

UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

**VYTVOŘENÍ A VERIFIKACE MATEMATICKÉHO MODELU
INVERZNÍHO KYVADLA**

David Mucha

Závěrečná práce
2015

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **David Mucha**
Osobní číslo: **I12275**
Studijní program: **B2646 Informační technologie**
Studijní obor: **Řízení procesů**
Název tématu: **Vytvoření a verifikace matematického modelu inverzního kyvadla**
Zadávací katedra: **Katedra řízení procesů**

Zásady pro vypracování:

Cílem této práce je vytvoření matematického modelu reálného zařízení na základě matematicko-fyzikální analýzy, konkrétně inverzního kyvadla. Neoddělitelnou součástí práce je i identifikace parametrů modelu a jeho následná verifikace.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

MIKLEŠ, J.; FIKAR, M. Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov I.

Bratislava: STU Bratislava, 1999. 192 s. ISBN 80-227-1289-2.

DUŠEK, F. Matlab a Simulink - úvod do používání - druhé vydání. Pardubice:

Univerzita Pardubice, 2002. 158 s. ISBN 80-7194-457-0.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Pavel Škrabánek, Ph.D.

Katedra řízení procesů

Datum zadání bakalářské práce:

1. prosince 2014

Termín odevzdání bakalářské práce:

11. května 2015



prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan



L.S.



Ing. Daniel Honc, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 31. března 2015

Prohlášení

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 04. 05. 2015

David Mucha

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu panu Ing. Pavlu Škrabánkovi Ph.D. za velkou ochotu a trpělivost, poskytnutí informací i cenných rad. Dále musím poděkovat své rodině za podporu během celého studia.

V Pardubicích dne 04. 05. 2015

David Mucha

ANOTACE

Práce je věnována vytvoření matematického modelu inverzního kyvadla. Model byl odvozen ze silových bilancí působících na systém. Model byl následně vytvořen ve výpočetním prostředí MATLAB nástavby Simulink. Nedílnou součástí práce je identifikace parametrů. Matematický model byl porovnán s reálným model.

KLÍČOVÁ SLOVA

Inverzní kyvadlo, modelování, numerická simulace, identifikace, verifikace.

TITLE

Derivation and verification of an inverse pendulum math model

ANNOTATION

The work is dedicated to creating a mathematical model of the inverted pendulum. The model is derived from the force balance acting on the system. The model has been realized in the computing environment Simulink MATLAB. The identification of model parameters is the integral part of the work. The model has been verified by experiments on the real model.

KEYWORDS

Inverted pendulum, modeling, numerical simulation, identification, verification.

Obsah

Seznam zkratk	8
Seznam značek	9
Seznam ilustrací (obrázků)	11
Seznam tabulek	12
ÚVOD.....	13
1 TEORETICKÁ ČÁST	14
1.1 MODELOVÁNÍ.....	14
1.2 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ	15
1.2.1 Vytvoření matematických modelů	15
1.2.2 Klasifikace matematických modelů	17
1.3 IDENTIFIKACE	17
1.3.1 Experimentální identifikace parametrů	18
1.4 NUMERICKÁ SIMULACE.....	19
1.4.1 Princip numerických metod.....	20
1.4.2 Numerické metody	20
2 POPIS LABORATORNÍHO MODELU	25
3 PRAKTICKÁ ČÁST	28
3.1 VYTVOŘENÍ MATEMATICKÉHO MODELU	28
3.2 SESTAVENÍ MATEMATICKÉHO MODELU V SIMULINKU	35
3.3 IDENTIFIKACE MATEMATICKÉHO MODELU.....	37
3.4 VERIFIKACE MATEMATICKÉHO MODELU	38
ZÁVĚR.....	40
Literatura.....	42
Seznam příloh	44

Seznam zkratek

MATLAB	Matrix laboratory
CNC	Computer Numeric Control
PWM	Pulse Width Modulation
DC	Direct Current
USB	Universal Serial Bus

Seznam značek

x_0	počáteční podmínka, která je součástí zadání funkce
y_0	počáteční podmínka, která je součástí zadání funkce
x	nezávisle proměnná určující bod funkce
y	nezávisle proměnná určující bod funkce
x	souřadnice v kartézském systému určující polohu vozíku a ramene, m
y	souřadnice v kartézském systému určující polohu ramene, m
x_{n-1}	předchozí bod funkce
x_n	bod funkce
x_{n+1}	následující bod funkce
n	nezávisle proměnná, která určuje řád (krok) numerické metody
h	určuje vzdálenost (krok) mezi sousedními body v numerických metodách
w	nezávisle proměnná, která určuje váhu derivace
k	nezávisle proměnná, určující počet odhadů derivace
α	koeficient obsažen v odhadu derivace
β	koeficient obsažen v odhadu derivace
i	nezávisle proměnná
F_p	působící síla, $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
F_t	třecí síla, $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
F_x	síla působící proti síle F_p , $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
F_y	tíhová síla, $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
M_v	hmotnost vozíku, kg
m	hmotnost ramene, kg
l	délka ramene, m
A	vzdálenost těžiště ramene od osy otáčení, m
a	zrychlení, $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
g	tíhové zrychlení, $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
f	koeficient tření
x_{TE}	souřadnice těžiště ramene v ose x
y_{TE}	souřadnice těžiště ramene v ose y

φ	úhly natočení ramene, rad
M	moment síly, N·m
I	moment setrvačnosti, kg·m ²

Seznam ilustrací (obrázků)

Obr. 1.1 – Vytvoření matematického modelu.....	15
Obr. 1.2 – Identifikační cyklus	18
Obr. 2.1 – Laboratorní model	25
Obr. 2.2 – DC motor.....	25
Obr. 2.3 – Magnetický rotační enkodér AS5040	26
Obr. 2.4 – Měřicí karta LabJack U3	27
Obr. 2.5 – Schéma měření	28
Obr. 3.1 – Inverzní kyvadlo	28
Obr. 3.2 – Rameno inverzního kyvadla.....	30
Obr. 3.9 – Rozmístění úhlů v jednotkové kružnici	36
Obr. 3.10 – Průběh vychýlení ramene laboratorního modelu.....	37
Obr. 3.11 – Průběhy ramen modelů	38

Seznam tabulek

Tab. 2.1 – Parametry motoru C216260006	26
Tab. 2.2 – Parametry enkodéru AS5040	26

ÚVOD

Cílem této bakalářské práce je vytvoření matematického modelu inverzního kyvadla a následná verifikace. Princip inverzního kyvadla spočívá v neustálém bilancování ramene kolmo vzhůru pomocí vozíku, který je poháněn elektrickým motorem. Tento princip je běžně využíván na elektrických dvojkolkách, které jsou využívány k transportu osob.

Model bude vytvořen na základě matematicko-fyzikální analýzy. Následně bude matematický model realizován v prostředí MATLAB Simulink ve kterém, je možné simulovat chování celé soustavy.

Teoretická část práce uvádí do problematiky modelování a matematického modelování. V kapitole matematického modelování je také popsán způsob vytvoření matematických modelů a klasifikace těchto modelů. V teoretické části bude popsána i experimentální identifikace parametrů a numerická simulace. V kapitole numerická simulace bude vysvětlen princip a popsány numerické metody.

Další část práce popisuje laboratorní model, který se nachází v laboratoři katedry řízení procesů, fakulty elektrotechniky a informatiky. V této části jsou zobrazeny fotografie modelu a je zde uveden i popis jednotlivých částí laboratorního modelu a jeho reálné parametry.

Praktická část práce obsahuje odvození matematického modelu inverzního kyvadla. Tento model bude následně sestaven v Simulinku. Model bude srovnán s laboratorním modelem a tím ověřena jeho podobnost. V této části budou identifikovány zbylé neznámé parametry matematického modelu.

Konečným výsledkem této práce bude matematický model vytvořený v prostředí MATLAB Simulink, který je podobný laboratornímu modelu. V matematickém modelu bude možno měnit reálné parametry modelu a následně pohyb simulovat.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 MODELOVÁNÍ

Modelování lze chápat jako experimentální proces. Při tomto procesu dochází ke zkoumání daného systému a získání informací o něm. Systém může být prezentován jako reálný objekt, který si dokážeme snadno představit. Od reálného objektu můžeme odvodit tzv. kopii podle určitých kritérií. Kopii je myšlen model, který může být fyzický nebo abstraktní.

Fyzický model může být zmenšená kopie reálného objektu představující laboratorní model. Laboratorní model může dále posloužit k experimentování. Je možné také zkoumat vlastnosti reálného modelu na jeho modelu.

Abstraktní model je např. matematický model. Na tomto modelu už není možné experimentovat jako na fyzickém, ale je možné zkoumat jevy. Jevy probíhají na reálném objektu a lze je pozorovat a následně vyhodnotit. Tento model je popsán matematickým popisem.

Při modelování je hledána na reálném objektu určitá podobnost. Podobnost reálného objektu a jeho modelu je možné popsat určitými vlastnostmi a chováním. Podobností existuje několik. Rozlišujeme fyzikální, matematickou a kybernetickou podobnost. Každá z daných podobností má své specifické vlastnosti, které jsou popsány níže.

Fyzikální podobnost je vyjádřena podobností mezi systémy, které mají totožnou fyzikální podstatu.

Matematická podobnost je definována mezi systémy, které mají shodný matematický popis. Pokud se jedná o systém popisující matematickou podobnost a systém je fyzikálně odlišný, lze hovořit o tzv. analogii. Posledním typem podobnosti je kybernetická. Kybernetickou podobnost je možné vyjádřit matematickou podobností popisující vnější chování systémů.

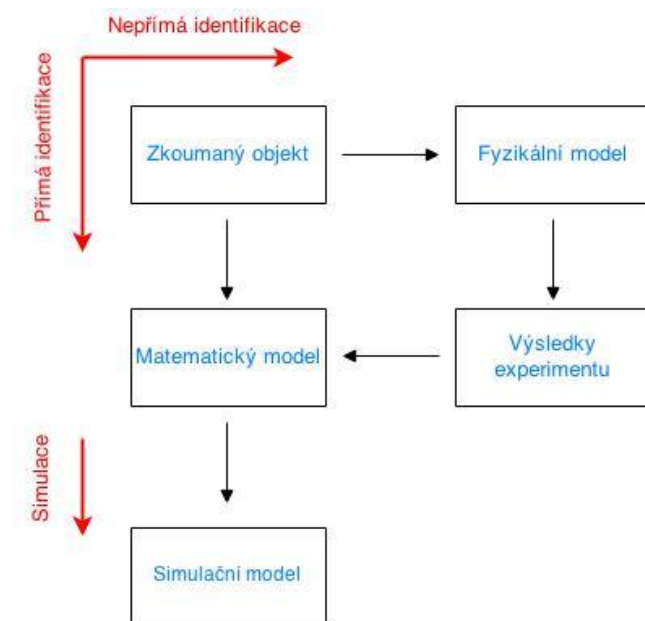
Podle předchozích tří podobností může být modelování dělené na matematické, fyzikální a kybernetické. Nezbytnou součástí modelování je také identifikace. O identifikaci lze hovořit, když hledáme podobnost reálného objektu s modelem. Identifikace je tedy experimentální způsob, při kterém se zjišťují důležité charakteristiky systému a procesu. Díky identifikaci je následně možno sestrojít přesný matematický model (Dostál, 2006; Kuneš, 1989).

