Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

Metody operačního výzkumu jako podpora manažerského rozhodování

Bc. Jan Puklický

Diplomová práce
2015

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Jan Puklický**
Osobní číslo:	**E13526**
Studijní program:	**N6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Ekonomika a management podniku**
Název tématu:	**Metody operačního výzkumu jako podpora manažerského rozhodování**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je zhodnotit možnosti využití metod operačního výzkumu při rozhodování manažera. Výpočty budou provedeny na základě dostupných dat, s využitím vhodných metod operačního výzkumu. Součástí práce bude také prezentace výsledků.

Osnova:
- Popis rozhodovacího procesu manažera.
- Charakteristika jednotlivých metod operačního výzkumu.
- Aplikace vybraných metod operačního výzkumu v manažerském rozhodování.

Rozsah grafických prací: –

Rozsah pracovní zprávy: **cca 50 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

BLAŽEK, L. Management - organizování, rozhodování, ovlivňování. Praha: Grada Publishing, 2011. 191 s. ISBN 9788024732756
FOTR, J. , DĚDINA, J., HRŮZOVÁ, H. Manažerské rozhodování. Praha: Ekopress, 2003. 250 s. ISBN 9788086119694
FRANKEL, E. G. Quality Decision Management. Berlín: Springer, 2008. 128 s. ISBN 9781402089961
HEIZER, J., RENDER, B. Principles of Operations Management. New Jersey: Pearson Education, 2011. 729 s. ISBN 9780138000936
LINDA, B. Stochastické metody operačního výzkumu. Bratislava: Statis, 2004. 110 s. ISBN 9788085659337
LINDA, B., VOLEK, J. Lineární programování. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. 139 s. ISBN 9788073954260

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **30. září 2014**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2015**

doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.
děkanka

L.S.

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. října 2014

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 30. 4. 2015

………………
Jan Puklický

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych rád poděkoval svému vedoucímu práce panu doc. RNDr. Bohdanu Lindovi, CSc. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce.
Děkuji také své rodině za neustálou podporu při psaní této práce a panu Vladimíru Šinclovi, zaměstnanci truhlářství Karla Košíčka, za poskytnuté materiály a ochotu spolupracovat.

ANOTACE

Tato práce se zabývá metodami operačního výzkumu. Hlavním cílem práce je zhodnotit možnosti využití metod operačního výzkumu při rozhodování manažera. Práce popisuje rozhodovací proces manažera a operační výzkum. Dále je práce zaměřena na aplikaci vybraných metod operačního výzkumu v manažerské praxi.

KLÍČOVÁ SLOVA

rozhodování, varianta, operační výzkum, lineární programování, simplexová metoda

TITLE

Methods of operations research to support managerial decision

ANNOTATION

This work deals with the methods of operations research. The main objective of this work is to evaluate the posibility of using operations research methods in managerial decisions. The work describes the decision-making process and operations research. The work is also focused on application of selected methods of operations research in managerial practice.

KEYWORDS

decision-making, variant, operations research, linear programming, simplex method

OBSAH

SEZNAM TABULEK

SEZNAM OBRÁZKŮ

Seznam zkratek a značek

LP	lineární programování
p.a.	per annum (ročně)
SZR	metoda severozápadního rohu
IM	indexní metoda
VAM	Vogelova aproximační metoda
ÚLP	úloha lineárního programování
KTÚLP	kanonický tvar úlohy lineárního programování
CPM	Critical Path Method
PERT	Program Evaluation and Review Technique

ÚVOD

Tato diplomová práce se zabývá metodami operačního výzkumu a možnostmi jejich využití při rozhodování manažera. Kterýkoliv manažer, na jakékoli úrovni řízení čelí téměř každý den rozhodovacím situacím. V některých triviálních případech je rozhodnutí pro manažera jednoduché, jelikož přesně zná jeho následky. Existují však situace, které vyžadují hlubší analýzu problému a delší rozhodovací proces, který zvyšuje pravděpodobnost správného rozhodnutí. Předpokladem kvalitního manažera je tedy znalost širokého spektra rozhodovacích metod či manažerských tezí, které mu dopomáhají činit rozhodnutí prospěšná celému podniku nebo organizaci. U správně nastavené organizační struktury je pro manažera přijmutí rozhodnutí nevyhnutelné a stejně tak by za něj vždy měl nést odpovědnost, proto je nutné, aby přijímal pouze rozhodnutí, která považuje za správná.

Cílem této diplomové práce je zhodnotit možnosti využití metod operačního výzkumu při rozhodování manažera. V práci jsou obsaženy konkrétní případy z praxe, které jsou řešeny na základě dostupných dat, s využitím vhodných metod operačního výzkumu. Řešení těchto příkladů poukazuje na výhody, které metody operačního výzkumu manažerovi poskytují při jeho rozhodování.

Práce je rozdělena do čtyř částí. V první části je stručně popsána historie managementu a přístupů k němu. Je zde také představen koncept manažerských funkcí autorů Koontze a Weihricha, kteří definují manažerské funkce postupné a průběžné. Průběžné funkce jsou analýza, rozhodování a implementace.

Právě rozhodování, je věnována druhá část této práce. Náplní této části je vymezení základních pojmů rozhodování, popis individuálního a kolektivního rozhodování, jejich výhody a nevýhody. Dále jsou zde objasněny pojmy dobře a špatně strukturované problémy. Následuje popis náplně jednotlivých fází rozhodování. Další dvě podkapitoly se věnují rozhodovacím stromům a požadavkům na rozhodovatele. Nakonec jsou zde představeny vybrané metody vícekriteriálního rozhodování.

Obsahem třetí části je operační výzkum a jeho metody. Je zde obecně charakterizován operační výzkum. Dále jsou v této části klasifikovány modely operačního výzkumu. Poté jsou zde popsány fáze aplikace operačního výzkumu. Další podkapitola prezentuje obsah základních disciplín operačního výzkumu. Následují informace o možnostech softwarového řešení. Podrobněji se tato část věnuje jedné ze základních disciplín operačního výzkumu, matematickému programování, konkrétněji lineárnímu programování. Speciální pozornost je věnována simplexové metodě. V praxi totiž existuje celá řada problémů, pro které se dá vytvořit matematický model, řešitelný právě simplexovou metodou.

Poslední část je věnována aplikaci vybraných metod operačního výzkumu. Nejprve jsou zde uvedeny dva příklady řezného problému. Podklady pro tuto část byly získány z truhlářství Karla Košíčka z Jevišovic, bližší informace o firmě jsou uvedeny na začátku čtvrté části práce. Na prvním příkladu je prezentováno ruční řešení. Pro řešení druhého příkladu je využit řešitel v Excelu. Následuje podkapitola rozebírající další možnosti využití metody operačního výzkumu v praxi. Pátá podkapitola poslední části je věnována výrobnímu plánování při výrobě s polotovary. V závěru budou zhodnoceny výsledky této práce.

1 HISTORIE MANAGEMENTU

Výraz management je používán na mezinárodní úrovni, aniž by musel být překládán. V českém prostředí se nejčastěji management překládá jako řízení. Definic managementu je celá řada. Dle Koontze a Weihricha je Management proces vytváření určitého prostředí, ve kterém jednotlivci pracují společně ve skupinách a efektivně uskutečňují zvolené cíle. Další možnou definicí je ta od Pearce a Robinsona, která zní:

„*Management je proces optimalizace využívání lidských, materiálních a finančních zdrojů k dosažení organizačních cílů*." [2, str. 8]

Management různých činností byl samozřejmě prováděn již v dobách před naším letopočtem. „*Ke zrodu a vývoji moderního managementu jako specifické řídící činnosti i odborné disciplíny však dochází až v důsledku prudkého růstu průmyslové výroby a s ní související infrastruktury ve druhé polovině devatenáctého stolení*." [1, str. 18]

Jedná se tedy o vědu relativně mladou, která využívá poznatků i z jiných oborů. Především z ekonomie, psychologie, sociologie, práva, matematiky, logiky, etiky a dalších. První systematické teorie managementu se začínají formovat na počátku století dvacátého. Dnes jsou tyto teorie zpravidla označovány jako **klasické školy managementu**. Jedná se o školu vědeckého řízení, školu lidských vztahů, školu správního řízení a školu byrokratického řízení.

Prvním přístupem byla škola vědeckého řízení, která se zaměřovala na oblast řízení výroby na úrovni dílen a provozů. Dochází ve větší míře k normování práce a prohlubuje se specializace. Průkopníkem tohoto přístupu je především Frederik W. Taylor. Odpovědí na Taylorův přístup, který byl příliš jednostranně orientován na věcnou a technickou stránku práce, byla škola lidských vztahů. Za protagonistu této školy je považován Elton Mayo, který byl vedoucím týmu provádějícího tzv. „hawthornské experimenty", kde bylo poprvé prokázáno, že na výkonnost lidí mají výrazný vliv faktory psychologické a sociální. Výsledkem je formulace poznatků pro vytvoření metod vedení lidí, jejich stimulaci a motivaci. Důležitá je zde identifikace s podnikem, atmosféra v pracovní skupině či vyjadřování uznání. Dalším přístupem je škola správního řízení, která se věnuje především činnosti řídících pracovníků. Je zde poprvé definováno pět funkcí správy, kterými jsou plánování, organizování, přikazování, koordinování a kontrolování. Zakladatelem tohoto proudu je Henri Fayol. Poslední klasickou školou je poté škola byrokratického řízení, reprezentována především Maxem Weberem. Tato škola klade důraz na přesnou a jednoznačnou hierarchii moci a pořádku. Každá činnost v podniku tak musí být přesně definována. [1]

Z výše uvedených čtyř škol vychází nepřeberné množství dalších teorií. Tyto teorie mohou být rozděleny do pěti dalších skupin. Jedná se o procesní přístupy, psychologicko-sociální přístupy, systémové přístupy, kvantitativní přístupy a pragmatické přístupy. U procesních přístupů je kladen důraz na přehledné a logické utřídění dílčích procesů podniku a na vytvoření obecných doporučení jak tyto procesy zvládnout. Přístupy psychologicko-sociální rozšiřují školu lidských vztahů a do popředí staví především lidské potřeby. Systémové přístupy pracují s myšlenkou, že celek je více než pouhá suma jeho částí. Tyto přístupy se tedy snaží zvýšit efektivitu podniku jako celku a neřeší problémy pouze na operativní úrovni, ale snaží se na ně vždy nahlížet komplexněji. Kvantitativní přístupy se opírají především o matematiku a logiku. Jedná se o soubor postupů určených především k řešení rozhodovacích úloh. Jednou z oblastí kvantitativních přístupů je i operační analýza, které je věnována třetí kapitola této práce. Poslední skupinou jsou pragmatické přístupy, které v sobě snoubí většinu výše uvedených poznatků a rozšiřují je o zkušenosti z manažerské práce. Snahou je dávat konkrétní doporučení pro manažerské jednání. Nejvýraznější osobností je zde P. F. Drucker. [1]

V současné době vznikají stále nové manažerské metody, které více či méně vycházejí z poznatků předchozích generací. Především je kladen velký důraz na zkvalitňování podnikových procesů. Velké oblibě se také těší manažerské přístupy a řídící metody z Japonska.

