ve vrcholech a také podle toho, kolik dalších zásilek podaných v jiných vrcholech sítě bude procházet přes daný vrchol.

Vážená excentricita vrcholu *v* se určí jako maximum ze součinů váhy vrcholu a vzdálenosti mezi vrcholy na grafu G:

$$ec(v) = \max_{u \in V} \{w(u) \cdot d(u,v)\}, \tag{8}$$

kde *ec*(*v*) je vážená excentricita vrcholu *v*, *w*(*u*) je váha vrcholu *u* a *d*(*u*, *v*) je vzdálenost vrcholů *u* a *v* (3).

Vzdálenost *d*(*u*,*v*) mezi vrcholy *u*, *v* je definována jako délka minimální cesty mezi těmito vrcholy:

$$d(u,v) = \min_{m(u,v) \in M} \left\{ \sum_{h \in m(u,v)} o(h) \right\}, \tag{9}$$

kde *d*(*u*, *v*) je vzdálenost vrcholů *u* a *v*, *M* je množina všech cest, které existují mezi vrcholy *u* a *v*, *o*(*h*) je ohodnocení hrany *h* (3). Toto ohodnocení hrany bude představovat délku úseku železniční tratě mezi vrcholy *u* a *v*.

Vzdálenost *d*(*u*,*v*) mezi vrcholy *u* a *v je* možné získat několika různými algoritmy. Vhodnost použití těchto algoritmů je závislá na typu železniční sítě, a tím tedy na typu grafu, který vznikne převedením železniční sítě na tento matematický útvar. Pravděpodobně nejvhodnějším algoritmem, který je univerzálně použitelný pro získání vzdáleností $d(u,v)$ mezi vrcholy u a v, je Floydův algoritmus (5), jehož výstupem je tzv. distanční matice. Prvky této matice jsou přímo hledané vzdálenosti $d(u,v)$ (6). Floydův algoritmus vychází z matice přímých vzdáleností na grafu (prvek $d(i,j)$ matice obsahuje délky hran grafu, pokud mezi vrcholy v_i a v_j existuje hrana, prvek $d(i,j)$ je ∞, pokud hrana neexistuje a prvek $d(i,j)$ je nulový pro $i = j$). Postupným přepočtem matice se matice přímých vzdáleností převádí na distanční matici. V každé iteraci výpočtu se určuje, zda je možné dosud nejlepší nalezenou cestu mezi vrcholy v_i a v_j zkrátit přes vrchol v_k. Za vrchol v_k jsou postupně dosazovány všechny vrcholy grafu ($k = 1,..., n$; kde n je počet vrcholů grafu).

3.2 Časová náročnost odbavení zásilky

Při stanovení kriteriální (účelové) funkce úlohy (7) je nutné uvažovat i časovou náročnost odbavení zásilky. Při odbavení zásilky mohou nastat následující situace:

- Zásilka bude projíždět odbavovacím centrem, nákladní list bude vyřízen v průběhu přepravy zásilky. Časová náročnost úkonu je t (časových jednotek). Tuto hodnotu lze považovat za konstantní pro všechny vrcholy sítě, jde o čas potřebný pro vyřízení dokumentu přímo na odbavovací pokladně, který by měl být na všech odbavovacích místech přibližně stejný.
- Zásilka nebude odbavovacím centrem projíždět – nákladní list je třeba vyřídit předem - časová náročnost úkonu je t_{uv} (časových jednotek). Tato hodnota je závislá na vzdálenosti odbavovací pokladny umístěné ve vrcholu v od místa podání zásilky ve vrcholu u. Je tedy přímo úměrná vzdálenosti $d(u, v)$ mezi vrcholy u a v.

3.3 Vážená excentricita odbavení zásilky

Z časové náročnosti odbavení zásilky a váhy vrcholů bude stanovena vážená excentricita odbavení zásilky ve vrcholu v. Tato vážená excentricita pak bude použita do kriteriální funkce úlohy.

Vážená excentricita odbavení zásilky ve vrcholu v:

$$etc(v) = (w(v) + \sum_{u_i \in V} w^*(u_i)) \cdot t + \sum_{uj \in V} w^{**}(u_j) \cdot t_{u_j v}, \tag{10}$$

kde $etc(v)$ je vážená excentricita odbavení zásilky ve vrcholu v, $w(v)$, $w^*(u_i)$, $w^{**}(u_j)$ jsou váhy vrcholů v, u_i, u_j. Časová náročnost odbavení zásilky je t, pokud zásilka bude projíždět odbavovacím centrem. Časová náročnost odbavení zásilky podané ve vrcholu u_j na pokladně umístěné ve vrcholu v je $t_{u_j v}$. Zásilky podané ve vrcholech u_i projíždí odbavovacím centrem, a budou tedy odbaveny v průběhu přepravy zásilky, zásilky podané ve vrcholech u_j odbavovacím centrem neprojíždí, a musí být tedy odbaveny ještě před začátkem přepravy zásilky.