1.2 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

Matematický model lze popsat jako matematickou strukturu, která je tvořena matematickými vztahy. Tyto vztahy popisují vlastnosti zkoumaného objektu. Matematickým vztahem je myšlen jakýkoliv matematický předpis. Například soustava algebraických rovnic, soustava diferenciálních rovnic nebo soustava diferenčních rovnic. Matematický předpis se stává matematickým modelem poté, co je předpisu přiřazen určitý proces nebo jev. Probíhající experiment na matematickém modelu se nazývá simulace (Kuneš aj., 1989).

1.2.1 Vytvoření matematických modelů

K vytvoření matematického modelu existují dvě cesty, které jsou znázorněny na obr. 1.1. Přímou (analytickou) nebo nepřímou (experimentální) identifikací objektu. U přímé neboli analytické identifikace se matematický model získává sestavením rovnic, které vyjadřují vztahy mezi vstupními, výstupními a stavovými veličinami. Vstupní veličiny ovlivňuje okolí objektu. Stavové veličiny jsou ukryty uvnitř objektu a výstupními veličinami je ovlivňováno okolí objektu (Kuneš, 1989).



Obr. 1.1 – Vytvoření matematického modelu

Při vytváření modelu lze vyjít z energetických bilancí objektu, které jsou vyvozeny z fyzikálních procesů probíhajících v reálném objektu. Je možné využít také údaje o konstrukci objektu (rozměry, hmotnost,...) nebo vlastností materiálu, ze kterého je reálný objekt vyroben. Touto cestou lze získat analytický model neboli matematický model reálného objektu.

Častěji se potřebné informace získávají nepřímo neboli experimentálně. Experiment lze chápat jako měření vstupních a výstupních veličin reálného objektu. Výsledky experimentu prezentují souhrn poznatků, které se zabývají popisem fyzikálního modelu. Tento model je jednodušší než předchozí. Model je popsán řadou vlastností a probíhajícími ději, které nelze změřit, proto jsou zanedbány. Každý z přístupů k vytvoření modelu má své výhody i nevýhody, které jsou popsány níže. Výhoda analytického modelu spočívá v tom, že vnitřní popis chování zkoumaného objektu kopíruje skutečné zákonitosti a jeho parametry mají fyzikální smysl. Tento model platí i v obecném rozsahu a je možno jej využít i pro jiné fyzikálně podobné systémy. Model lze použít i v reálně nepřístupných situacích, například když je testována bezpečnost. Analytickým postupem lze získat matematický model i přes to, že reálný objekt není ještě vyroben a tak není možné měřit vstupní a výstupní signály. Někdy stačí pouze odhady budoucích vlastností.

Nevýhodou analytického modelu je jeho veliká složitost. Výsledný model je většinou nelineární a musí být obvykle pro další použití linearizován. Tento model lze použít pouze v případech, kde je dobře známá fyzikální podstata procesu a lze tedy sestavit energetické bilance. Při tvorbě modelu jsou potřeba teoretické znalosti o zkoumaném objektu, které mnohdy není jednoduché zjistit. Výsledné vztahy, které prezentují model je nutno často aproximovat.

Výhoda experimentálního modelu spočívá v tom, že model má většinou jednoduchý tvar a určení parametru není tak složité. Naopak, jeho nevýhodou je jistá omezenost. Model nelze použít v takovém rozsahu jako model analytický, protože popisuje pouze povrchové vlastnosti a jevy reálného objektu. Experimentální model popisuje konkrétní zkoumaný objekt a to oblast, ve které byl objekt měřen.

Obě metody identifikace, analytická a experimentální je možné kombinovat. Vhodnou kombinací obou metod, lze vytvořit dobré předpoklady pro úspěšné získání matematického modelu. K tomu abychom byly schopni určit vhodný způsob identifikace, jsou potřeba jisté teoretické znalosti a zkušenosti, protože každý model vyžaduje jiný způsob identifikace.

V praxi se také postupuje tak, že analytickou cestou určíme přibližné matematické vztahy a experimentální cestou lze upřesnit parametry, které jsou v těchto vztazích obsaženy.

Následujícím krokem k ověření správného chování systému je simulace. Simulaci lze provést tak, že se matematický model transformuje na model simulační a následně je tento model použit pro získání předpokládaného chování systému. Výsledky simulací jsou poté srovnány s daty získanými z reálných experimentů (Jančíková, 2008; Kuneš, 1989).

1.2.2 Klasifikace matematických modelů

Matematický model lze zařadit do různé kategorie, podle základních vlastností a struktury modelu.

Podle charakteru procesu na model se modely dělí na deterministické a stochastické. Deterministický model jednoznačně určuje příčiny a jejich následky. Stochastický model má náhodný charakter. Vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami jsou dány staticky a mají určitou pravděpodobnost

Model může popisovat statické nebo dynamické vlastnosti systému. Statický model vyjadřuje závislost výstupných veličin (výstup) na vstupních veličinách (vstup) v ustáleném stavu. Model je vyjádřen pomocí algebraických rovnic a nelze jej použít pro řízení soustavy, v kterém se model nachází. Dynamický model nám popisuje statické i dynamické vlastnosti systému. Model může být vyjádřen matematickým zápisem v podobě diferenciálních popř. diferenčních rovnic. Tento model lze využít k řízení.

Každý model může také jinak zpracovávat informaci. Podle způsobu zpracování informace, se modely dělí na spojité nebo diskrétní. Spojitý model mění vstupy a výstupy spojitě. Opakem spojitého modelu je diskrétní. Přednost diskrétního modelu spočívá v tom, že vstupní a výstupní veličiny se mění v určitém časovém okamžiku. Někdy se mění nespojitým způsobem pouze vstup, výstup se mění spojitě i takový model považujeme za nespojitý (Vrožina, 2012; Burý, 2011).

1.3 IDENTIFIKACE

S pojmem modelování se často spojuje identifikace. Identifikace je proces, při kterém se určuje matematický popis reálného systému. Proces určuje strukturu a parametry modelu. Model by měl být co nejpřesnější, aby popisoval funkční chování mezi vstupními a výstupními veličinami. Zkoumaný systém je možné identifikovat analyticky nebo empiricky. Empiricky je možné pomocí experimentálních metod.

1.3.1 Experimentální identifikace parametrů

Experimentální identifikace vyšetřuje dynamické vlastnosti systému a je založena na identifikačním měření, které zaznamenává chování reálného objektu. Na objekt lze působit vhodnými signály a zaznamenávat odezvu výstupů. Následně je potřeba vyhodnotit změřená data. Identifikace využívá dva modely. Parametrický model nebo neparametrický model.

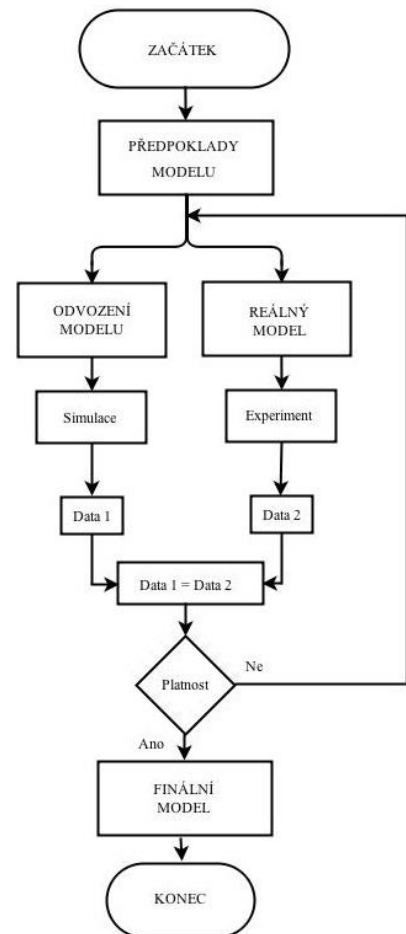
Parametrické modely mají svou strukturu. Strukturou lze chápat typ rovnice (diferenciální, diferenční) a řád. Parametrický model zastupuje z matematického pojetí rovnice, které přímo obsahují koeficienty těchto rovnic. Koeficienty je možné obecně označit za parametry matematického modelu. Neparametrické modely představují závislost mezi vstupním a výstupním signálem. Závislost je vyjádřena měřením a znázorněna graficky. Parametry modelu jsou obsaženy ve funkčních závislostech a je možné je získat až vyhodnocením.

Upřesnění matematického modelu lze provést dosazením teoretických parametrů reálného systému do modelu. Poté je možno provést simulaci vytvořeného modelu a porovnat výstupní signály modelu a reálného systému. Vstupní signál modelu a reálného systému musí být stejný.

Výstupní data, ze simulace, matematického modelu a experimentu provedeném na reálném modelu se mohou lišit. Odlišnost lze do jisté míry odstranit tím, že budeme měnit v určitém rozsahu parametry systému. Některé parametry je možno určit přesně (rozměry, váha, ...). Některé parametry není možné určit přesně (např. koeficient tření různorodých materiálů, ...).

Pro identifikaci neznámých parametrů existuje mnoho metod. Mezi nejpoužívanější metody patří metoda nejmenších čtverců, která je využívána při regresní analýze k aproximaci naměřených hodnot nějakou funkcí ze známého prostoru. V této metodě jde o nalezení kritéria, které je určeno pomocí součtu kvadrátů odchylek daných průběhů.

Identifikaci a ověření lze provést v jednotlivých krocích, které jsou zobrazeny na obr. 1.2 (Noskiewič, 1999; Vampolová, 2009).



Obr. 1.2 – Identifikační cyklus

1.4 NUMERICKÁ SIMULACE

Celou řadu fyzikálních jevů lze popsat matematickými výrazy. Výraz je zapsán například pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto fyzikální jevy mohou být závislé na čase nebo na jiné proměnné definující okolní prostor. Analytické řešení, které spočívá v postupných úpravách nebo nahrazením známými vztahy, těchto diferenciálních rovnic je velmi složité a tak se tyto rovnice řeší numerickými metodami. V mnoha případech jsou jevy popsány rovnicemi vyššího řádu, které je také obtížné řešit. Vyšší řády rovnice je možno převést na rovnici prvního řádu. To samé platí i pro soustavu rovnic.

Rovnice prvního řádu je definovaná jako:

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

kde f je funkce dvou proměnných x, y a y' je první derivace y .

Funkci (1.1) je možné vyjádřit také jako

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

kde $\frac{dy(x)}{dx}$ je derivace funkce y .

„Funkcí, které splňují rovnici (1.2) existuje nekonečně mnoho. Jedno konkrétní řešení určíme tzv. počáteční podmínkou,“ jak uvádí Vicher (Vicher, 2003).