Často bývá prezentován koncept manažerských funkcí autorů Koontze a Weihricha, který vychází z poznatků H. Fayola a jeho funkcí správy. Autoři dělí **manažerské funkce** na postupné a průběžné. Funkce průběžné prostupují všemi funkcemi postupnými. Postupné funkce jsou plánování, organizování, personalistika (výběr a rozmístění pracovníků), vedení lidí a kontrolování. Průběžné funkce jsou analýza, rozhodování a implementace. Rozhodování je tedy jednou ze základních funkcí manažera a je využíváno téměř ve všech situacích. Následující kapitola se tedy bude rozhodování a jeho zákonitostem věnovat podrobněji. [2]

2 ROZHODOVACÍ PROCES MANAŽERA

2.1 Základní pojmy

„***Rozhodování*** *je volba mezi více variantami chování vedoucích k naplnění určitého cíle*.“ [1, str. 86]

Rozhodovatel je osoba, či skupina osob, která na základě dostupných informací vybere určitou variantu chování a nese odpovědnost za její dopady. Ve skutečnosti je však třeba odlišit statutárního rozhodovatele, tedy osobu, jež má pravomoc k volbě varianty a skutečného rozhodovatele, který opravdu rozhoduje. V praxi totiž nezřídka dochází k oddělení skutečného a statutárního rozhodovatele. [4]

„***Varianta*** *řešení problému představuje možný způsob jednání rozhodovatele, který má vést k řešení problému, respektive ke splnění stanovených cílů*.“ „*S variantami rozhodování jsou úzce spojeny jejich* ***důsledky****, které chápeme jako předpokládané dopady variant na firmu*.“ [4, str. 18]

Pokud rozhodovatel ví s jistotou, jaké budou důsledky zvolené varianty, mluvíme o **rozhodování za jistoty**. Pokud rozhodovatel zná pravděpodobnosti nastání důsledků variant, hovoříme o **rozhodování za rizika**, pakliže rozhodovatel nezná ani tyto pravděpodobnosti, jedná se o **rozhodování za nejistoty**. Rozhodování za jistoty převažuje na operativní úrovni řízení, naopak pro vrcholové řízení je častější rozhodování za rizika či nejistoty. [4]

U pojmu pravděpodobnost je ještě důležité rozlišit **pravděpodobnost objektivní a subjektivní.** V případě pravděpodobnosti objektivní, je její hodnota výsledkem vysokého počtu pozorování. Naopak subjektivní pravděpodobnost je výsledkem intuice a přesvědčení rozhodovatele, že určitý jev nastane či nenastane. Pro rozhodování je lepší znát objektivní pravděpodobnost, u velkého množství rozhodovacích problémů tomu však takto není. Navíc ani objektivní pravděpodobnost, založená na pozorování v minulosti již v současné době nemusí platit. [1]

„*Nejdůležitější je, aby si každý vždy uvědomoval přidanou hodnotu nebo dopad jednotlivých rozhodnutí či opatření na hlavní cíle organizace*.“ [5, str. 5]

2.2 Individuální a kolektivní rozhodování

2.2.1 Individuální rozhodování

Uplatnění tohoto principu znamená, že manažer je vybaven **pravomocí** samostatně rozhodovat o tom, co připadá jeho funkčnímu místu. Má právo sám **rozhodovat** o daných záležitostech. K dosažení cílů využívá jemu svěřených sankčních nástrojů a za svá rozhodnutí a jejich důsledky **nese odpovědnost**. Manažer nemá pouze právo rozhodovat, ale jedná se o jeho povinnost. Jakožto odpovědný vedoucí musí učinit rozhodnutí i pokud není v souladu s jeho osobními ambicemi či pokud nedokáže rozpoznat, které z nabízených řešení je pro organizaci to nejlepší. Je důležité, aby po formální stránce bylo přesně určeno, která osoba je za rozhodnutí odpovědna. [1]

V rámci individuálního rozhodování může manažer, ve složitějších případech, využít při přípravě rozhodnutí i další osoby. Může se poradit s člověkem mimo podnik, kterému důvěřuje a jehož názory považuje za správné. Dále se na přípravě mohou podílet i jeho podřízení na poradě, či může být sestaven podpůrný tým složený z odborníků. Odpovědnost za rozhodnutí však stále nese manažer sám. Využití těchto osob při přípravě rozhodnutí sebou nese několik kladů, ale i záporů. Mezi pozitivní efekty patří zvýšení kvalitativní i kvantitativní kapacity využitelné pro rozhodovací proces, dále je pak usnadněn proces realizace rozhodnutí, jelikož osoby, jichž se rozhodnutí dotýká, participovali na jeho přípravě. Mezi negativa může patřit klesající postavení manažera ve firmě, pakliže není schopen některá rozhodnutí učinit sám. Další problém může nastat, pokud manažer příjme rozhodnutí v rozporu s návrhem odborného týmu. V případě neúspěchu je pak jeho pozice znovu značně oslabena.

2.2.2 Kolektivní rozhodování

Při uplatnění tohoto principu je pravomoc rozhodovat a odpovědnost za důsledky dána kolektivu. Dobrým příkladem je například řízení družstva či valná hromada akciové společnosti. Kolektivní rozhodování se zpravidla provádí pomocí hlasování. Východiskem pak nejčastěji bývá rozhodnutí ve prospěch většiny. Ve zvláštních případech se pak jedná o kvalifikovanou většinu, absolutní či relativní většinu, členům kolektivu také může být poskytnuto právo veta. Specifickým problémem kolektivního rozhodování je **problém odpovědnosti**. Za nesprávné rozhodnutí nese odpovědnost často celý kolektiv a postiženi jsou i ti, kteří hlasovali proti tomuto rozhodnutí, ale byli přehlasováni. Příkladem může být odvolání celého představenstva akciové společnosti valnou hromadou. V některých případech dochází k tajnému hlasování, které chrání hlasující před případnými sankcemi. Jsou tak vytvářeny podmínky pro individuální vyjádření názoru, dochází však ke snižování osobní odpovědnosti za rozhodnutí. „*Při přijímání rozhodnutí dochází v daném orgánu ke spolupráci i konkurenci. V případě extrémní dominance spolupráce je hlavním motivem jednota názorů, ať už skutečná či pouze deklarovaná. Kritičnost a tříbení názoru ustupují do pozadí, což se může projevovat v nedostatečné kreativitě. Naopak při extrémní dominanci konkurenčních vztahů může docházet k rozpadu daného kolektivu na menší skupiny či jednotlivce, které spolu vedou nesmiřitelný boj bez snahy o nalezení společného řešení.*“ Důležité je, aby se spolupráce a konkurence vztahovala nikoliv vůči osobám, ale vůči názorům. [1, str. 91]

Výhody kolektivního rozhodování:

- zvýšení rozsahu informací a znalostí
- kombinace různých dovedností týkajících se zpracování informací
- rozšíření spektra přístupů k řešení problému
- stimulace úsilí členů skupiny

Nevýhody kolektivního rozhodování:

- individuální dominance
- odlišná pozice členů skupiny v hierarchii řízení
- sociální tlak (zamlčování nesouhlasných názorů)
- konkurence mezi členy vede k časově náročnému a neefektivnímu rozhodování

Přesto, že se jedná o rozhodování skupinové, je vhodné zvolit **vedoucího skupiny.** Mělo by se jednat o osobu váženou, vysoce kvalifikovanou, která má předpoklady stimulovat, rozvíjet a usměrňovat diskusi.

2.3 Dobře a špatně strukturované problémy

Problémy o kterých jednotlivec či skupina rozhodují, můžeme rozdělit do dvou základních skupin.

2.3.1 Dobře strukturované problémy

Jedná se o jednoduché a přehledné procesy, jejichž postup řešení je známý. Je zde dostatečná informační základna, rozhodování je rutinní a zpravidla nebývá zatíženo vyšším rizikem. Proměnné vyskytující se v těchto problémech lze ve většině případů kvantifikovat, stejně tak kritérium hodnocení je snadno kvantifikovatelné. Tyto úkoly se často řeší na nižších úrovních řízení, jedná se například o stanovení množství nakupovaného materiálu nebo rozhodnutí o vytížení výrobní linky.

Stále více problémů se ze skupiny špatně strukturovaných přesouvá do této skupiny. Důvodem je především zvyšování kvality, dostupnosti, včasnosti a množství informací v rámci organizace. K tomuto jevu přispívají především pokroky v oblasti informačních, výpočetních a komunikačních technologiích. [5]

2.3.2 Špatně strukturované problémy

Naopak špatně strukturované problémy jsou složité, nepřehledné a často unikátní, proto také většinou neexistuje všeobecný postup jejich řešení. Tyto problémy kladou vysoké požadavky na kvalifikaci, kreativitu a také zkušenosti rozhodovatele. Informační základna je zde omezená, existuje celá řada vstupních proměnných, které jsou velmi často kvalitativního charakteru. Do této skupiny problémů patří většina procesů vedoucích ke strategickým rozhodnutím s velkoplošným dopadem. Výstup rozhodnutí je zatížen značným rizikem. Příkladem špatně strukturovaného problému může být rozhodnutí o organizační struktuře podniku. [1]

2.4 Struktura rozhodovacích procesů

Rozhodovací proces můžeme rozdělit na několik fází různými způsoby. Zde bude uvedeno rozdělení procesu na osm základních fází. [4, str. 14]

1. Identifikace rozhodovacího problému.
2. Analýza a formulace rozhodovacího problému.
3. Stanovení kritérií hodnocení variant.
4. Tvorba variant.
5. Stanovení důsledků jednotlivých variant.
6. Hodnocení výsledků a výběr varianty.
7. Realizace zvolené varianty.
8. Kontrola výsledků realizované varianty.

Náplní **první etapy** je získávání, analýza a vyhodnocování relevantních informací a to nejen o firmě ale i jejím okolí, například o konkurenci, zákaznících, o politické situaci a podobně. Základem je provedení situační analýzy a cílem je identifikace určitých problémů, okamžitých či potenciálních, které vyžadují řešení. Je důležité stanovit prioritu řešení jednotlivých problémů, dle jejich očekávaného dopadu na chod firmy a její hospodářské výsledky.