3.4 Kritérium úlohy

Odbavovací pokladna bude umístěna do takového vrcholu grafu, pro který platí, že jeho vážená excentricita odbavení zásilky je minimální:

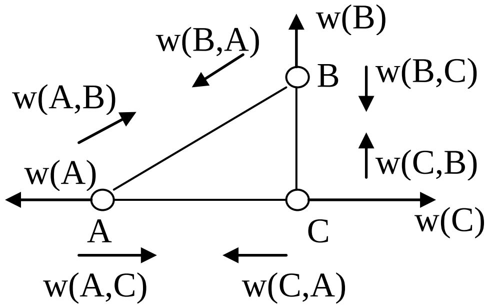
$$f(r) = \min_{v \in V}\{etc(v)\}, \tag{11}$$

kde *etc*(*v*) je vážená excentricita odbavení zásilky ve vrcholu *v*, *r* je vrchol, do kterého bude odbavovací centrum umístěno.

4. Modelová situace

Z informací dostupných u společnosti ČD Cargo, a.s. vyplývá, že problematika umísťování odbavovací pokladny byla dosud řešena pouze z organizačních a personálních hledisek kvalifikovanými odhady. Metoda založená na matematických základech se prozatím při řešení této problematiky neuplatňovala.

Konkrétní údaje o počtech zásilek nejsou veřejně dostupné. Proto bude úloha simulována pouze na modelovém příkladu. Předpokládejme pro názornost jednoduchou situaci znázorněnou na obr. 1:



Zdroj: autor

Obr. 1 – Modelová situace

Vrcholy *A*, *B*, *C* představují stávající pokladny na síti. Jsou dány počty zásilek, které se podávají v jednotlivých vrcholech *A*, *B*, *C* a nebudou projíždět přes ostatní vrcholy. Tyto hodnoty představují váhy vrcholů *w*(*A*), *w*(*B*), *w*(*C*). Dále je známo, kolik zásilek bude z vrcholu *A* projíždět ve směru přes vrchol *B* a kolik zásilek bude z vrcholu *A* projíždět ve směru přes vrchol *C*. Tyto hodnoty představují další váhy vrcholů *w*(*A*, *B*) a *w*(*A*, *C*). Obdobně známe váhy *w*(*B*, *A*), *w*(*B*, *C*) a *w*(*C*, *A*), *w*(*C*, *B*).

Určíme vážené excentricity odbavení zásilek pro každý vrchol sítě:

$$etc(A) = [w(A) + w(A,B) + w(A,C) + w(B,A) + w(C,A)] \cdot t + [w(B) + w(B,C)] \cdot t_{B,A} + [w(C) + w(C,B)] \cdot t_{C,A}$$

(12)

$$etc(B) = [w(B) + w(B,A) + w(B,C) + w(A,B) + w(C,B)] \cdot t + [w(A) + w(A,C)] \cdot t_{A,B} + [w(C) + w(C,A)] \cdot t_{C,B}$$

(13)

$$etc(C) = \left[w(C) + w(C,A) + w(C,B) + w(A,C) + w(B,C)\right] \cdot t + \left[w(A) + w(A,B)\right] \cdot t_{A,C} + \left[w(B) + w(B,A)\right] \cdot t_{B,C}$$

(14)

kde t je časová náročnost odbavení zásilky, pokud zásilka bude projíždět odbavovacím centrem, $t_{A,B}$ je časová náročnost odbavení zásilky podané ve vrcholu *A* na pokladně umístěné ve vrcholu *B*, atd.

Podle kritéria lze pak určit optimální umístění odbavovací pokladny:

$$f(r) = \min_{v \in \{A,B,C\}} \{etc(v)\} \tag{15}$$

Pokladna bude umístěna do vrcholu $r \in \{A, B, C\}$, který bude mít minimální váženou excentricitu odbavení zásilky.

Závěr

Cílem úlohy bylo stanovení optimálního umístění odbavovací pokladny při víkendovém provozu na ČD Cargo, a.s. K řešení úlohy je vhodné použít metody operačního výzkumu, speciálně teorie grafů. Jako nejvhodnější se ukázalo užití algoritmu pro umístění centra grafu. Algoritmus však přesně neodpovídal specifikacím uvedeným v zadání úlohy, bylo proto třeba jej částečně modifikovat. Tato modifikace se týkala stanovení vah vrcholů a určení vážené excentricity odbavení zásilky. S využitím minimalizačního kritéria pak lze stanovit optimální umístění odbavovacího centra na síti.

Použitá literatura

(1) SEDLÁČEK, Jiří. *Úvod do teorie grafů*. 2. vyd. Praha: Academia, 1977. 228 s.

(2) DUDORKIN, Jiří. *Operační výzkum.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. 296 s. ISBN 80-01-02469-5.

(3) VOLEK, Josef a Bohdan LINDA. *Teorie grafů – aplikace v dopravě a veřejné správě.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012. 192 s. ISBN 978-80-7395-225-9.

(4) VOLEK, Josef a Bohdan LINDA. *Lineární programování.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007. 140 s. ISBN 978-80-7395-038-5.

(5) DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Praha: Academia, 2002. 257 s. ISBN 80-200-0990-6.

(6) PASTOR, Otto a Antonín TUZAR. *Teorie dopravních systémů*. Praha: ASPI, 2007. 312 s. ISBN 978-80-7357-285-3.

(7) BRÁZDOVÁ, Markéta. *Řešené úlohy lineárního programování.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. 158 s. ISBN 978-80-7395-361-4.