Počáteční podmínka je důležitou součástí zadání a je vyjádřena následujícím tvarem:

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.3)$$

kde x_0 a y_0 jsou zadané hodnoty.

„Soustava dvou rovnic, pro dvě neznámé funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ má tvar“, jak uvádí Vicher (Vicher, 2003).

$$y_1' = f(x, y_1, y_2); \text{ počáteční podmínka } y_1(x_0) = y_{10} \quad (1.4)$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2); \text{ počáteční podmínka } y_2(x_0) = y_{20}. \quad (1.5)$$

kde y_1, y_2 jsou derivace funkcí, které obsahují proměnné x, y_1 a y_2 .

A y_{10}, y_{20} jsou počáteční podmínky v bode x_0 .

Podobným způsobem lze definovat soustavu obsahující více rovnic (Vicher, 2003).

1.4.1 Princip numerických metod

Princip numerických metod spočívám v tom, že diskretizujeme proměnné. Diskretizaci proměnné lze chápat jako převedení spojité úlohy na úlohu diskrétní. Přibližné řešení není konstruováno jako spojitá funkce, ale postupně se generuje diskrétní množina prvků obsahující body x_0, x_1, x_2, \dots nezávisle na sobě a určují se hodnoty y_0, y_1, y_2, \dots , která nahrazují $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$. Body x_0, x_1, x_2, \dots pak tvoří síť.

Při numerickém řešení obyčejných diferenciálních rovnic musí být známy počáteční podmínky. Počáteční podmínka je obvykle v bodě x_0 . K výpočtu následující hodnoty x_n je potřeba znát hodnotu v předchozím bodě x_{n-1} . Vzdálenost mezi body x_n a x_{n-1} se nazývá krok. Podle potřebného počtu kroků lze numerické metody dělit na jednokrokové nebo mnohokrokové (n -krokové).

U jednokrokové metody je potřeba pouze jedna předchozí hodnota.

$$y_{n+1} = f(x_n, y_n, x_{n+1}). \quad (1.6)$$

Mnohokrokové (n -krokové) metody využívají k výpočtu nové hodnoty více předchozích hodnot (Vicher, 2003; Blata, 2009).

$$y_{n+1} = f(x_{n+1}, x_n, y_n, x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, x_{n-i+1}, y_{n-i+1}). \quad (1.7)$$

1.4.2 Numerické metody

Při simulaci dynamických systémů, které jsou často prezentovány jako soustava diferenciálních rovnic, se používá řada numerických metod. Numerickou metodu je možno jasně popsat posloupností dílčích kroků, které vedou k vyřešení numerické úlohy. Metody je možné seřadit podle numerické náročnosti nebo přesnosti. Každá z metod má svou přesnost. Podle přesnosti lze zvolit některou z následujících metod.

Eulerova metoda

Eulerova metoda patří mezi nejjednodušší metody. Pokud v diferenciální rovnici (1.2) je nahrazeno $\frac{dy(x)}{dx}$ přibližným vzorcem $\frac{y_{n+1} - y_n}{h}$, platí

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n), \quad (1.8)$$

kde $h \equiv x_{n+1} - x_n$ určuje vzdálenost (krok) mezi sousedními body.

Z rovnice (1.8) lze vyjádřit y_{n+1} , čímž získáme

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (1.9)$$

Vzorec (1.9) definuje Eulerovu metodu. Vzorec umožní vypočítat řešení v bodě x_{n+1} pokud je známo řešení v předchozím bodě x_n . Eulerova metoda náleží mezi jednokrokové metody (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

Modifikace Eulerovy metody

Eulerova metoda je poměrně nepřesná. Nepřesnost je způsobena tím, že z kroku x_n do x_{n+1} je použita stejná hodnota derivace $f(x_n, y_n)$. Hodnota derivace $f(x_n, y_n)$ se však v intervalu, který je vymezen body x_n a x_{n+1} mění.

První modifikace metody spočívá v úpravě derivace $f(x_n, y_n)$. Místo použití derivace na začátku intervalu, vymezeném body x_n a x_{n+1} , je použita derivace uprostřed tohoto intervalu. Střed intervalu lze získat obyčejnou Eulerovou metodou s poloviční délkou kroku. Následující vzorec je

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)). \quad (1.10)$$

Existuje i druhá modifikace metody, kterou tvoří průměr z derivace na začátku a konci intervalu mezi body x_n a x_{n+1} ,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]. \quad (1.11)$$

Eulerova metoda v praxi nemá velké uplatnění (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

Rungovy-Kuttovy metody

Tato metoda vychází z myšlenky Eulerovy metody, kdy je možné vzít v úvahu i členy vyšších řádů. Při této metodě získáme více odhadů derivace k_i v různých bodech s . Celý krok je vyjádřen průměrem těchto derivací s určitou vahou w_i .

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + \dots + w_s k_s). \quad (1.12)$$

Odhady derivací je možno vypočítat pomocí následujících vztahů:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y), \\
k_2 &= f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21}k_1), \\
k_3 &= f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{31}k_1 + h\beta_{32}k_2) \\
k_i &= f\left(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Ze vztahů (1.13) vyplývá, že při použití jednoho bodu ($s = 1$), dostaneme Eulerovu metodu prvního řádu. Při použití dvou bodů ($s = 2$), dostaneme modifikaci Eulerovy metody.

Pro první modifikaci platí:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_{12} = \frac{1}{2}. \tag{1.14}$$

Pro druhou modifikaci platí:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \beta_{12} = 1, \tag{1.15}$$

kde w_i určuje váhu průměru derivace
 α_i, β_{ij} jsou koeficienty
 h je vzdálenost (krok) mezi sousedními body
 k_i je odhad derivace v bodech s .

S přibývajícím počtem bodů dostáváme metody vyšších řádů. Lze ukázat, že při čtyřech odhadech derivace lze dostat metodu čtvrtého řádu.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n), \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1), \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2), \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + hk_3), \\
y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

U Rungových-Kuttových metod nastává problém s vyššími řády, než je řad čtvrtý. Doposud se řád metody rovnal použitému počtu odhadů derivace. Ale při pěti odhadech je možno sestrojít pouze metodu čtvrtého řádu, nikoliv pátého.

Využití této metody není dnes veliké, ale i přesto je často využívána (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

Metoda středního bodu

Metodu středního bodu lze považovat za jednoduchou metodu. Tato metoda je druhého řádu. Metodu lze rozdělit na více kroku. První krok je možno získat pomocí Eulerovy metody, tj.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (1.17)$$

Další kroky získáme z bodu předposledního x_{n-1} , přičemž bude použita derivace posledního bodu x_n , tedy

$$y_{n+1} = y_{n-1} + hf(x_n, y_n). \quad (1.18)$$

Derivace během jednoho kroku je umístěna uprostřed intervalu. Při výpočtu nové hodnoty y_{n+1} je potřeba znalost hodnoty y_n a y_{n-1} . Z předchozí věty plyne, že tato metoda není jednokroková, ale jedná se o metodu dvoukrokovou (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

Mnohokrokové metody

Při výpočtu pomocí mnohokrokových metod je potřeba znát řešení ve více předchozích bodech. Obecně lze tuto metodu zapsat pro k kroků

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}. \quad (1.19)$$

Koeficienty α_i a β_i je potřeba vhodně zvolit. Níže je uvedeno několik příkladů, které se osvědčily

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(3f_n - f_{n-1}), \quad (1.20)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), \quad (1.21)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f_{n+1} + f_n), \quad (1.22)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \quad (1.23)$$

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}, \quad (1.24)$$

$$y_{n+2} = y_n + \frac{1}{3}h(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n), \quad (1.25)$$

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}hf_{n+1}, \quad (1.26)$$

$$y_{n+1} = \frac{18}{11} y_n - \frac{9}{11} y_{n-1} + \frac{2}{11} y_{n-2} + \frac{6}{11} h f_{n+1}. \quad (1.27)$$

Při pohledu na výše zmíněné příklady lze říci, že metody (1.21) a (1.27) jsou tříkrokové. Ostatní metody jsou dvoukrokové.

Pokud při výpočtu řešení v novém bodě není potřeba znalost derivace lze říci, že tato metoda je explicitní. Opakem explicitní metody (1.20), (1.24) je metoda implicitní (1.22), (1.23). U implicitní metody je potřeba znát hodnotu derivace v tomto bodě (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

Metoda prediktor-korektor

Metodu lze rozdělit, jak z názvu vyplývá, na dvě části. Potřeba je vždy dvou metod, kde jedna metoda je implicitní a druhá explicitní. Nejdříve se pomocí explicitní metody (prediktoru) získá přibližný odhad nového řešení. Následně je toto řešení předáno jako vstupní řešení pro implicitní metodu (korektor). Druhým členem (korektorem) se předchozí řešení výrazně zpřesní. Postup lze popsat následujícím způsobem.

Prediktor:

$$y_{n+1}^P = y_{n-2} + \frac{3}{2} h(f_n + f_{n-1}), \quad (1.28)$$

$$f_{n+1}^P = f(x_{n+1}, y_{n+1}^P). \quad (1.29)$$

Korektor:

$$y_{n+1}^K = y_n + \frac{1}{2} h(f_{n+1}^P + f_n). \quad (1.30)$$

Odhad řešení y_{n+1}^P je vypočten prediktorem (1.28). Následně je v bodě y_{n+1}^P vztahem (1.29) vypočtena hodnota derivace.

Zpřesnění výpočtu je provedeno vztahem (1.30). Výpočty (1.29), (1.30) se opakují několikrát. Poměr řádů korektoru a prediktoru je vhodné zvolit tak, aby řád korektoru byl o jedna větší než řád prediktoru (Vicher, 2003; Vitásek, 1987).

2 POPIS LABORATORNÍHO MODELU

Laboratorní model je sestaven z hliníkových profilů, který je zobrazen na obr. 2.1. Model je vysoký asi 0,63 m, dlouhý 0,9 m a hluboký 0,12 m. Váha laboratorního modelu je asi 10 kg.



Obr. 2.1 – Laboratorní model

Pohon laboratorního modelu tvoří stejnosměrný motor. Motor má typové označení C2162-60006. Parametry motoru jsou uvedeny v tab. 2.1. Tento motor je ideální pro modely, kde dochází k dálkovému ovládnání mechanismů. Veliké využití má v oblasti robotiky (CaltechME72 Engineering Design Laboratory, 2001).

Motor transformuje elektrickou energii na mechanickou. Mechanická energie je přenesena pomocí řemene. Řemen je z CNC stroje, aby bylo zabráněno možnému napínání řemene. K řemenu je přímo upevněn vozík. K vychýlení vozíku je zamezeno dvěma pojezdy.



Obr. 2.2 – DC motor

Dráha vozíku x je 0,7 m a je vymezena koncovými spínači, aby nedošlo k poškození modelu. Váha vozíku M_v je 0,396 kg. Na vozíku je připevněno rameno, které je možné vychýlit v rozsahu 0 až 360°. Hmotnost ramene m je 0,04 kg a délka ramene l je 0,525 m.