Druhá etapa spočívá v sestavení plánu řešení problému, je tedy potřeba provést podrobnou analýzu problému včetně **určení** jeho **příčin** pomocí kauzální analýzy. V praxi se často setkáváme se situací, kdy se pracuje na odstranění samotného problému, ale jeho příčiny nejsou nalezeny. Takovéto řešení je ovšem pouze dočasné. V některých případech jsou příčiny vzniku problému nejasné, pro jejich nalezení můžeme například využít Išikawův diagram příčin a následků, metodu 5W1H či opakované pokládání otázky „Proč?“. Následující tabulka obsahuje hypotetický příklad využití opakovaného pokládání otázky „Proč?“ při zjišťování skutečné příčiny problému.

Tabulka 2.1: Využití metody „pětkrát proč“ ke stanovení příčin problému

Úroveň problému	**Odpovídající opatření**
Na podlaze výrobního provozu je louže oleje.	Setřete olej!
Proč?	
Protože ze stroje ukapává olej.	Opravte stroj!
Proč?	
Protože je opotřebované těsnění.	Vyměňte těsnění!
Proč?	
Protože jsme nakoupili těsnění vyrobená z nekvalitního materiálu.	Změňte technické specifikace těsnění!
Proč?	
Protože jsme při jejich nákupu udělali dobrý obchod.	Změňte zásady, jimiž se řídí nákup!
Proč?	
Protože pracovníci nákupu jsou hodnoceni podle krátkodobých úspor nákladů.	Změňte kritéria hodnocení pracovníků nákupu!

Zdroj: [1, str. 99]

Dále je důležité znát stav, ke kterému chceme dospět a definovat cíle rozhodovacího procesu. Každý cíl by měl být srozumitelný, měřitelný, akceptovatelný, realizovatelný a určený v čase. Tyto charakteristiky se často označují souhrnnou zkratkou SMART. Při stanovení více cílů je vhodné, aby byly ve vzájemně komplementárním vztahu, tedy aby dosažení jednoho nevylučovalo dosažení jiného. Potřebné je eliminovat osobní cíle jednotlivých řešitelů a vytvářet cíle, jejichž splnění bude dlouhodobě prospěšné pro celou organizaci. Dále je nutno charakterizovat vazby problému k ostatním problémům, identifikovat faktory rizika a nejistoty, posoudit vývojové tendence problému a vymezit okruh zainteresovaných stran. Hloubka této fáze je vždy limitována časem, řešitelskými kapacitami a finančními zdroji. „*Pokud se člověk dostane do časového tlaku, je nucen vystačit s menším objemem zpracovávaných informací, přičemž předpokládá, že ztráty vyvolané oddálením rozhodnutí budou podstatně vyšší než přínosy z dodatečných informací.*“ [1, str. 100]

Náplní **třetí etapy** je stanovení kritérií hodnocení variant. Při výběru kritérií bychom měli v maximální míře využít informace získané v předchozí fázi analýzy. Základním vodítkem mohou být především cíle, neboť hodnotící kritéria jsou určena hlavně pro stanovení stupně splnění těchto cílů. Kritéria by neměla být stanovena pouze tak, aby jejich splnění podporovalo dosažení cílů, ale také aby jejich splnění zabraňovalo situacím nežádoucím a eliminovalo negativní dopady. Každé kritérium musí mít jednoznačný a jasný smysl a být pro rozhodovatele srozumitelné. Toho lze snadněji dosáhnout u kritérií kvantitativních, nicméně bez kritérií kvalitativních se také nelze obejít. Kritéria by měla být volena tak, aby splnění jednoho neznamenalo i vysokou pravděpodobnost splnění toho druhého, poté je vhodné jedno z těchto kritérií ze souboru vyloučit. [4]

Obsahem **čtvrté etapy** je tvorba variant řešení rozhodovacího problému. Účelem je nalezení co nejširší palety variant, jak dosáhnout cíle. Jednotlivé varianty řešení by neměly být pouze modifikací varianty, která nás napadla jako první, ale je nutné najít co nejvyšší počet zásadně odlišných variant. Obecně platí, že čím vyšší je počet variant, tím větší je pravděpodobnost, že je mezi nimi i varianta optimální. Pro nalezení co nejvyššího počtu variant řešení můžeme využít například morfologickou analýzu, která spočívá v dekompozici celkového řešení problému na několik jednotlivých částí a pro řešení každé z těchto částí se hledá několik variant. Následnou kombinací těchto variant můžeme získat vcelku velký soubor variant řešení celkového problému. Pro nalezení různorodých variant řešení je jistě vhodný i brainstorming či brainwriting. V této fázi je možno využít i dalších metod podporujících tvůrčí myšlení, jako jsou metody „6 klobouků“, fresh eyes, fish pool, metoda 6-3-5 či další. Je nutné, aby při tvorbě variant současně neprobíhalo jejich hodnocení, některé varianty řešení tak mohou být vyloučeny, aniž by došlo k jejich podrobné analýze. Zcela nepřístupný je princip satisfakce, kdy je přijita první varianta, která je pro rozhodovatele uspokojivá, není však vyloučeno, že tato varianta se nakonec ukáže jako optimální. [1, 4]

Základem **páté etapy** je nalezení důsledků variant. Orientujeme se jak na důsledky krátkodobého charakteru, tak na ty dlouhodobého charakteru. Důsledky jednotlivých variant jsou zatíženy nejistotou, jelikož jsou orientovány do budoucnosti. Jejich stanovení je klíčové pro další fázi, kterou je hodnocení variant. Každá varianta řešení může mít několik důsledků, které nastanou s určitou pravděpodobností. Velmi jednoduchou, přehlednou a srozumitelnou pomůckou pro zobrazení těchto důsledků jsou v tomto případě pravděpodobnostní stromy. Pravděpodobnostní strom je grafický nástroj, zobrazující důsledky rizikových variant ovlivněných faktory rizika, které se realizují v určitém časovém sledu.

Finálním cílem **šesté fáze** je výběr takové varianty řešení rozhodovacího problému, která je nejlepší z hlediska celého souboru kritérií hodnocení. Základem je ze souboru variant vyřadit ty, které jsou nepřístupné. Jedná se především o varianty nesplňující některé cíle rozhodovacího procesu, dále o varianty překračující určité omezující podmínky. Jedná se o omezení z hlediska časové náročnosti realizace varianty, o vysokou kapitálovou náročnost projektu nebo nedostatek kvalifikované pracovní síly. Dle přístupu rozhodovatele k riziku jsou pak vyřazeny takové varianty, u nichž je riziko neúspěchu vyšší než nejvyšší akceptovatelné riziko. Ze zbylých přístupných variant je podle míry splnění hodnotícího kritéria u **jednokriteriálního hodnocení**, a míry splnění souboru hodnotících kritérií u **vícekriteriálního hodnocení**, vybrána ta nejvhodnější. Některé metody vícekriteriálního hodnocení variant jsou popsány v kapitole 2.7. V této fázi se rozhodovatelé dopouštějí několika typických chyb, mezi nejčastější patří:

- Přisuzování příznivých výsledků preferované variantě a nepříznivých výsledků variantě nepreferované.
- Snaha interpretovat informace takovým způsobem, aby vynikly výhody varianty preferované.
- Přisuzování neoprávněně větší váhy snadno aplikovatelným kritériím.
- Podceňování variant, jejichž důsledky byly stanoveny méně podrobně.

Kromě zvolení optimální varianty je často prospěšné určit variantu či varianty náhradní, které budou využity v případě problémů s realizací varianty prvotní.

Sedmá fáze je fází realizace zvolené varianty. Zde již rozhodovatel často nebývá klíčovou osobou, protože pravomoci a odpovědnost se přesouvají k jiným subjektům, k jednomu či více realizátorům. V této fázi platí, že dobré rozhodnutí pouze zvyšuje pravděpodobnost toho, zda dosáhneme kýžených výsledků. I v případě správného rozhodnutí není při jeho nekvalitní realizaci dosaženo splnění cílů. Samotná fáze realizace může při důležitých a strategických rozhodnutích trvat i několik let, během nichž se mohou výrazně změnit podmínky trhu a rozhodnutí, které se v minulosti jevilo jako optimální, je nyní nevhodné či nepřiměřené.

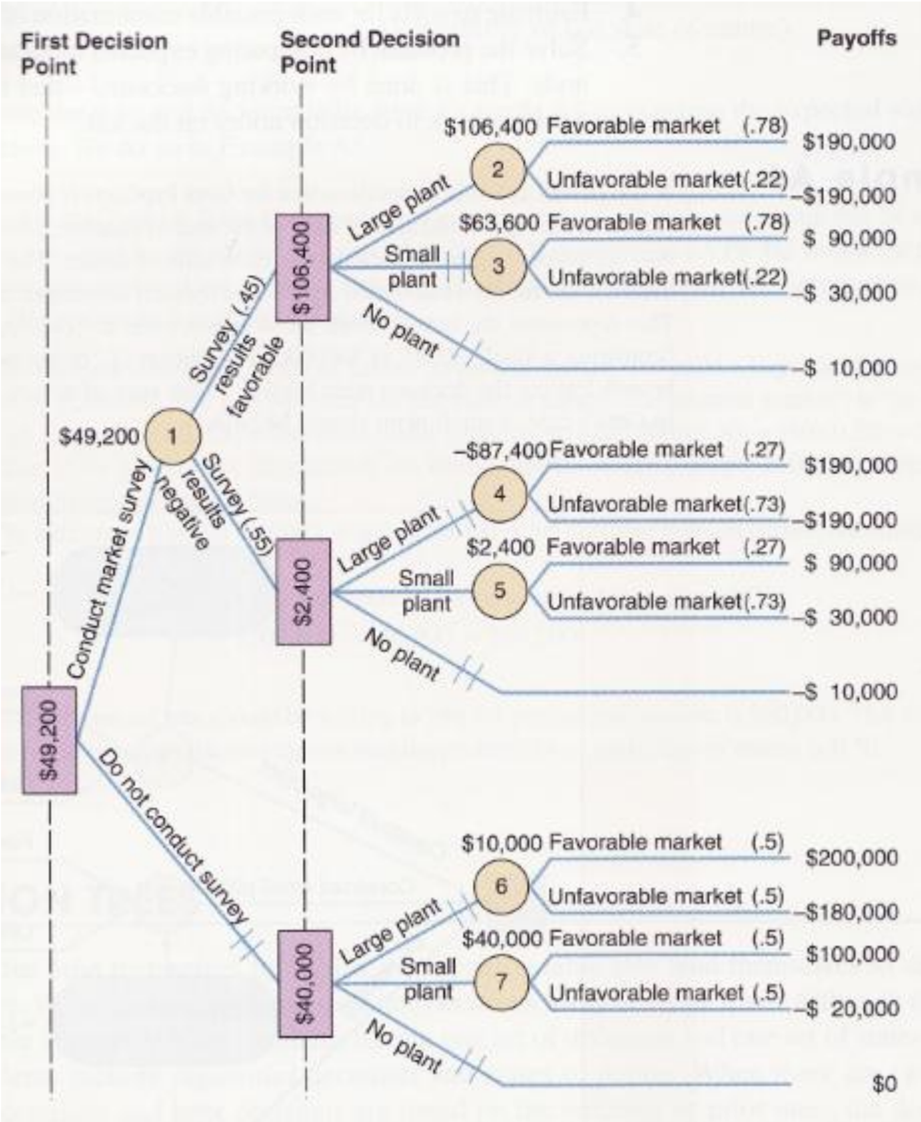
Náplní **poslední etapy** je analýza a hodnocení realizované varianty. Nejprve se podíváme na cíle definované ve druhé etapě, jestliže jich bylo dosaženo, postupovali jsme nejspíše správně. Tím bychom však skončit neměli, měli bychom si položit otázku, zda jsme nemohli dosáhnout ještě lepších výsledků a co jsme mohli udělat navíc. V případě, že cílů dosaženo nebylo, za předpokladu jejich správné definice, v podstatě existují pouze dvě možnosti, proč jich dosaženo nebylo. Tou první je nesprávně zvolená varianta řešení a tou druhou je její špatná realizace. Je důležité vymezit příčiny neúspěchu, vyvodit důsledky, určit odpovědnou osobu a upravit procesy tak, aby se podobným chybám v budoucnosti předešlo. Poznatky, které jsou závěrem této etapy, mohou být cenným zdrojem zkušeností při řešení obdobných problémů v budoucnosti. I přes splnění původních požadavků je tedy třeba věnovat této fázi značnou pozornost, k čemuž v praxi často nedochází.

Na závěr je důležité říci, že jednotlivé fáze nemají přesně vymezené hranice a může dojít k jejich vzájemnému prolínání. Každá fáze sebou nese své specifické problémy, pro které existuje řada možností řešení a záleží jen na odpovědné osobě, kterou cestou se vydá.

2.5 Rozhodovací strom

Rozhodovací strom je grafické znázornění rozhodovacího procesu, ukazuje rozhodovací alternativy, možné stavy prostředí, pravděpodobnosti jejich nastání a konečný výsledek (zisk) pro všechny kombinace rozhodovacích alternativ a stavů prostředí. Nejběžněji používaným kritériem pro vyhodnocení rozhodovacích stromů je očekávaná střední hodnota. [7]

Jak takový rozhodovací strom může vypadat, je zachyceno na následujícím obrázku.



Obrázek 2.1: Ukázka rozhodovacího stromu

Zdroj: [7] str. 646

2.6 Požadavky na rozhodovatele

Proces rozhodování popsaný v kapitole 2.4 je bezesporu vysoce náročný a především u špatně strukturovaných problémů klade na rozhodovatele celou škálu požadavků, jejich splnění by mělo zajistit, že dospějeme k nejlepšímu rozhodnutí. Mezi tyto požadavky řadíme především:

- nezaujatost (vůči variantám řešení či vůči spolurozhodovatelům)
- preferování zájmů organizace před osobními zájmy
- spolehlivost
- kreativitu a tvůrčí myšlení
- sebekritičnost
- konstruktivní myšlení
- kvalifikaci a zkušenosti

2.7 Metody vícekriteriálního rozhodování

V případě monokriteriálního rozhodování stačí pouze uspořádat varianty podle klesajících hodnot tohoto kritéria. V praxi je však většina problémů posuzována na základě několika kritérií. Metodám multikriteriálního rozhodování je tedy věnována tato kapitola.

Prvním úkolem je stanovení vah jednotlivých kritérií. Toho můžeme dosáhnout dvojím způsobem, buďto váhy jednotlivých kritérií odhadneme nebo využijeme některé, praxí ověřené, metody stanovení vah kritérií. Jednou z těchto metod je **metoda párového srovnávání.** Ta spočívá v sestavení tabulky, kde v pravé horní části této tabulky (horní trojúhelníkové matici) rozhodovatel zjišťuje u každé dvojice kritérií, zda preferuje kritérium uvedené v řádku před kritériem uvedeným ve sloupci. Jestliže ano zapíše do příslušného políčka jedničku v opačném případě nulu. Pro každé kritérium se nyní stanoví počet jeho preferencí f_i, který je roven počtu jedniček v řádku daného kritéria zvětšenému o počet nul ve sloupci uvažovaného kritéria. Na základě počtu preferencí jednotlivých kritérií se jejich normované váhy v_i stanoví dle následujícího vzorce, kde n je počet kritérií.

$$v_i = \frac{f_i}{n(n-1)/2} \tag{1}$$

Další metodou stanovení vah kritérií může být **Sattyho metoda**. Základ této metody je stejný jako v předchozím případě. Na rozdíl od metody párového srovnání se však kromě směru preference dvojic kritérií určuje také velikost této preference. Velikost preference se vyjadřuje určitým počtem bodů z bodové stupnice. Satty doporučuje stupnici zobrazenou v následující tabulce.

Tabulka 2.2: Sattyho doporučená bodová stupnice

Počet bodů	Deskriptor
1	Kritéria jsou stejně významná
3	První kritérium je slabě významnější než druhé
5	První kritérium je dosti významnější než druhé
7	První kritérium je prokazatelně významnější než druhé
9	První kritérium je absolutně významnější než druhé

Zdroj: [4, str. 127]

Na hlavní diagonálu následně doplníme nuly a do dolní trojúhelníkové matice doplníme převrácené hodnoty čísel z horní trojúhelníkové matice. Váhu jednotlivých kritérií pak můžeme určit následujícím aproximačním postupem, kdy stanovíme geometrické průměry řádků Sattyho matice a normalizací těchto řádkových geometrických průměrů získáme dobré odhady jejich vah. Dalšími možnostmi jak stanovit váhy kritérií jsou například bodovací metoda nebo Fullerův trojúhelník. Po stanovení vah již můžeme přistoupit ke konkrétním metodám vícekriteriálního hodnocení variant.

2.7.1 Aditivní metoda

Tato jednoduchá a transparentní metoda spočívá v transformaci kriteriálních hodnot x_{ij} na parciální užitky U_{ij} dle následujícího vzorce.

$$U_{ij} = \frac{x_{ij} - D}{H - D} \tag{2}$$

kde: D je dolní mez množství, kdy užitek je nulový;

H je horní mez množství, kdy užitek je maximální

„*Hodnoty D a H můžeme volit jako mezní hodnoty kritérií z disponibilní množiny variant, nebo jako námi zvolené (teoretické) mezní hodnoty*." [12, str. 97]

Příslušné užitky pak již pouze vynásobíme jim příslušnou váhou a uděláme součet vážených užitků pro jednotlivé, hodnocené varianty. Varianta s nejvyšším součtem užitků by měla být tou optimální.

2.7.2 Aspirační metoda

Další velmi jednoduchá metoda pro výběr nejvhodnější varianty je aspirační metoda. Kde je nejdůležitější stanovit si tzv. aspirační úrovně. To jsou úrovně, kterých by jednotlivá kritéria měla alespoň dosáhnout, nebo ještě lépe je překonat, pokud se jedná o tzv. maximalizační kritéria. U minimalizačních je tomu samozřejmě naopak. Za nejlepší se má varianta, která nevyhovuje co nejmenšímu počtu kritérií. Pakliže je takovýchto variant více, rozhodne o jejich pořadí nejdůležitější kritérium.

2.7.3 Lexikografická metoda

Lexikografická metoda je velice jednoduchá a zároveň hrubá. Název je odvozen od uspořádání slovníků dle abecedy. Při uplatnění této metody uspořádáme kritéria dle jejich důležitosti. Dále dle hodnot, kterých nabývá nejdůležitější kritérium, stanovíme pořadí variant. Pakliže několik variant nabývá u příslušného kritéria stejných hodnot, rozhoduje o pořadí další kritérium. V tomto případě se tedy může stát, že o pořadí přijatelnosti jednotlivých variant rozhodne pouze jediné kritérium, což v praxi není nejvhodnější. Této metody lze využít především v situacích, kdy jedno kritérium dominuje ostatní, či pokud je rozhodovatel pod časovým tlakem a nemá čas, lidské či kapitálové prostředky k podrobnější analýze problému. Metoda se také používá pro stanovení prvého pořadí pro velké soubory variant a zpravidla následují podrobnější metody. [12]

Dále existují metody vzájemného porovnávání variant. Jsou jimi například metoda AGREPREF, PROMETHEE, TOPSIS a další. [8]

3 OPERAČNÍ VÝZKUM

3.1 Charakteristika operačního výzkumu

Počátky operačního výzkumu jako samostatné disciplíny jsou datovány do 30. a 40. let minulého století a jsou spjaty s nositeli Nobelovy ceny za ekonomii G. B. Dantzigem a L. Kantorovičem. Rozvoj této disciplíny nastává během 2. světové války, kdy byly v USA a Velké Británii vytvořeny speciální týmy pracovníků pro analýzu nejsložitějších strategických a taktických vojenských problémů. Největšího rozvoje dosáhl operační výzkum v poválečném období, kdy ve světě docházelo k masivnímu ekonomickému rozvoji. Dalším faktorem, který bezpochyby ovlivnil rozvoj operačního výzkumu, bylo zdokonalování výpočetní techniky.

„*Operační výzkum (jako anglo-americké ekvivalenty tohoto termínu lze uvést operational research, operations research nebo management science) je možné charakterizovat jako vědní disciplínu nebo spíše soubor disciplín, které jsou zaměřeny na analýzu různých typů rozhodovacích problémů.*“ „*Lze jej charakterizovat i jako prostředek pro nalezení nejlepšího (optimálního) řešení daného problému při respektování celé řady různorodých omezení, které mají na chod systému vliv.*“ [8, str. 9]

Operační výzkum je možné vnímat jako vědeckou disciplínu zabývající se zkoumáním operací v organizačních jednotkách. Tato disciplína je charakterizována především systémovým přístupem, konstrukcí a analýzou matematických modelů, týmovou prací při studiu operací, orientací na procesy rozhodování a užíváním výpočetní techniky. [3, str. 5]

Tato vědní disciplína má rozmanité možnosti využití. Dá se aplikovat v oblasti řízení zásob a výroby, při tvorbě dlouhodobých plánů a koncepcí, ale také střednědobých a krátkodobých projektů. Může být také využita v problematice přímého řízení technologických a výrobních procesů. [11]

Základním nástrojem operačního výzkumu je matematické modelování. Při analýze reálného systému prostřednictvím jeho modelu je třeba brát v úvahu, že model je pouze zjednodušeným obrazem tohoto systému. Modelování má však celou řadu výhod. Dle Jablonského lze jako **základní výhody modelového přístupu** uvést:

- Použití matematických modelů umožňuje strukturalizaci systému a specifikaci všech možných variant systému, kterých může být často neomezené množství.