Tab. 2.1 – Parametry motoru C216260006

Veličina	Hodnota	Jednotky
Jmenovité napětí	19	V
Maximální napětí	24	V
Proud	0,15	A
Točivý moment	1,827	kg·cm
Max. otáčky bez zátěže	4500	ot·min ⁻¹
Max. výkon	34,2	J·s ⁻¹

Úhel natočení kyvadla je snímán magnetickým rotačním enkodérem, který je součástí otočné osy ramene. Typové označení snímače je AS5040. AS5040 je schopen snímat úhel pomocí natočení magnetického pole a změnu intenzity pole.



Obr. 2.3 – Magnetický rotační enkodér AS5040

Parametry magnetického enkodéru jsou uvedeny v tab. 2.2.

Tab. 2.2 – Parametry enkodéru AS5040

Veličina	Hodnota	Jednotky
Rozsah natočení	360	°
Max. rychlost otáčení	10000	ot·min ⁻¹
Programovatelná přesnost	10, 9, 8, 7	bitů

Enkodér bezkontaktně snímá úhel v rozsahu 0 až 360°. Jednou z možností AS5040 je, že poskytuje informaci o natočení mg. pole formou PWM výstupu. Frekvence výstupu PWM je asi 1 kHz. PWM výstup je možné připojit na integrátor (Low-Pass filtr), kterým lze získat analogové hodnoty úhlu natočení. Enkodér AS5040 snímá stejným způsobem otáčky motoru (Malý, 2005).

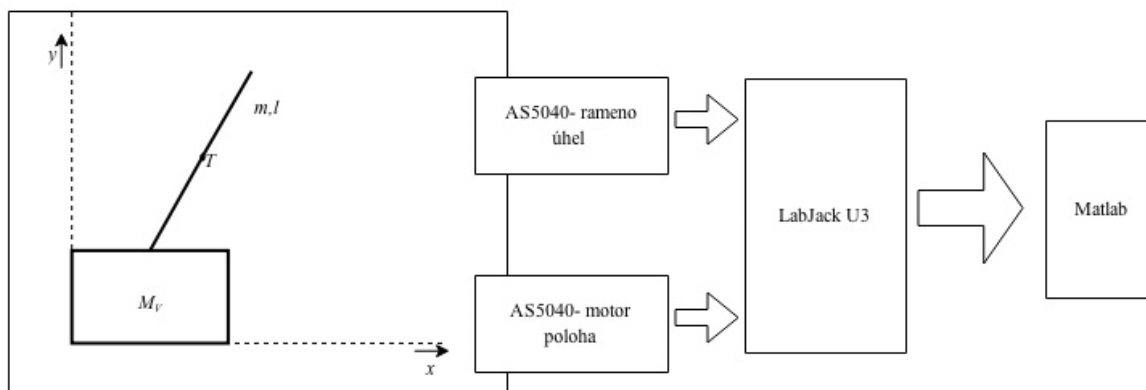
Z enkodéru je využit analogový výstup, který poskytuje napětí o určité velikosti. Analogový výstup je přiveden na měřicí kartu LabJack U3. Měřicí karta představuje zařízení pro sběr dat. Karta disponuje 16 výstupy a vstupy, které je možné nastavit jako analogový vstup (12-bitovými) nebo digitální vstupy/ výstupy. Karta také nabízí maximálně dva analogové výstupy (8-bitové) a čtyři vyhrazené digitální vstupy/ výstupy. Pro měření byly využity analogové vstupy (AIN0 – AIN3).

Napětí, které poskytuje AS5040, je v rozsahu 0 až 5V. Na měřicí kartu lze přivést napětí v rozsahu 0 – 3,6 V, proto byl přidán, mezi měřicí kartu a enkodér, dělič napětí. Maximální rychlost vzorkování je 2,5-50 kHz, která závisí na rozlišení. Karta je napájena přes USB rozhraní. Přes USB rozhraní probíhá komunikace s osobním počítačem, ve kterém lze zaznamenat data v Matlabu. K nastavení měřicí karty lze od výrobce získat software LJControlPanel. Záznam dat v Matlabu, byl proveden pomocí skriptů. Uživatelská příručka je přístupná v literatuře této práce (LabJack Corporation, © 2015; HW, © 2015).

Měření je schematicky zobrazeno na obr. 2.5.



Obr. 2.4 – Měřicí karta LabJack U3 (LabJack Corporation, © 2015)

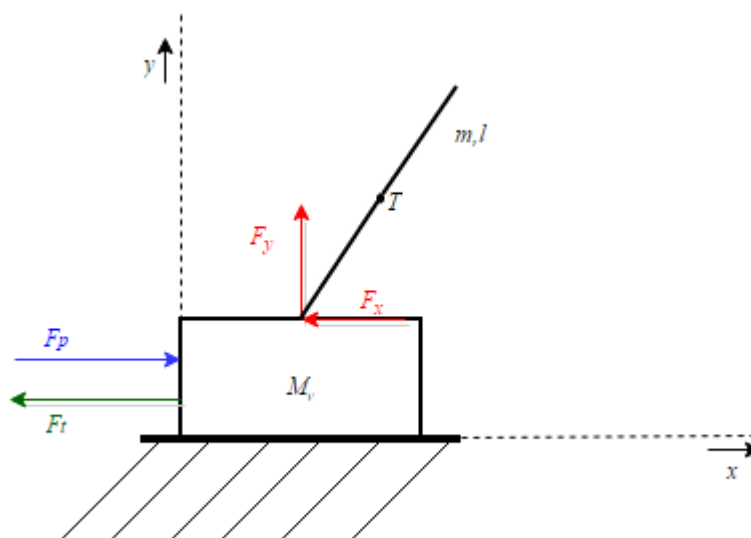


Obr. 2.5 – Schéma měření

3 PRAKTICKÁ ČÁST

3.1 VYTVOŘENÍ MATEMATICKÉHO MODELU

Pro vytvoření modelu inverzního kyvadla v Simulinku je nejprve potřeba tento model popsat soustavou diferenciálních rovnic. Tyto rovnice popisují chování systému, které prezentují inverzní kyvadlo. Modelování celého systému je velmi obtížné, proto byl model rozložen na dvě části. Při odvození jednotlivých částí, které jsou součástí inverzního kyvadla, lze vyjít z následujícího obr. 3.1.



Obr. 3.1 – Inverzní kyvadlo

Obr. 3.1 znázorňuje inverzní kyvadlo jako celek. Ve směru osy x působí pohybová síla F_p . Proti síle F_p působí síla F_t , která reprezentuje tření vozíku, a také síla F_x . Síla F_x vzniká reakcí ramene na pohyb vozíku.

Hmotnost vozíku je označena jako M_v , rameno má hmotnost m a délkou l . Na obr. 3.1 je dále znázornění síla F_y , která je tíhovou silou a působí ve směru osy y .

Na vozík působí síly F_p , F_x a F_t , které můžeme poskládat a jsou rovny hmotnosti vozíku M_v vynásobeným zrychlením $\frac{d^2x}{dt^2}$.

$$F_p - F_x - F_t = M_v \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (3.1)$$

kde $\frac{d^2x}{dt^2}$ je zrychlení vozíku ve směru osy x .

Vztah (3.1) je výchozí pro odvození chování vozíku. Do toho vztahu můžeme dosadit za sílu F_t , následující vztah:

$$F_t = M_v g f \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad (3.2)$$

kde g je tíhové zrychlení a f je konstanta vyjadřující tření.

V rovnici (3.2) je obsažen $\operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Tento člen definuje znaménko síly F_t .

Znaménko síly F_t závisí na směru pohybu vozíku a musí být vždy opačného směru než síla F_p .

Dosazením vztahu (3.2) do vztahu (3.1) získáme vztah:

$$F_p - F_x - M_v g f \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right) = M_v \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.3)$$

V této rovnici nyní figuruje jedna neznámá síla. Velikost a směr síly F_x vychází ze směru pohybu vozíku v ose x a velikosti zrychlení těžiště T v této ose.

Sílu F_x lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$F_x = m \frac{d^2x_{TE}}{dt^2}. \quad (3.4)$$

V rovnici (3.4) je obsažen člen $\frac{d^2x_{TE}}{dt^2}$, který je v podstatě úhlové zrychlení těžiště T ramene. Derivací polohy těžiště T , v ose x , lze získat jeho rychlost $\frac{dx_{TE}}{dt}$. Derivací rychlosti

$\frac{dx_{TE}}{dt}$ je možné zrychlení získat $\frac{d^2x_{TE}}{dt^2}$.

K vyjádření všech sil působící na systém je nutné vyjádřit i sílu F_y , která působí ve směru osy y . Tuto sílu lze vyjádřit obdobným způsobem jako sílu F_x . Síla F_y je tíhová.

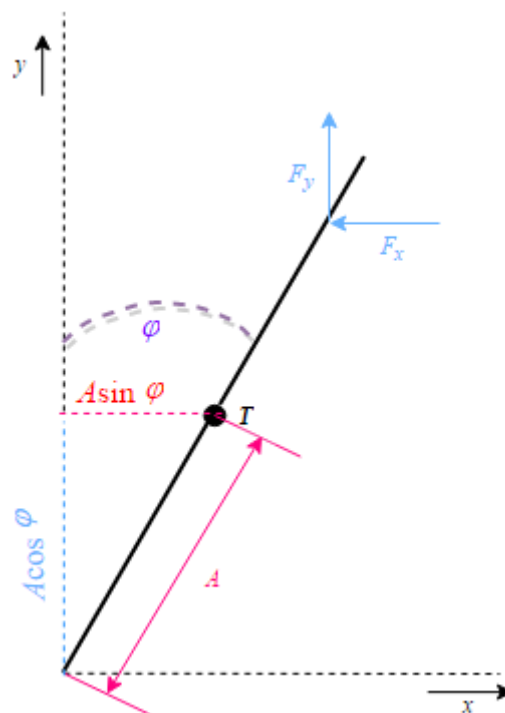
V síle F_y je také hmotnost ramene m a tíhové zrychlení g . Sílu F_y působící v ose y je možno vyjádřit jako

$$F_y = mg + m \frac{d^2 y_{TE}}{dt^2}. \quad (3.5)$$

K vyjádření zrychlení těžiště T ramene, je potřeba určit souřadnice těžiště T . Určit souřadnice těžiště T lze s pomocí následujícího obr. 3.2, na kterém je zobrazené rameno inverzního kyvadla.

Rameno má těžiště T , které je vzdáleno délkou A od osy otáčení. Délka A je rovna polovině délky ramene l . Poloha těžiště T je definovaná v kartézském souřadnicovém systému. Počátek kartézského systému se nachází v ose otáčení ramene. V ose y je poloha těžiště T určena jako $A \cos \varphi$ a v ose x jako $A \sin \varphi$. Úhel φ znázorňuje vychýlení od svisle osy y , které je možné v rozsahu 360°

Z obr. 3.2 lze získat souřadnice těžiště T . Souřadnice v ose x označena x_{TE} a souřadnice v ose y je označena y_{TE} .



Obr. 3.2 – Rameno inverzního kyvadla

Souřadnice těžiště T v ose x a y jsou:

$$x_{TE} = x + A \sin(\varphi), \quad (3.6)$$

$$y_{TE} = A \cos(\varphi). \quad (3.7)$$

Abychom určily sílu F_x , která je charakterizována vztahem (3.4). Musí být známé zrychlení těžiště T v ose x , tedy $\frac{d^2 x_{TE}}{dt^2}$. Toto zrychlení lze získat druhou derivací vztahu (3.6). První derivace vztahu (3.6) je následující

$$\frac{dx_{TE}}{dt} = \frac{d(x)}{dt} + \frac{d(A \sin \varphi)}{dt} = \frac{dx}{dt} + A \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (3.8)$$

Druhou derivaci vztahu (3.6) lze získat derivací vztahu (3.8):

$$\frac{d^2 x_{TE}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - A \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (3.9)$$

Vztahem (3.9) je získáno zrychlení v ose x a toto zrychlení lze nyní dosadit do vztahu (3.4):

$$F_x = m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - A \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]. \quad (3.10)$$

V rovnici (3.10) figuruje úhlová rychlost $\frac{d\varphi}{dt}$ a úhlové zrychlení $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$.

Také můžeme určit zrychlení v ose y , které bude potřeba pro sílu F_y . Tato síla je potřeba pro další rovnici ze soustavy rovnic, která bude odvozena níže.

Výpočet síly F_y je rozepsán vztahem (3.5). K výpočtu toho vztahu je potřeba y_{TE} .

Souřadnice y_{TE} je dána vztahem (3.7). Nyní lze určit první a druhou derivaci podobným způsobem jako pro osu x , tedy

$$\frac{dy_{TE}}{dt} = \frac{d(A \cos \varphi)}{dt} = -A \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.11)$$

Pro zrychlení $\frac{d^2 y_{TE}}{dt^2}$ v ose y , je potřeba derivovat vztah (3.11):

$$\frac{d^2 y_{TE}}{dt^2} = -A \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - A \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (3.12)$$

Pokud vztah (3.12) dosadíme do vztahu (3.5), získáme sílu F_y působící ve vertikálním směru.

$$F_y = mg + m \left[-A \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - A \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]. \quad (3.13)$$

Vztahem (3.10) je dána síla F_x , působící v horizontálním směru. Ve vertikálním směru síla F_y , která je dána vztahem (3.13).

Dosazením vztahu (3.10), který vyjadřuje sílu F_x , do rovnice (3.3) získáme první rovnici potřebnou pro matematický model inverzního kyvadla.

$$F_p - m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - A \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] - mgf \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right) = M_v \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (3.14)$$

Tuto rovnici (3.14) lze upravit do následujícího tvaru

$$F_p - m \frac{d^2 x}{dt^2} + mA \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mA \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgf \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right) = M_v \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (3.15)$$

Rovnici (3.15) je možné ještě upravit a získat první rovnici popisující vozík systému.

$$F_p + mA \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mA \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = (M_v + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + mgf \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right). \quad (3.16)$$

Nyní máme odvozenou první rovnici, která popisuje chování vozíku. Toto chování je ovlivněno proměnnými, které jsou obsaženy v rovnici (3.16). V průběhu odvození byly odvozeny také vztahy (3.10) a (3.13), které bude potřeba pro následující druhou rovnici. Tato rovnice bude popisovat pohyb samotného ramene.

Pro větší přehled budou níže uvedeny oba potřebné vztahy (3.17), (3.18).

$$F_x = m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - A \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right], \quad (3.17)$$

$$F_y = mg + m \left[-A \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - A \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]. \quad (3.18)$$

Při odvození následující rovnice popisující pohyb ramene lze vyjít z uvedených vztahů (3.19), (3.20).

$$\sum M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.19)$$

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}, \quad (3.20)$$

kde M je moment síly a I je moment setrvačnosti.

Rovnice (3.19) představuje pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Rovnice vychází z druhé impulzové věty a je dána jako součet momentu všech sil $\sum M$ působících na rameno. Součet momentu všech sil $\sum M$ je roven součinu momentu setrvačnosti I tělesa vzhledem k ose otáčení a úhlovým zrychlením $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ramene.

Následující rovnice (3.20) popisuje moment síly vzhledem k ose otáčení. Moment síly \vec{M} lze získat vynásobením velikosti síly \vec{F} s ramenem síly \vec{r} , což je kolmá vzdálenost mezi vektorovou přímkou síly a osou otáčení. Síla \vec{F} je působící síla a \vec{r} je polohový vektor, který začíná v bodě, ke kterému je tento moment síly \vec{M} určen. Vektor \vec{r} směřuje do působíště síly \vec{F} .

Součet momentu všech sil je možné rozložit jako:

$$\sum M = F_y A \sin \varphi - F_x A \cos \varphi, \quad (3.21)$$

Vztah (3.21) popisuje rozložení všech momentů síly, které působí na rameno kyvadla.

Do rovnice (3.19) lze dosadit vztah (3.21) a získat rovnici:

$$F_y A \sin \varphi - F_x A \cos \varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.22)$$

do které je možné dosadit dříve odvozené vztahy (3.17), (3.18). Získaná rovnice má následující tvar:

$$\left\{ mg + m \left[-A \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - A \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \right\} A \sin \varphi - \left\{ m \left[\frac{d^2x}{dt^2} - A \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \right\} A \cos \varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.23)$$

kde g je tíhové zrychlení.

Rovnici (3.23) lze ještě v několika následujících krocích upravit:

$$mgA \sin \varphi - mA^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mA^2 \sin^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} +$$

$$mA^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mA^2 \cos^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.24)$$

Členy obsažené v rovnici (3.24) je možno odečíst:

$$mgA \sin \varphi - mA^2 \sin^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} - mA^2 \cos^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.25)$$

Nyní lze využít následujícího goniometrického vzorce (3.26) a vztah upravit na tvar (3.27):

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad (3.26)$$

$$mgA \sin \varphi - mA^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.27)$$

Rovnici (3.27) je možné upravit, osamostatněním členů obsahující úhlové zrychlení $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a členy mohou být vyjádřeny.

$$mgA \sin \varphi - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} = (mA^2 + I) \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.28)$$

Nyní lze využít toho, že těžiště hmotného tělesa je shodné s umístěním jeho geometrického těžiště. Z tohoto faktu plyne následující rovnost:

$$I = 0. \quad (3.29)$$

Dosazením vztahu (3.29) je možné upravit rovnici (3.28) do tvaru:

$$mgA \sin \varphi - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} = mA^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.30)$$

Nyní máme rovnici (3.16) a (3.30), které jsou matematickým modelem. Rovnice tvoří soustavu diferenciálních rovnic 2. řádu. Tato soustava je zapsána níže:

$$F_p + mA \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mA \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (M_v + m) \frac{d^2x}{dt^2} + mgf \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right),$$

$$mgA \sin \varphi - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2} = mA^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.31)$$

V soustavě rovnic se vyskytnou dvě proměnné, které jsou závislé na čase. Tyto proměnné je vhodné vyjádřit:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_p + mA \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - mA \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - M_v g f \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{M_v + m}, \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{mgA \sin \varphi - mA \cos \varphi \frac{d^2x}{dt^2}}{mA^2}.$$

3.2 SESTAVENÍ MATEMATICKÉHO MODELU V SIMULINKU

V předchozí části práce byl odvozen matematický model inverzního kyvadla, který je vyjádřen soustavou rovnic (3.32). Soustava je tvořena dvěma diferenciálními rovnicemi druhého řádu. První rovnice popisuje chování vozíku a druhá rovnice popisuje chování ramene. Na základě matematického modelu byl v prostředí programu SIMULINK sestaven model.

SIMULINK je nástroj vhodný pro modelování, simulaci dynamických systémů. Při simulaci jsou využívány algoritmy MATLABu, kterými je numericky řešeno dané simulační schéma. Simulační schéma je tvořeno bloky. Bloky transformují signál podle jeho charakteru. Bloky lze různě spojovat a tvořit možné obvody. U složitějšího simulačního schématu je možné tvořit subsystémy. Při využití subsystému lze značně zpřehlednit schéma. Ke zjednodušení lze využít také masky (MathWorks, © 2015).

Nejvyšší úroveň modelu inverzního kyvadla, který byl realizován v programu SIMULINK, je zobrazena na obr. 3.3 v příloze A.

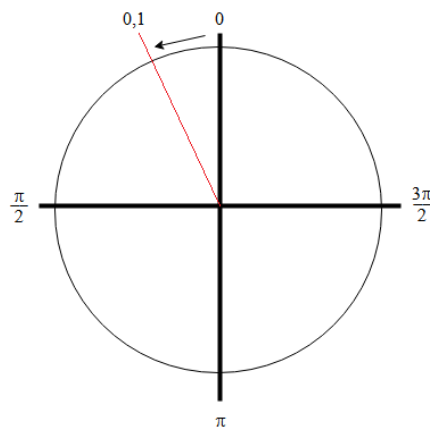
Na vstup modelu je přivedena síla F_p . Výstupy jsou zobrazeny na osciloskopech. Každý z osciloskopů je nazván podle sledované výstupní proměnné. V našem případě se jedná o poloha vozíku, rychlost vozíku, úhel ramene a úhlová rychlost ramene. Model inverzního kyvadla je tvořen dvěma subsystémy, které jsou nazvány v souladu s laboratorním modelem, tj. „vozík“ a „rameno“. Schéma je zobrazeno na obr. 3.5 v příloze A. V horní části obr. 3.5 je subsystém prezentující vozík a ve spodní části je subsystém, který prezentuje rameno. Tyto subsystémy jsou na sobě závislé, jak vyplývá ze soustavy rovnic (3.32).

Na dalším obr. 3.6 v příloze A je zobrazen subsystém popisující vozík, který je popsán rovnicí (3.32). Ve schématu byl přidán blok paměť, protože v obvodu vzniká tzv. algebraická smyčka. Algebraická smyčka vzniká, když výstup integrátoru je přiveden zpět na vstup bloku v tomto řetězci.

Na následujícím obr. 3.7 v příloze A je zobrazen obsah subsystému ramene. V nastavení simulace byl stanoven fixní krok na 0,001. Počátek simulace je nastaven přibližně na 4 sekundy a simulace je ukončena ve 43 sekundě. Metoda „řešitel“, kterou se počítá vytvořená soustava rovnic, je ode3.

Nad celým systémem inverzního kyvadla je vytvořena maska, která je zobrazena na obr. 3.8 v příloze A. V masce je možné zadat reálné hodnoty laboratorního modelu, jako je hmotnost vozíku M_v , hmotnost ramene m , délka ramene l , počáteční úhel v radiánech, gravitační konstanta g a koeficient tření f . Tímto byla kompletně vytvořena v SIMULINKu soustava diferenciálních rovnic, která je popsána vztahem (3.32) a zobrazena na obr. 3.3 v příloze A.