- Modely umožňují analýzu chování systému ve zkráceném čase. Procesy, které mohou trvat v reálném systému měsíce či roky, mohou být simulovány na počítačích ve zlomcích sekund.
- S modely lze snadno manipulovat a provádět četné experimenty pomocí změn jejich parametrů.
- Náklady na realizaci modelu nejsou sice zanedbatelné, jsou však vždy nižší než experimentování s reálným systémem.

„Mimořádný význam při sestavování modelu rozhodovací situace má matematická formulace stanoveného cíle, jako funkce rozhodovacích proměnných. Jde o formulaci ***účelové kriteriální funkce****. Vývoj exaktních metod dospěl do situace, kdy můžeme využívat pro řešení problémů více než jednu účelovou funkci.* [6, str. 9] To odpovídá požadavkům z praxe, kdy manažeři musí zvažovat více ukazatelů při výběru vhodného řešení problému. „*Většina modelů obsahuje vhodně formulovanou* ***soustavu omezujících podmínek****, vytvářejících rámec, ve kterém se uvažovaná řešení mohou pohybovat*.“ [6, str. 9] Přesné vymezení účelové funkce a omezujících podmínek značně ovlivňuje úspěšnost aplikace modelu při řešení reálných problémů.

V případě, kdy model vyhovuje soustavě omezujících podmínek, hovoříme o **přípustném řešení**. Pokud nalezneme takové hodnoty rozhodovacích proměnných, které nejenže vyhovují soustavě omezujících podmínek, ale stejně tak zajišťují dosažení maxima či minima účelové funkce, hovoříme o **optimálním řešení**.

3.2 Klasifikace modelů

Modely lze **klasifikovat podle očekávaného použití** modelů, na:

- *Popisné modely*, které vyjadřují základní vztahy v reálném objektu a vytvářejí podklady pro hodnocení jeho úrovně. Dávají manažerům možnost jednoduchého srovnání různých variant řešení problémů.
- *Prognostické modely*, které jsou používány pro odhad budoucího vývoje. Protože se většinou opírají o statistickou analýzu vývoje časových řad, jsou někdy označovány jako modely statistické.
- *Optimalizační modely*, které mají za úkol hledat nejlepší varianty řešení daného problému. Tyto modely mají za úkol nalezení extrému (minima nebo maxima) účelové funkce.

Dle tvaru výstupu rozlišujeme:

- *Deterministické modely*, u nichž stejným vstupům lze přiřadit jednoznačně stejné výstupy. V tomto modelu jsou všechna vstupující data známa s určitostí a vystupují zde jako konstanty. S deterministickými modely pracuje především matematické programování a teorie grafů.
- *Stochastické modely,* u kterých lze zadaným vstupům přiřadit výstupní veličiny jen s určitou pravděpodobností. Jedná se o modely, ve kterých je jeden nebo více prvků udán jako náhodná veličina pomocí známého náhodného rozdělení. Spadají sem například teorie hromadné obsluhy, Markovovské rozhodovací procesy nebo teorie zásob.

Dle metody hledání řešení rozeznáváme:

- *Klasické matematické modely*, jejichž řešení se opírá o metody matematické analýzy a matematické optimalizace.
- *Simulační modely,* kde se využívá pro hledání řešení generování náhodných pokusů a jejich statistické vyhodnocování. [6]

3.3 Fáze aplikace operačního výzkumu

Při aplikaci operačního výzkumu pro řešení konkrétního rozhodovacího problému lze rozlišit několik základních **fází**. [8]

1. **Rozpoznání problému a jeho definice**. Tento krok je popsán v první kapitole tohoto textu. Lze pouze doplnit nutnost schopnosti manažera, odhadnout potřebu modelového přístupu.

2. **Formulace ekonomického modelu**. Reálný systém je často příliš složitý na to, aby bylo možné jej modelovat. V praxi se však často ukazuje, že není nutné ani žádoucí všechny prvky systému uvažovat. **Ekonomický model** je tedy zjednodušený popis reálného systému, který obsahuje pouze nejpodstatnější prvky a vazby mezi nimi.

3. **Formulace matematického modelu**. Jedná se o převedení ekonomického modelu na model matematický. Prvky ekonomického modelu jsou v modelu matematickém reprezentovány proměnnými, hodnotami proměnných, parametry, lineárními či nelineárními rovnicemi a nerovnicemi.

4. **Řešení matematického modelu**. Využívají se metody a postupy operačního výzkumu, které jsou popsány v kapitole 3.6.

5. **Interpretace výsledků a jejich verifikace**. Řešení může být optimální v rámci modelu, v praxi se však může ukázat jako nepoužitelné, proto by mělo docházet k jeho ověření před samotnou implementací.

6. **Implementace**. Úspěšná implementace by měla přispět ke zlepšení fungování daného systému s ohledem na definovaný cíl.

3.4 Základní disciplíny operačního výzkumu a možnosti jejich využití

Operační výzkum se zabývá různorodými oblastmi reálného života. Níže jsou uvedeny základní disciplíny operačního výzkumu včetně možností jejich využití v podnikové praxi:

Matematické programování

Zabývá se řešením úloh, ve kterých se jedná o optimalizaci kriteriální funkce na množině variant, které jsou určeny soustavou omezení ve formě lineárních nebo nelineárních rovnic či nerovnic. Lineární programování bývá nejčastěji používáno k finančnímu plánování, tedy k tomu, určit kolik finančních prostředků se má vložit do určitých investičních variant, aby výnos byl co nejvyšší, popřípadě se minimalizuje riziko. Dále může být LP využito k plánování reklamy. Ke stanovení částí rozpočtu, které budou vloženy do jednotlivých médií s ohledem například na cílový segment, který má být osloven. Pomocí LP také můžeme řešit směšovací problémy, kdy cílem je vytvoření požadované směsi s co nejnižšími náklady. V praxi se také může lineární programování využít k rozvržení pracovníků na směny nebo vytváření nářezových plánů. Typickým příkladem využití LP je naplánování výrobního programu tak, aby bylo dosaženo co nejvyššího zisku. Postup plánování výrobního programu je ilustrován na příkladu v kapitole 4.4.

Dopravní úloha

Dopravní úloha slouží k určení co nejméně nákladné přepravy určitých objektů (materiál, výrobky) z několika míst (výrobny, sklady) k několika odběratelům. Využít je tedy mohou veškeré podniky, které mají více jako jedno místo expedice svých shodných výrobků a více jako jednoho odběratele těchto výrobků. Metody řešení dopravní úlohy jsou popsány v kapitole 3.6.3.

Vícekriteriální rozhodování

Disciplína, která předpokládá posuzování rozhodovacích variant na základě několika kritérií, které jsou často vzájemně protikladná. Využití je široké. Například se může jednat o rozhodnutí, který výrobní stroj koupit na základě různých parametrů.

Teorie grafů

Věnuje se analýze rozhodovacího problému, jehož model je vyjádřen ve formě grafu (množina uzlů a hran). Teorie grafů je v podnikové praxi využívána především při řešení tzv. problému obchodního cestujícího. Cílem je najít takovou cestu mezi všemi uzly (například městy či podniky) aby se každý uzel v této cestě vyskytl jednou a cesta začínala i končila ve stejném uzlu. Využití teorie grafů je jistě vhodné pro všechny podniky zabývající se logistikou nebo prostě jen pro podniky, které rozváží své výrobky do většího počtu míst. K dispozici je vždy pouze omezený počet vozidel s omezenou kapacitou a není v manažerových silách stanovit optimální využití jednotlivých rozvozních tras.

Z teorie grafů vychází další velmi často používaná disciplína operačního výzkumu, kterou je **řízení projektů**. Projekt je nejčastěji chápán jako soubor činností. Jsou projekty skládající se z vysokého množství činností a setkává se s nimi téměř každý podnik. Může se jednat například o výstavbu nového podnikového závodu nebo o zavádění nového výrobku na trh. Jednotlivé činnosti jsou často omezeny kapacitou, mohou být prováděny až po ukončení činností předchozích, čas jejich trvání nemusí být předem přesně znám a podobně. Existuje několik metod, které pomáhají překonat problémy spojené s řízením projektů. Jedná se především o metody CPM (Critical Path Method) a PERT (Program Evaluation and Review Technique). Metoda CPM slouží k časové analýze prováděných činností a k nalezení časových rezerv. Metoda PERT je pravděpodobnostním rozšířením metody CPM a počítá s tím, že doba provádění jednotlivých činností není předem přesně známa. Jako grafické znázornění posloupnosti jednotlivých činností se využívá například Ganttův diagram. [8]

Teorie zásob

Odvětví zabývající se strategií řízení zásobovacího procesu a optimalizací objemu skladovaných zásob s ohledem na minimalizaci celkových skladovacích nákladů nebo maximalizaci zisku. Prakticky každý podnik udržuje zásoby. Často se však stává, že množství zásob na skladě neodpovídá požadavkům organizace. Buďto je zásob příliš mnoho a jsou v nich zbytečně vázána firemní aktiva, nebo je zásob málo a dochází k přerušení výroby a ztrátám. Velmi známý je Harris-Wilsonův vzorec, což je v podstatě jeden ze základních vzorců teorie zásob. Jedná se o deterministický model se spojitou spotřebou. Teorie zásob však pracuje i se složitějšími systémy, kde spotřeba je dána střední hodnotou spotřeby s normálním rozdělením pravděpodobnosti a podobně. Výstupem z teorie zásob pro podnik bývá především objednávané množství, časový okamžik objednání a hladina objednání, což je množství zásoby na skladě, při kterém se provede objednávka.

Teorie hromadné obsluhy

Zkoumá obslužné systémy a řeší disproporce, ke kterým může v souvislosti s jejich realizací docházet. Je též nazývána teorií front. V těchto systémech vždy vystupují určité požadavky a určitá obslužná místa. Cílem je poté optimalizovat systém tak, aby pracoval co nejefektivněji (aby se nevytvářely dlouhé fronty, aby požadavek nečekal déle než určitou dobu a podobně). Typickými místy, kde se dá této teorie využít, jsou banky, pošty, mýtné brány na dálnicích, čerpací stanice, supermarkety atd. Cílem je určit optimální počet „otevřených" obslužných míst v určitý den nebo hodinu. Tato teorie pracuje především s rozdělením pravděpodobnosti příchodu požadavků do systému a s rozdělením pravděpodobnosti doby obsluhy. Výsledkem může být například střední doba, jakou požadavek stráví ve frontě, střední počet požadavků ve frontě nebo stanovení pravděpodobnosti, že bude požadavek obsloužen bez čekání.