Počáteční úhel je zadáván v obloukové míře, tj. v rad. Rozsah vychýlení ramene je 0 až 2π rad. Úhel 0 radiánů popř. 2π radiánů odpovídá nestabilní poloze ramene (kolmo vzhůru). Stabilní poloha (svislá) ramene odpovídá hodnotě π radiánů. Hodnota π se rovná asi 3,14 radiánů a hodnota 2π se rovná asi 6,28 radiánů. Rozmístění úhlu, pohybu ramene, je zobrazeno na obr. 3.9.



Obr. 3.9 – Rozmístění úhlů v jednotkové kružnici

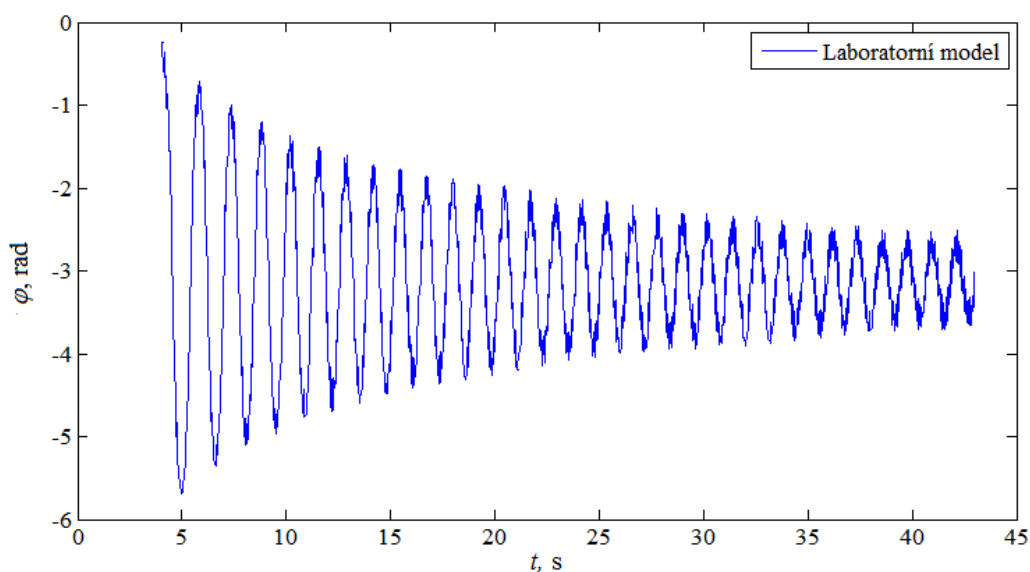
3.3 IDENTIFIKACE MATEMATICKÉHO MODELU

Nezbytným krokem k identifikaci a ověření je potřeba získat data z „chování“ laboratorního modelu. Z laboratorního modelu byla naměřená data, která pouze popisují průběh pohybu ramene. Data byla přepočítána z hodnot napětí na velikost, která odpovídá úhlu ramene v radiánech.

Na obr. 3.10 je zobrazen průběh vychýlení ramene laboratorního modelu. Počáteční úhel odpovídá asi 0,1 radiánů, který je přibližně zobrazen na obr. 3.9. Simulace byla spuštěna asi ve 4 sekundách a byla zastavena ve 43 sekundách. Následně jsou pohyby ramen z laboratorního modelu a matematického modelu zobrazeny osciloskopem. Vstupní signál matematického modelu byl zvolen jednotkový skok v čase jedné sekundy z logické úrovně 1 na logickou úroveň 0. Na laboratorním modelu tento vstupní signál představuje spuštění ramene z určitého úhlu, v našem případě asi 0,1 radiánů.

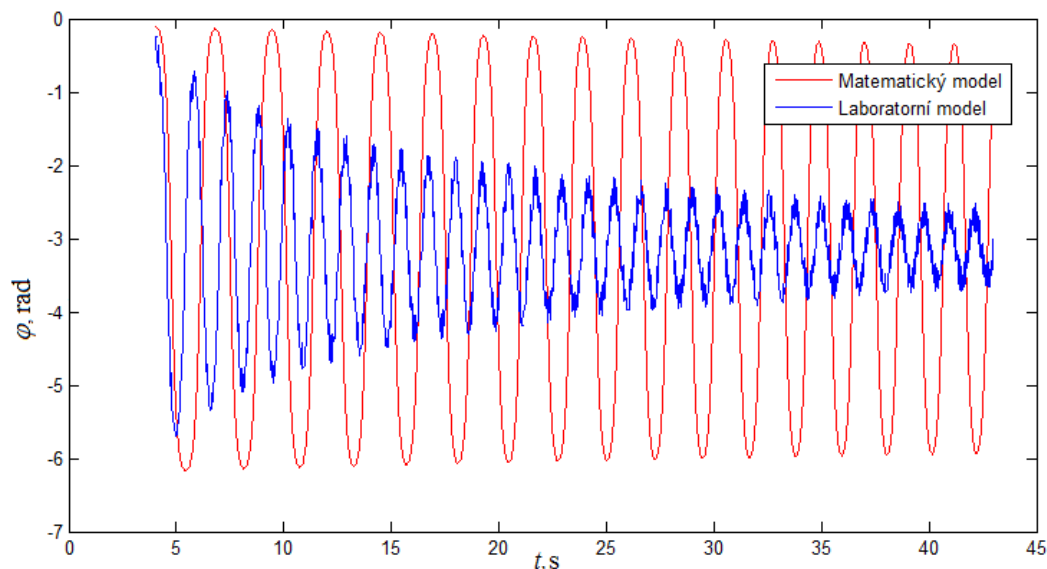
Aby byl totožný směr pádu ramene matematického modelu s laboratorním modelem, tak musel být počáteční úhel v matematickém modelu zadán se záporným znaménkem.

Pomocí dat změřených z laboratorního modelu lze experimentální identifikací určit neznámý parametr f matematického modelu. Parametr f je koeficient tření. Pro tuto identifikaci bylo schéma na obr. 3.3 v příloze A modifikováno na schéma, které je zobrazeno na obr. 3.4 v příloze A. Kdy byl přidán blok, který umožní načtení dat z reálného modelu. Data jsou zaznamenána v souboru `realny_model_data.mat` a je měřeno pouze rameno.



Obr. 3.10 – Průběh vychýlení ramene laboratorního modelu

Na obr. 3.11 je zobrazen průběh ramene matematického modelu (červeně) a laboratorního modelu (modře). Koeficient tření f laboratorního modelu byl zadán náhodně, tj. 0,05.



Obr. 3.11 – Průběhy ramen modelů

Nyní je možné měnit parametr f . Při změně tření f se však průběh ramene matematického modelu skoro nezmění. Bylo rozhodnuto, že ze stávajícím matematickým modelem nelze provést identifikaci neznámého parametru f . Protože matematický model se neshoduje z laboratorním modelem. Problém spočívá v konstrukci laboratorního modelu.

Vozík modelu je poháněn, přes řemen, motorem. Motor má silné magnetické pole. Navíc z poměrů hmotností vozíku M_v a hmotnosti ramene m vyplývá, že vozík není ramenem významně ovlivněn. Na vozík také působí „torzní“ síla, která z vozíkem pohybuje ve směru osy y . Polohu vozíku není možné odměřit, protože na dráze 0,7 metrů není možné naměřit dostatečné množství vzorků.

3.4 VERIFIKACE MATEMATICKÉHO MODELU

Verifikace, jinými slovy ověření, spočívá v porovnání matematického modelu s laboratorním modelem. Pro ověření modelů bylo použité schéma, které je zobrazeno na obr. 3.4 v příloze A. Protože nebyl určen neznámý parametr představující koeficient tření f , tak není možné matematické model porovnat s laboratorním modelem.

V příloze A jsou zobrazeny obr. 3.12 – obr 3.14. Obrázky zobrazují pouze záznamy z matematického modelu.

Počátek simulace je asi v čase 4 sekundy a simulace je ukončena v čase 43 sekund. Koeficient tření f je do této simulace dosazen náhodně. Na obr. 3.12 je zobrazena poloha x vozíku. Na obr 3.13 je rychlost $\frac{dx}{dt}$ vozíku a na obr. 3.14 je zobrazena úhlová rychlost $\frac{d\varphi}{dt}$ ramene. Pro upřesnění je úhel φ ramene matematického modelu zobrazen červenou křivkou na obr. 3.11.

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit matematický model laboratorního modelu inverzního kyvadla. Matematický model byl vytvořen a základě matematicko-fyzikální analýzy. Součástí této práce je také identifikace parametrů modelu a verifikace.

Prvním krokem ke splnění tohoto cíle bylo pochopit princip inverzního kyvadla a představit si možné interakce mezi jednotlivými částmi systému. Při odvozování matematického modelu byly zohledněny síly, které na celý systém působí. Z těchto sil byl pomocí druhého Newtonova zákona postupně odvozen vztah popisující vozík. Pohyb vozíku je popsán první diferenciální rovnicí. Pro pohyb ramene byl vyjádřen pohyb těžiště T ramene na základě druhého Newtonova zákona. Pomocí druhé impulzové věty byl vyjádřen celkový pohyb ramene, tedy bilance všech sil působících na rameno, který je popsán druhou diferenciální rovnicí.

Odvozením vznikla soustava rovnic obsahující dvě nelineární diferenciální rovnice druhého řádu, které se navzájem ovlivňují. Soustava byla následně vytvořena v SIMULINKu aby bylo ověřené správné chování matematického modelu.

V soustavě rovnic se objevily nedostatky, které byly následně odstraněny. Matematický model se shodoval s teoretickými předpoklady. Následujícím krokem byla identifikace všech parametrů modelu. Na katedře řízení procesů fakulty elektrotechnické byl vyroben laboratorní model za účelem ověření reálného chování matematického modelu.

V matematickém modelu vystupuje asi pět parametrů, které je možné měnit v masce modelu. Do matematického modelu byly dosazeny reálné parametry laboratorního modelu, které jsou jasně stanoveny konstrukcí. Mezi tyto parametry patří hmotnost vozíku M_v a hmotnost ramene m , které jsou dosazeny v gramech. Dalším parametrem laboratorního modelu je délka ramene l v metrech. Neznámým parametrem, který byl potřeba identifikovat je koeficient tření f . Tento parametr bylo možné určit z experimentálního měření, kdy bylo spuštěno rameno z nestabilní polohy, a byl zaznamenán pohyb ramene.

Následným zjištěním bylo, že koeficient tření f při současném matematickém modelu není možné určit. Protože matematický model se s laboratorním modelem neshoduje.

Logicky lze usuzovat, že při pohybu ramene bude ovlivněna poloha vozíku. Předchozí věta platí v matematickém modelu. V laboratorním modelu toto neplatí.

V laboratorním modelu k tomuto podstatnému jevu nedošlo. Proti malé hmotnosti ramene m působí hmotnost vozíku M_v , která je asi 10krát větší. Motor je spojen s vozíkem pomocí řemene. V motoru se nachází silné magnetické pole, které brání pohybu vozíku v ose

x . V laboratorním modelu je problém s měřením polohy vozíku. Na dráze laboratorního modelu, která je dlouhá 0,7 m není možné zaznamenat jeho pohyb, protože v rozsahu dráhy není možné zaznamenat dostatek vzorků.

Při snížení vstupního napětí motoru jsou zaznamenána data podobná spíše šumu. Proto nebylo možné zaznamenat změnu polohy vozíku. V práci je zobrazena poloha x pouze matematického modelu.

Součástí práce je také verifikace modelu. Ověření totožného chování modelů nemá význam se stávajícím matematickým modelem provádět.

Matematický model byl prozkoumán a možné řešení je následující. V matematickém modelu je vozík ovlivněn ramenem. V laboratorním modelu k tomuto jevu nedochází. Tento jev je potřeba zapracovat do matematického modelu. Možné je vyřadit sílu třecí a tím docílit zastavení vozíku silou, která bude charakterizována odporem motoru. Byly vyzkoušeny i jiné varianty, jak ramenem neovlivňovat vozík. Např. podmínkou mezi integrátory popisující chování vozíku, která bude následující.

Při působení síly F_p , která bude nepatrně větší než skoková změna na vstupu (tj. 1,1) se vozík „odbrzdí“. Pokud je síla F_p rovna skokové změně (tj. 1,0), tak je vozík zabrzděn. Tento návrh je zobrazen na obr. 3.15, kde je zobrazen upravený vozík matematického modelu. Úpravou bylo docíleno zastavení vozíku a chování ramene je odpovídající laboratornímu modelu. Tento upravený model nebyl srovnán s laboratorním modelem, jde pouze o možný návrh.

Práci nebylo možné dokončit z časových důvodů. Nedostatky matematického modelu byla snaha odstranit. Identifikace a ověření navrhované úpravy matematického modelu budou předmětem další práce.

Na příložením CD je obsažen matematický model. Součástí CD jsou i data z měření, schéma pro ověření modelů a návrh úpravy matematického modelu.

Literatura

- BLATA, Zdeněk. 2009. *Numerické metody řešení diferenciálních rovnic*. Zlín. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky. Dostupné z: <https://www.pslib.cz/os/APM/Numerick%C3%A9%20metody%20dif%20rovnic.PDF>
- BURÝ, Alois. 2011. *Modelování a simulace dynamických systémů* [online]. Ostrava. 72 s.[cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~neu10/studium/moas/Modelovn_a_simulace_dynamickch_systm.pdf
- Caltech ME72 Engineering Design Laboratory. 2001. *Large (>3 Watts) Motor Comparison* [online].[cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: http://design.caltech.edu/Archive/2001/motors/Motor_Comparison.pdf
- DOSTÁL, Petr a GAZDOŠ, František. 2006. *Řízení technologických procesů* [online]. Zlín.[cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/>
- HW. 2005. *Magnetický rotační enkodér AS5040*. HW.cz. [online]. [cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: <http://www.hw.cz/soucastky/magneticky-rotacni-ekoder-as5040.html>
- HW, *U3 USB*. Dostupné z: <http://labjack.cz/u3-usb>
- JANČÍKOVÁ, Zora. 2008. *Modelování a simulace* [online]. Ostrava. 93 s.[cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: <http://www.fmfi.vsb.cz/export/sites/fmfi/cs/studium-a-vyuka/studijni-opory/638-Jancikova-Modelovani-a-simulace.pdf>
- KUNEŠ, Josef a VAVROCH, Otakar a FRANTA, Václav. 1989. *Základy modelování*. Praha: SNTL. ISBN 80-03-00147-1.
- LABJACK CORPORATION, *U3-LV/U3-HV*. Dostupné z: <http://labjack.com/u3>
- LABJACK CORPORATION, *U3 User's Guide*. Dostupné z: http://www.npl.washington.edu/TRIMS/sites/www.npl.washington.edu/TRIMS/files/webfiles/Detector_and_Electronics/LabJack%20U3_UG_LabJack.pdf
- MODRLÁK, Osvald a HUBKA, Lukáš. 2010. *Úvod do parametrické identifikace* [online]. Liberec. 42 s.[cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: http://matlab.fei.tuke.sk/raui/doc/Prednaska_1-3.pdf
- NOSKIEVIČ, Petr. 1999. *Modelování a identifikace systémů*. Ostrava: MONTANEX a.s. ISBN 80-7225-030-2.

The MathWorks, *Simulink*. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/products/simulink/index-b.html>

VAMPOLOVÁ, Jana. 2009. *Metoda nejmenších čtverců*. Olomouc. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Přírodovědecká fakulta. Dostupné z: <http://mant.upol.cz/soubory/OdevzdanePrace/B09/b09-19-jv.pdf>

VICHER, Miroslav. 2003. *Numerická matematika* [online]. Ústí nad Labem. 77 s. [cit. 27. 5. 2015]. Dostupné z: http://physics.ujep.cz/~mlisal/nm_1chomutov/vicher_nm1.pdf

VITÁSEK, Emil. 1987. *Numerické metody*. Praha: SNTL.

VROŽINA, Milan a JANČÍKOVÁ, Zora a DAVID, Jiří. 2012. *Identifikace systémů* [online]. Ostrava. 178 s. [cit. 27. 5. 2015]. ISBN 978-80-248-2594-6. Dostupné z: <http://www.person.vsb.cz/archivcd/FMMI/IS/Identifikace%20systemu.pdf>

Seznam příloh

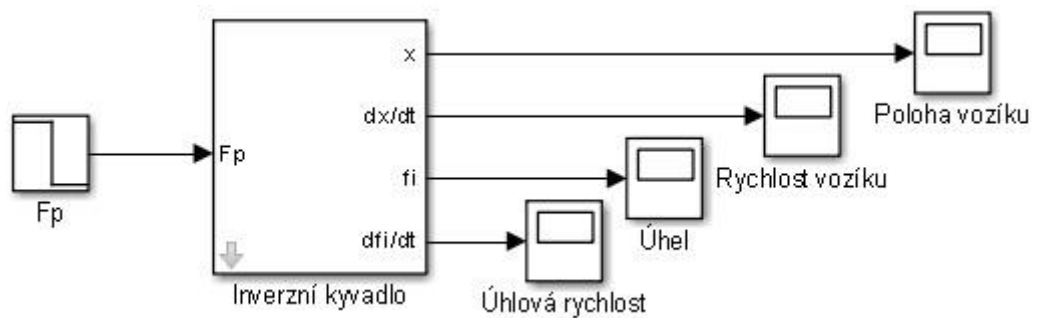
Příloha A

Příloha B: CD – ROM

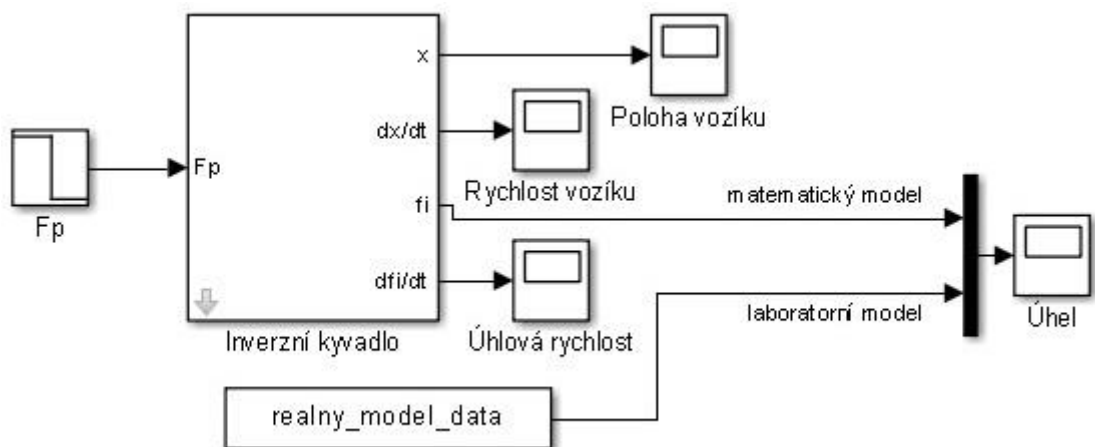
Příloha k bakalářské práci
Vytvoření a verifikace matematického modelu inverzního kyvadla
David Mucha

SCHÉMA V SIMULINKU

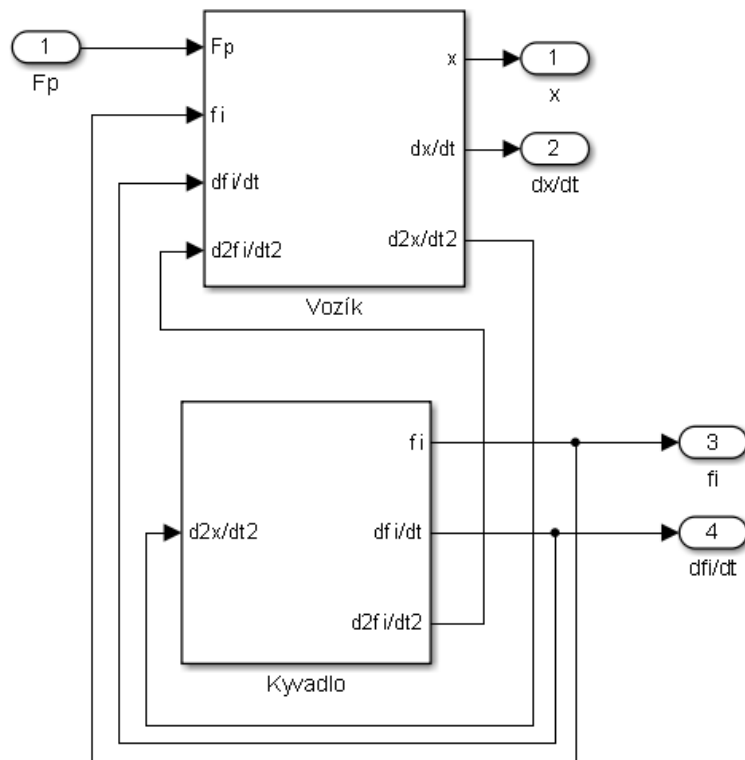
Zde jsou uvedena schémata ze SIMULINKu, která tvoří inverzní kyvadlo. Chování inverzního kyvadla je popsáno soustavou diferenciálních rovnic (3.32). Obrázky patří ke kapitole č. 3.