Modely obnovy

Zkoumají systémy, ve kterých jsou jednotky, které po určité době provozu selžou a je třeba je opravit případně nahradit novými. Cílem těchto modelů je stanovit optimální dobu životnosti nějakého aktiva tak, aby pravděpodobnost vysokých nákladů, například na údržbu, nebyla příliš vysoká. Dále pomocí teorie obnovy lze zjistit kolik objektů průměrně selže za určité období a bude potřeba je vyměnit nebo opravit. Díky tomu můžeme stanovit výši finanční rezervy určené k těmto činnostem. Modely obnovy také slouží k výběru vhodného stroje nebo jiného objektu tak, aby celkové průměrné náklady na jeho užívání byly co nejnižší.

Markovovské rozhodovací procesy

Obecný prostředek pro popis chování dynamických systémů, které se mohou ve sledovaných časových úsecích nacházet vždy v některém z konečného počtu stavů. Základním cílem je predikce budoucího chování takového systému. Příkladem použití v podnikové praxi může být stanovení podílů výrobků určitého typu na trhu, po uplynutí určitého počtu období. Pokud využijeme poznatků z Markovových procesů a poznatků z teorie obnovy, můžeme stanovit věkovou strukturu objektů (stroje, součástky) po uplynutí určitého časového intervalu. Markovovy procesy mohou být využity i v pojišťovnictví pro stanovení počtu klientů, kteří například i po 5 letech budou stále bez nehody.

Přiřazovací problém

V tomto případě se jedná o přidělení zdrojů jednotlivým alternativám tak, aby se například maximalizoval celkový zisk. Typickým příkladem může být přiřazení dopravních prostředků jednotlivým trasám nebo pracovníků jednotlivým činnostem. Tyto problémy jsou řešeny pomocí Maďarské metody. [13]

Teorie her

Analyzuje optimální strategie chování účastníků rozhodovacích situací, kteří si navzájem konkurují. Příkladem použití v praxi může být situace, kdy se podnik rozhoduje, jakého veletrhu se zúčastní a jak velkou expozici na něj rozvrhne s ohledem na chování svého konkurenta. [14]

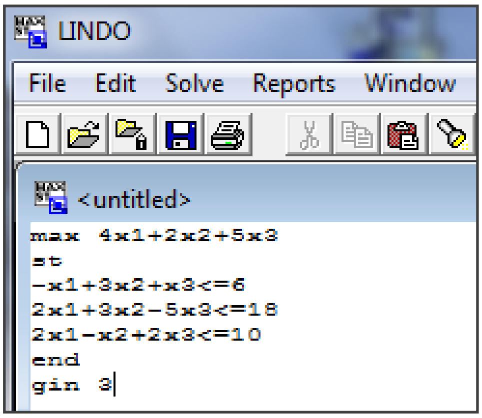
<u>Simulace</u>

Přístup k řešení některých rozhodovacích problémů, spočívající v počítačovém experimentování s matematickým modelem daného systému.

3.5 Softwarové řešení

Řešení úloh operačního výzkumu může být zásadně ulehčeno **použitím** vhodných **programových prostředků**. Dostupných programů je celá řada a záleží na uživatelových osobních preferencích, který z nich si vybere. V některých případech, například pro řešení úloh lineárního programování lze využít tabulkový kalkulátor MS Excel. Profesionálními programy jsou například STROM, Lindo, Lingo, DSWin, DecisionPro, CPLEX, OSL, XA a další. Ceny těchto programů mohou být vysoké, ale jejich přínosy by měly, při správném použití, náklady na pořízení převážit. [8, 11]

Na následujícím obrázku je zachyceno zadání jednoduché ÚLP v systému LINDO.



Obrázek 3.1: Zadání ÚLP v systému Lindo

Zdroj: vlastní zpracování

3.6 Matematické programování

Matematické programování se zabývá řešením optimalizačních úloh, ve kterých jde o nalezení minima respektive maxima předem definovaného kritéria (zisk, náklady, objem výroby…) na množině všech přípustných řešení. Prakticky to znamená, že hledáme extrém zmíněného kritéria při platnosti omezujících podmínek. Dané kritérium je vyjádřeno funkcí více proměnných a omezující podmínky jsou vyjádřeny pomocí soustavy rovnic či nerovnic. Matematické programování dále dělíme na lineární a nelineární programování popřípadě i na programování celočíselné. [11]

Úlohu matematického programování nazveme úlohou **lineárního programování** v případě, že kriteriální funkce i všechny rovnice a nerovnice omezujících podmínek jsou tvořeny lineárními výrazy. Lineární programování je nejpropracovanější oblastí operačního výzkumu. Důvody jsou následující: [11]

- Vysoké množství typů a variant manažerských problémů je možné formulovat pomocí modelů LP.
- Pokud dokážeme problém správně formulovat, je k dispozici celá řada dobrých programových prostředků, pomocí nichž dosáhneme rychlého řešení i pro poměrně rozsáhlé úlohy.
- Algoritmy pro řešení úloh LP dávají jako vedlejší produkt vlastního řešení řadu dalších informací velmi důležitých pro řídící management.
- Praxe s používání LP rozvíjí schopnosti využívat koncept hledání optima při splnění omezujících podmínek i při intuitivním rozhodování.

O **nelineární programování** se jedná v případě, kdy je kriteriální funkce nebo alespoň jedna rovnice či nerovnice z omezujících podmínek tvořena nelineárním výrazem. Řešení těchto úloh je více problematické a často dojdeme pouze k řešení dílčímu, ne však optimálnímu. A to je důvod, proč se těchto modelů využívá v praxi daleko méně než modelů lineárních.

V rozhodovací praxi také často dochází k situacím, kdy proměnné modelu mohou nabývat pouze předem stanovených hodnot nebo musí jít o celá čísla. Například výrobky jsou objednávány po celých baleních, stroje jsou dodávány po kusech, finanční prostředky nelze vynakládat spojitě a podobně. V tomto případě hovoříme o **celočíselném programování**. K nejstarším metodám řešení úloh s požadavkem celočíselnosti patří postupy označované jako metody sečných (řezných) nadrovin neboli Gomoryho algoritmus. U některých specifických úloh LP je potřeba volit pouze mezi dvěma variantami. Tato skupina úloh se označuje jako binární programování. [6]

3.6.1 Formulace úloh lineárního programování

Pokud je rozpoznán problém, musí se nejprve formulovat jeho ekonomický model. Je třeba znát cíl, ke kterému chceme pomocí ovlivňování určitých procesů dojít (potřeba stanovení optimalizačního kritéria). Dále je třeba znát procesy, kterými je možné ovlivňovat výsledný efekt (řiditelné vstupy) a činitele, které jakýmkoliv způsobem omezují realizaci těchto procesů a které nemůžeme v rámci našich kompetencí a řešení daného problému ovlivnit (neřiditelné vstupy).

Při formulaci modelu je nutná dobrá znalost fungování zkoumaného reálného systému, mít přístup k věrohodným datům a být si vědom všech souvislostí, které mohou mít na správnost řešení vliv. Proto je obvyklé, že se formulace účastní odpovědný pracovník daného podniku či organizace. Jestliže výše uvedené známe, můžeme přistoupit ke konstrukci matematického modelu.

Při konstrukci matematického modelu je nejprve důležité si stanovit, co jsou rozhodovací proměnné. Jde o číselné hodnoty, které chceme po vyřešení modelu získat. Je třeba si uvědomit, které všechny hodnoty by bylo dobré znát, aby byla úloha považována za vyřešenou. Každá z těchto doposud neznámých hodnot pak bude tvořit jednu proměnnou.

Dále je potřeba formulovat kriteriální (účelovou) funkci, která je v podstatě měřítkem kvality řešení. Tato funkce závisí na hodnotách v předchozím kroku definovaných proměnných. Při řešení pak hledáme takové hodnoty proměnných, při kterých tato funkce nabývá svého maxima nebo minima.

Následně je potřeba definovat všechna omezení dané úlohy. Tyto omezení jsou formulovány ve formě rovnic a nerovnic. Je nutné dávat pozor, aby matematický model problému obsahoval všechna omezení. Nejčastěji se jedná o omezení související s disponibilním množstvím zdrojů nebo o tzv. „vazební" podmínky (např. pokud není vyroben výrobek A, nemůže být vyráběn ani výrobek B), popřípadě o omezení určující obor hodnot jednotlivých proměnných (jako je například jejich nezápornost).

Příklad optimalizace portfolia

V následující podkapitole je na základě výše uvedených doporučení uveden konkrétní příklad formulace úlohy lineárního programování, jedná se o optimalizaci portfolia. Příklad převzat z knihy od autorů Plevný, Žižka z roku 2010. [11, str. 47]

Zadání: Investiční společnost předpokládá investovat své volné peněžní prostředky v celkové výši 55 mil. Kč do cenných papírů. Požadavkům společnosti vyhovují investice do akcií 3 různých společností (S_1, S_2, S_3) a do dvou druhů dluhopisů (D_1, D_2). Každá investiční příležitost je charakterizována odhadem míry rizika (bezrozměrná veličina, čím vyšší je, tím je vyšší i riziko) a odhadem očekávaného výnosu (v % p.a.), viz tabulka 3. Dle strategie investiční společnosti dále každá z možných pěti variant bude zakoupena nejvýše v objemu 30 % celkových investic, celková míra rizika nepřesáhne 0,40, do dluhopisů nebude investováno více než 45% celkového objemu investic a souhrnná částka investovaná do 1. a 3. společnosti musí dosáhnout alespoň dvojnásobku investic do druhé společnosti.

Tabulka 3.1: Popis investičních variant

Charakteristiky	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**D_1**	**D_2**
Míra rizika	0,39	0,65	0,54	0,08	0,17
Výnos	11,30	14,60	14,20	6,40	8,20

Zdroj: [11, str. 47]

Nejprve je nutné si stanovit proměnné. Po vyřešení úlohy bychom rádi znali množství peněžních prostředků investovaných do každé z pěti investičních možností. Proto použijeme 5 proměnných vyjadřujících právě toto množství peněžních prostředků (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

Dále musíme sestavit účelovou funkci. Naším cílem je maximalizovat celkový výnos investice, který získáme jako součet výnosů z jednotlivých investic. Pokud výnos z jedné investice dostaneme jako součin očekávaného výnosu a množství peněz do této varianty vložených, pak výsledná účelová funkce nabude následujícího tvaru.

$$z = 0{,}113\, x_1 + 0{,}146\, x_2 + 0{,}142\, x_3 + 0{,}064\, x_4 + \ 0{,}082\, x_5$$

Tuto funkci budeme při řešení maximalizovat.