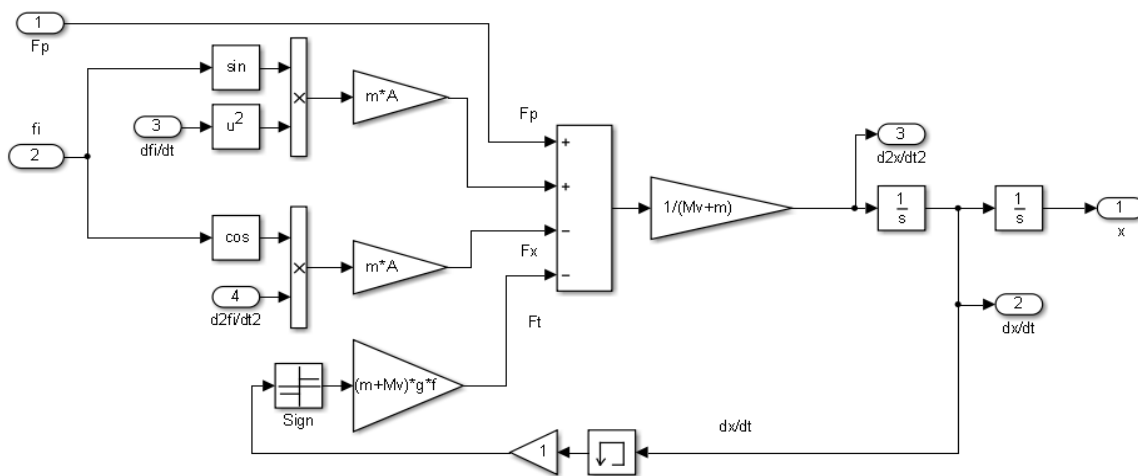
Obr. 3.3 – Schéma inverzního kyvadla v Simulinku



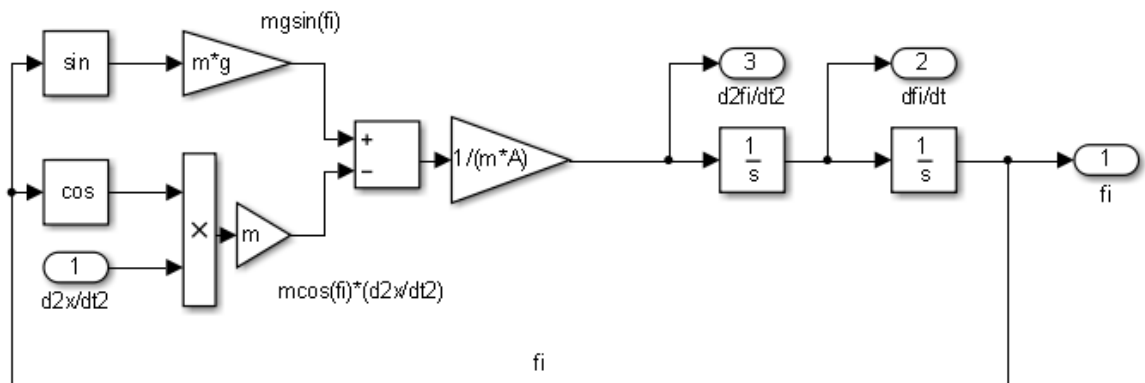
Obr. 3.4 – Schéma modelu pro experimentální nastavení parametrů



Obr. 3.5 – Subsystem „Inverzní kyvadlo“



Obr. 3.6 – Schéma subsystému „vozík“



Obr. 3.7 – Schéma subsystému „rameno“

Function Block Parameters: Inverzní kyvadlo

Subsystem (mask)

Parameters

Hmotnost vozíku

Hmotnost ramene

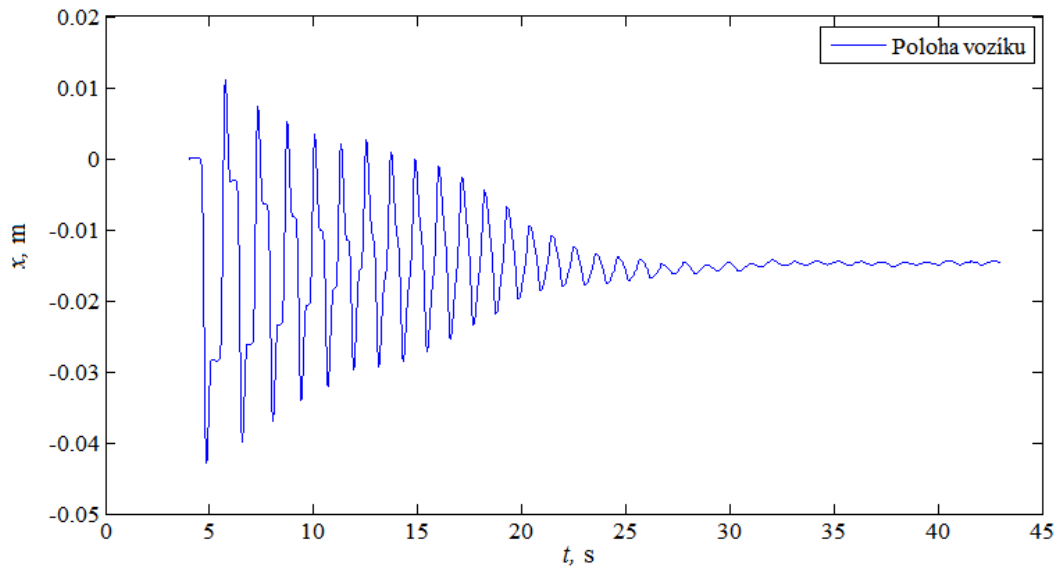
Délka ramene

Počáteční úhel

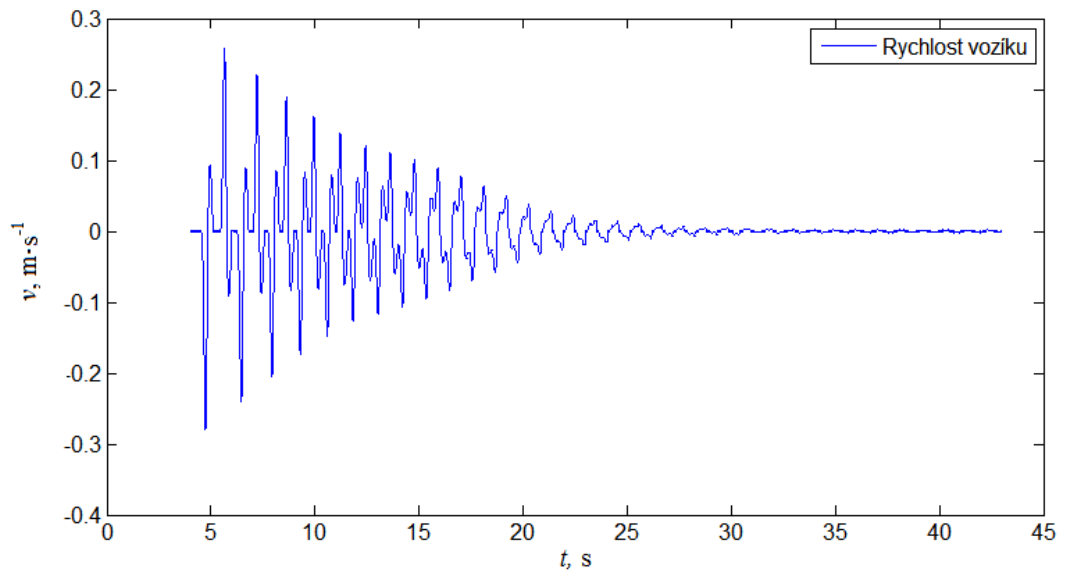
Gravitační konstanta

Koeficient tření

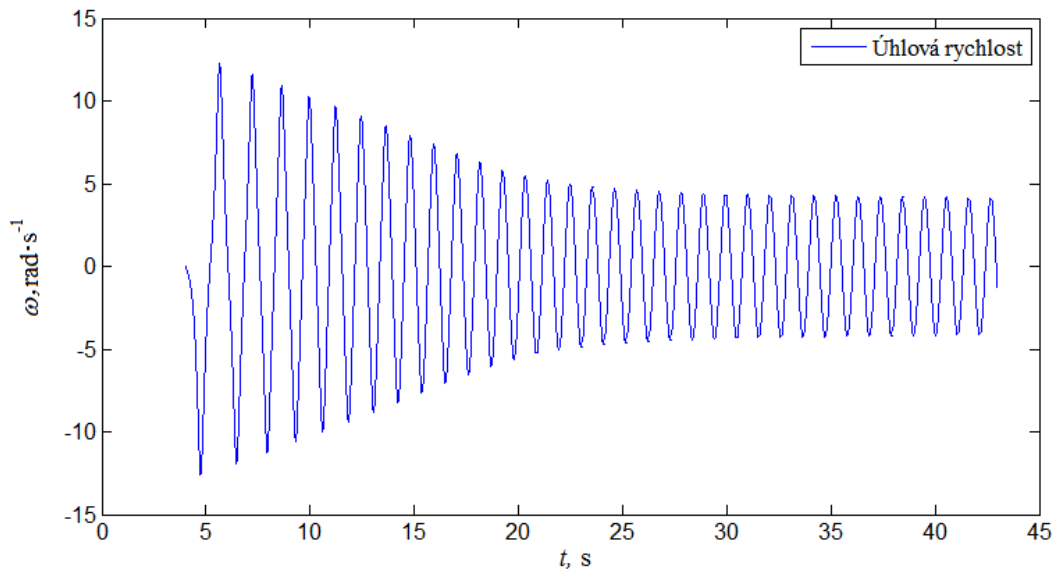
Obr. 3.8 – Maska subsystému „Inverzní kyvadlo“



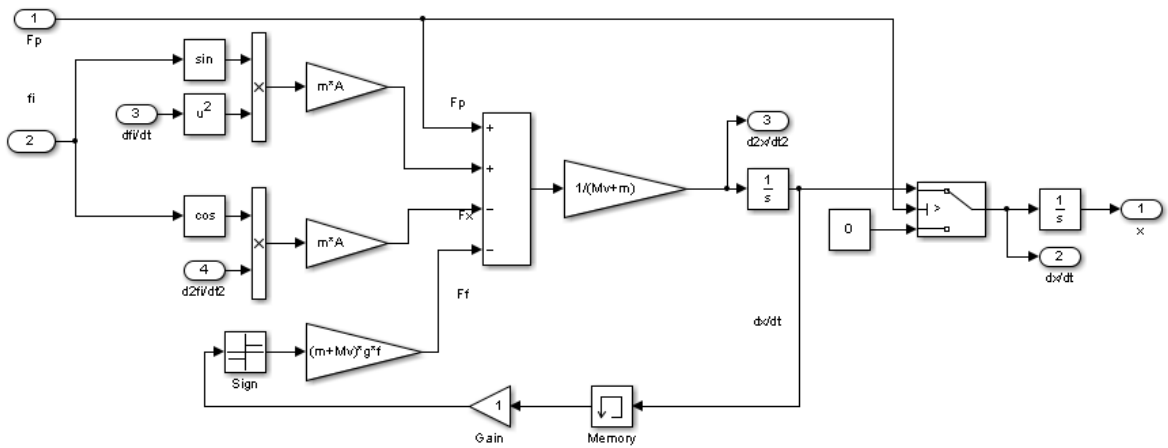
Obr. 3.12 – Poloha vozíku x



Obr. 3.13 – Rychlost vozíku $\frac{dx}{dt}$



Obr. 3.14 – Úhlová rychlost ramene $\frac{d\varphi}{dt}$



Obr. 3.15 – Návrh úpravy vozíku