Ze zadání následně vyplývá několik omezujících podmínek:

1. Máme k dispozici 55 mil. Kč.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ \leq 55$$

2. Každá varianta bude zakoupena nejvýše v objemu 30 % celkových investic.

$$x_i \leq 0{,}3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\,); \quad i = 1{,}2 \ldots{,}5$$

3. Celková míra rizika nepřesáhne 0,40.

$$(0{,}39x_1 + 0{,}65x_2 + 0{,}54x_3 + 0{,}08x_4 + 0{,}17x_5\,)/(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\,) \leq 0{,}4$$

po úpravě: $\quad -0{,}01x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}32x_4 - 0{,}23x_5 \ \leq 0$

4. Do dluhopisů nebude investováno více než 45% celkového objemu investic.

$$x_4 + x_5 \ \leq 0{,}45 \ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

5. Souhrnná částka investovaná do 1. a 3. společnosti musí dosáhnout alespoň dvojnásobku investic do druhé společnosti.

$$x_1 + x_3 \geq 2x_2$$

6. Jelikož není možné investovat záporné částky či částky rovné 0, je přidána následující podmínka.

$$x_i \geq 0; \quad i = 1{,}2, \dots ,5$$

Výsledný matematický model je následující:

maximalizujte

$$z = 0{,}113 \ x_1 + 0{,}146 \ x_2 + 0{,}142 \ x_3 + 0{,}064 \ x_4 + \ 0{,}082 \ x_5$$

za podmínek:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ \leq 55$$

$$x_i \leq 0{,}3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5); \quad i = 1{,}2 \dots ,5$$

$$-0{,}01x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}32x_4 - 0{,}23x_5 \ \leq 0$$

$$x_4 + x_5 \ \leq 0{,}45 \ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_1 + x_3 \geq 2x_2$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1{,}2, \dots ,5$$

Tento model může být následně řešen například pomocí simplexového algoritmu. Může být řešen „ručně“, ale vzhledem k časové náročnosti výpočtu by bylo vhodnější použití specializovaného softwaru. Základní principy simplexové metody jsou popsány v následující kapitole.

3.6.2 Simplexová metoda

Simplexová metoda je postup pro nalezení optimálního řešení úlohy LP, který poprvé odvodil a publikoval americký vědec Georg B. Dantzig. Výpočet začínáme od kteréhokoliv přípustného řešení. Pokud toto řešení není optimální, poté v dalším kroku přecházíme k dalšímu přípustnému řešení, která má lepší (tzn. u maximalizační úlohy vyšší, u minimalizační nižší) nebo stejnou hodnotu účelové funkce. [9]

Kanonický tvar úlohy LP

Použití simplexové metody je možné pouze tehdy, pokud je úloha v kanonickém tvaru. V případě, kdy tomu tak není, musí se úloha do kanonického tvaru převést. KTÚLP předpokládá minimalizační účelovou funkci. Úlohy, týkající se například zisku, však mají účelovou funkci maximalizační. **Převod maximalizačního problému na minimalizační** se provede změnou tvaru účelové funkce. Nová účelová funkce se z té původní získá změnou znamének všech koeficientů na opačná. Dále KTÚLP vyžaduje, aby omezující podmínky byly ve tvaru rovnic. Pokud je omezující podmínka vyjádřena ve tvaru nerovnice, odstraní se nerovnost pomocí tzv. **doplňkových proměnných**. V případě nerovnosti typu $\leq$ se k levé straně náležité omezující podmínky připočte nová doplňková proměnná. U nerovnosti typu $\geq$ se odečte od levé strany příslušné omezující podmínky další doplňková proměnná. Doplňkové proměnné zůstávají v řešení, proto jsou jim v účelové funkci přiřazovány nulové koeficienty a tyto proměnné tak neovlivňují hodnotu účelové funkce. Dále platí, že vektor pravých stran omezujících podmínek musí být kladný. V případě, že tomu tak není, musí být příslušný řádek vynásoben minus jedničkou. Pro nalezení počátečního řešení je požadováno, aby existoval stejný počet jednotkových vektorů, jako je počet omezujících podmínek. Pokud některé jednotkové vektory chybí, vytvoří se uměle pomocí přidání tzv. **umělých proměnných**. Umělá proměnná se vytvoří tak, že k řádku, kde má být jednička chybějícího jednotkového vektoru se tato umělá proměnná přičte. Přidání umělé proměnné mění i účelovou funkci. Zde, obdobně jako u doplňkových proměnných, se o každou umělou proměnnou rozšiřuje účelová funkce. Jelikož tyto proměnné slouží pouze k nalezení počátečního řešení a nemají ekonomický význam, jsou v průběhu řešení po vynulování odstraňovány. K umělým proměnným se tedy v účelové funkci přiřazuje jako koeficient velmi vysoké číslo. To je založeno na předpokladu, že při minimalizaci účelové funkce budou tyto umělé proměnné s vysokými koeficienty vytlačeny. Toto číslo nebývá přesně definováno a přiřazuje se mu koeficient ω. Jedná se o neurčité číslo, o kterém je předpokládáno, že je dostatečně vysokým kladným číslem a které je pro všechny umělé proměnné stejné. Při transformaci ÚLP se nejprve tvoří doplňkové proměnné a poté až proměnné umělé. Jelikož doplňková proměnná může být zároveň proměnnou umělou. „*Pokud by umělá proměnná měla zůstat v optimálním řešení, tak to naznačuje, že řešení ÚLP neexistuje.*“ [10, str. 47]

Simplexová tabulka

Simplexová tabulka je grafická pomůcka pro zjednodušení a vyšší přehlednost prováděných výpočtů v simplexové metodě. Každému řešení odpovídá jedna simplexová tabulka. Tato tabulka není obecně formalizována a může nabývat různých podob. Simplexová tabulka může vypadat následovně.

Tabulka 3.2: Možná podoba simplexové tabulky

i	Báze	c_i	$\boldsymbol{x}_h$	c_1	c_2	.....	c_j	.....	c_n
				$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$		$\boldsymbol{p}_j$		$\boldsymbol{p}_n$
1	$\boldsymbol{p}_{i_1}$	c_{i_1}	$x^h_{i_1}$	p_{11}	p_{12}		p_{1j}		p_{1n}
2	$\boldsymbol{p}_{i_2}$	c_{i_2}	$x^h_{i_2}$	p_{21}	p_{22}		p_{2j}		p_{2n}
:									
:									
i	$\boldsymbol{p}_{i_i}$	c_{i_i}	$x^h_{i_i}$	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{in}
:									
:									
m	$\boldsymbol{p}_{i_m}$	c_{i_m}	$x^h_{i_m}$	p_{m1}	p_{m2}		p_{mj}		p_{mn}
m+1			$f(\boldsymbol{x}_h)$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$		$z_j - c_j$		$z_n - c_n$

Zdroj: [10, str. 37]

„V prvním sloupci simplexové tabulky se nachází číslo řádku, druhý sloupec obsahuje bazické vektory, odpovídající zkoumanému řešení. Je důležité zapsat bazické vektory do takového řádku, aby průsečík se sloupcem, který tomuto vektoru patří, byla 1. Ve třetím sloupci jsou koeficienty účelové funkce, jejichž indexy odpovídají příslušným bazickým vektorům. Ve čtvrtém sloupci jsou zapsány bazické souřadnice zkoumaného řešení x_h *v pořadí, odpovídajícím pořadí jednotlivých bazických vektorů. Ve zbývajících sloupcích jsou souřadnice vektorů* p_j*, j = 1,2,…,n vzhledem k bázi ve sloupci 2. V řádku m+1 a čtvrtém sloupci je hodnota účelové funkce* $f(x_h)$ *odpovídající zkoumanému řešení* x_h*. Označujeme ji také písmenem z. Ostatní prvky řádku m+1, jsou rozdíly* $z_j - c_j$*, které se v ekonomické literatuře nazývají indexní čísla.“* [8, str. 36] Někdy se k tabulce přidává ještě jeden pomocný sloupec sloužící k určení vedoucího řádku. Při zavedení umělých proměnných se k tabulce přidává řádek m+2 a při celočíselném programování je tabulka rozšířena o určitý počet řádků, tzv. řezné nadroviny.

Simplexový algoritmus

Algoritmus pro nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování předpokládá zapsání počátečního řešení v simplexové tabulce a sestává z následujících kroků:

1. Ověření optimality zkoumaného řešení. Řešení je optimální, pokud platí, že všechny $z_j - c_j \leq 0$. Pokud ano, algoritmus končí.
2. Určení vektoru, který bude součástí nového řešení. Jedná se o vektor, kterému odpovídá maximální rozdíl $z_j - c_j$. Při existenci více takovýchto vektorů se doporučuje vybrat ten s nižším indexem.
3. Určení vektoru, který bude vyloučen z řešení. Jedná se o vektor, pro který platí minimální podíl $\frac{x_{i_i}^h}{p_{ik}}$ pro všechny $p_{ik} > 0$. Při existenci více takovýchto vektorů se doporučuje vybrat ten s nižším indexem.
4. Transformace prvků simplexové tabulky. Prvky tabulky ležící ve vybraném řádku se transformují podle následujícího vzorce:

$$p'_{lk} = \frac{p_{lj}}{p_{lk}} \tag{3}$$

   Ostatní prvky tabulky se transformují podle vzorce:

$$p'_{lk} = p_{ij} - \frac{p_{lj}}{p_{lk}} * p_{ik} \tag{4}$$

5. Sestavení nové simplexové tabulky a pokračování krokem 1.

Zakončení výpočtu v úlohách LP

Při aplikaci simplexové metody může dojít k několika různým způsobům zakončení výpočtu. Toto jsou čtyři základní.

1. *Jediné optimální řešení* nastává tehdy, pokud neexistuje jiné řešení se stejnou hodnotou účelové funkce.
2. *Nekonečně mnoho optimálních řešení*. Tato situace nastává tehdy, jestliže nalezneme alespoň dvě řešení se stejnou hodnotou účelové funkce, jelikož každá konvexní kombinace těchto řešení je také řešením optimálním.
3. *Úloha nemá omezenou hodnotu účelové funkce*, pokud nelze v kroku 3 simplexového algoritmu zvolit vedoucí řádek z důvodu, že všechny $p_{ik} < 0$. *„V takovém případě je*

výpočet ukončen a tato situace indikuje skutečnost, že účelová funkce není omezená. Tato situace se někdy označuje tak, že optimální řešení je v nekonečnu.“ [8, str. 69]

4. *Úloha nemá řešení.* Tato možnost nastane, jestliže množina přípustných hodnot je prázdná.

Při řešení některých ÚLP se může stát, že dojde k zacyklení a simplexový algoritmus se opakuje do nekonečna. Aby nedocházelo k zacyklení, bylo vyvinuto několik metod, například tzv. perturbační metoda.

Dualita

Každé úloze LP je možno podle určitých pravidel přiřadit úlohu s ní sdruženou, tzv. duální úlohu. Pokud vytvoříme duální úlohu k duální úloze, vznikne znovu úloha primární. Proto se mnohdy mluví o dvojici duálně sdružených úloh. [9]

Důvodů pro vytváření duálních úloh může být několik. Jedním z nich je fakt, že duální simplexový algoritmus nepracuje s umělými proměnnými a jejich řešení je tak technicky snadnější. Duální úlohy řešíme pomocí **duálního simplexového algoritmu**. Tento algoritmus se od primárního liší pouze jinými podmínkami, dle kterých se vybírá vektor, který vyloučíme a vektor, který jej v novém řešení nahradí. Duální algoritmus použijeme, pokud je úloha primárně nepřípustná (některá pravá strana omezení je záporná) a duálně přípustná (všechny $z_j - c_j < 0$) a skončíme, když je úloha primárně i duálně přípustná. Ne všechny úlohy však lze pomocí duálního algoritmu řešit.

Celočíselné programování

Jak již bylo zmíněno výše, u některých typů úloh je potřeba, aby optimální řešení bylo celočíselné. Pouhé zaokrouhlení neceločíselných výsledků však může vést k nepřípustnému řešení, které nesplňuje omezující podmínky. Bylo tak vytvořeno několik metod řešících tento problém. Dělí se do tří základních skupin. Kombinatorické metody vyhodnocují jednotlivá přípustná řešení, bývají však velmi pracné. Heuristické metody, vycházející ze zkušeností při řešení podobných úloh. Dávají nám řešení velmi blízká optimálnímu, avšak jsou citlivé na změnu vstupních podmínek. Poslední skupinou jsou **metody řezných (sečných) nadrovin**. Spočívající v konstrukci nadrovin, které z množiny přípustných řešení „odřezávají“ jistou část, která neobsahuje optimální celočíselné řešení. Někdy je potřeba zkonstruovat nadrovin více a řešení se prodlužuje, nalézáme zde však řešení optimální. Jednou z metod řezných nadrovin jsou **Gomoryho algoritmy**. V tomto případě, po nalezení optimálního neceločíselného řešení se k simplexové tabulce přidává jeden řádek (nadrovina) a jeden sloupec. Poruší se primární přípustnost a pokračuje se duálním simplexovým algoritmem. Tvař řezné nadroviny je dán specifickými pravidly. Ta se liší podle toho, zda požadavek celočíselnosti klademe na všechny proměnné nebo jen na některé. [10]

Analýza citlivosti

Po nalezení optimálního řešení, se ještě může provést analýza citlivosti (senzitivity, postomptimalizační analýza) optimálního řešení. Dělá se proto, že u některých vstupních údajů není předem jisté, jakých budou nabývat hodnot. Změna určitého vstupního údaje může velice výrazně ovlivnit strukturu optimálního řešení. Můžeme provést **například analýzu změn koeficientů účelové funkce**, jinými slovy hledají se takové intervaly změny jednotlivých koeficientů účelové funkce tak, aby nedošlo ke změně struktury optimálního řešení. Změna těchto koeficientů totiž, mimo jiné, ovlivňuje duální přípustnost, proto při provádění této analýzy vycházíme z podmínek, aby byla zachována duální přípustnost optimálního řešení. Také lze provést **analýzu změn pravých stran omezujících podmínek**. Změna těchto podmínek ovlivňuje hodnotu účelové funkce a primární přípustnost. Hledá se zde interval, ve kterém se pravá strana omezení může měnit, aniž by došlo ke změně struktury optimálního řešení. Čím větší tento interval bude, tím se jedná o stabilnější úlohu. [8]

3.6.3 Dopravní úloha

Cílem dopravní úlohy je nalezení nejvýhodnějšího (nejméně nákladného) způsobu přepravy ze známého počtu zdrojů s danými kapacitami do míst, kde se nacházejí zákazníci s danými požadavky. [11]

Nejprve je nutné sestavit matematický model dopravní úlohy. Celkové přepravní náklady, které se minimalizují, jsou rovny $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij}$. Zde x_{ij} je přepravované množství od dodavatele a_i kde $i = 1,2,\ldots,m$ k odběrateli b_j kde $j = 1,2,\ldots,n$ a c_{ij} jsou jednotkové přepravní náklady. Následně si musíme uvědomit, že dodavatel je omezen svojí kapacitou, formuluje se tedy podmínka $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$ pro $i = 1,2,\ldots,m$. Stejně tak odběratel má dostat právě to množství, které požaduje. Další podmínkou tedy je $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ pro $j = 1,2,\ldots,n$. Evidentně zde musí platit podmínka nezápornosti přepravovaného množství, proto další podmínka je ve tvaru $x_{ij} \geq 0$ pro všechna i, j. Pro dopravní úlohu je vyžadováno, aby byla vyvážená, neboli aby se součet požadavků odběratelů rovnal součtu kapacit dodavatelů. Potom se tedy podmínka, že dodavatel je omezen svojí kapacitou ($\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$) píše rovnou ve tvaru rovnice nikoli nerovnice. [10]

Matematický model dopravní úlohy tedy má následující tvar:

minimalizujte

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i; \quad i = 1,2, \dots, m \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j; \quad j = 1,2, \dots, n \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0; \qquad i = 1,2, \dots, m \quad j = 1,2, \dots, n \qquad (3)$$

Zápis je v podstatě stejný jako u každé úlohy lineárního programování a je možné ji řešit pomocí simplexové metody. Pro řešení dopravní úlohy však byly vyvinuty efektivnější metody řešení. Jednou z nich je i Dantzigova metoda popsaná v následující podkapitole. Pro správné vyřešení dopravní úlohy je nutné, aby se jednalo o vyváženou dopravní úlohu, tedy aby $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. V případě, kdy tato rovnost neplatí, hovoří se o nevyvážené dopravní úloze, kterou lze však snadno převést na úlohu vyváženou. V případě, že odběratelé požadují větší množství, než jsou dodavatelé schopni poskytnout, doplní se k modelu tzv. fiktivní dodavatel, jehož kapacita je rovna rozdílu, o který poptávka převyšuje celkovou nabídku. Druhým případem je možnost vyšší nabídky, než jaké jsou požadavky odběratelů. Zde se vytváří tzv. fiktivní odběratel, jehož požadavek je roven rozdílu, o který nabídka dodavatelů převyšuje poptávku odběratelů. Přepravní náklady v těchto případech budou rovny 0. [8]

Dantzigova metoda

Algoritmus pro výpočet řešení dopravní úlohy. [10]

1. Výpočet nepřímých nákladů c'_{ij}. Nepřímé náklady vypočteme jako součet u_i *a* v_j.
2. Provedení testu optimality. Jestliže platí $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$ pro všechny i, j, potom zkoumané řešení je řešením optimálním a algoritmus končí.
3. Určení maximálního rozdílu $c'_{ij} - c_{ij}$. V místě maximálního rozdílu vzniká nová bazická proměnná, které se přiřadí hodnota *t*. V případě, že existuje více maximálních rozdílů, může se zvolit za bazickou proměnnou kterýkoliv z nich. Doporučuje se zvolit ten rozdíl, ke kterému spadají nejnižší přepravní náklady, či se dává přednost menším indexům.
4. Provede se vyrovnání řádkových a sloupcových součtů přičítáním a odčítáním hodnoty t tak, aby byly splněny podmínky *(2) a (3).* Při tomto vyrovnávání musíme dostat

uzavřený cyklus, v jehož rozích se pravidelně střídají znaménka + a –. Čáry cyklu se mohou vzájemně protínat.

5. Určení velikosti t jako hodnoty nejmenší bazické proměnné, od které bylo v průběhu vyrovnávání řádkových a sloupcových součtů t odečteno.
6. Provedení naznačených operací s určenou hodnotou t. Proměnná, která po odečtení nabude hodnoty 0, se stává nebazickou proměnnou. Nově získané hodnoty x_{ij} se přepíší do další tabulky a pokračuje se bodem 1. Může se stát, že hodnoty 0 nabude více proměnných, v tomto případě se vynechává jen jedna proměnná. Doporučuje se vynechat tu s nejvyššími přepravními náklady.

Pro usnadnění prováděných operací se výpočet dopravní úlohy provádí v systematizované **dopravní tabulce**. Každý řádek tabulky představuje řádkové omezení neboli kapacitu dodavatele a každý sloupec představuje sloupcové omezení tedy požadavek konkrétního odběratele. Není nutné, aby byl stejný počet odběratelů a dodavatelů. Na průsečíku každého řádku a sloupce leží políčko tabulky, které odpovídá jedné proměnné x_{ij}. Každé políčko vypadá následovně:

		c_{ij}
	x_{ij}	
$c_{\acute{i}j}$		

V levém horním rohu se někdy uvádí rozdíl jednotkových a nepřímých přepravních nákladů pro usnadnění provedení testu optimality. Do pravého dolního rohu si můžeme například psát znaménka + a – pro přehlednější provedení kroku 4 Dantzigova algoritmu. V celé tabulce při výchozím řešení, ale i v každé tabulce po ukončení jednoho kola dantzigova algoritmu je vždy obsazeno m + n – 1 polí. m je počet dodavatelů, n počet odběratelů a jedničku odčítáme, protože jedna rovnice je vždy lineární kombinací ostatních. Tabulka se také vždy rozšiřuje o sloupec u_i a řádek v_j. Jedná se o pomocné proměnné, které slouží k výpočtu nepřímých nákladů. Jedna z těchto hodnot se vždy položí rovna 0 a následně se využije vztahu $c_{ij} = u_i + v_j$ pro dopočítání zbylých proměnných.

<u>Metody pro nalezení výchozího bazického řešení:</u>

Pro použití Dantzigova algoritmu se nejprve musí nalézt výchozí řešení dopravního problému. Na rozdíl od výchozího řešení simplexové metody je možno jej vypočítat přímo bez přidání umělých nebo doplňkových proměnných. Je to umožněno dvěma speciálními vlastnostmi dopravní úlohy. Zaprvé proměnné dopravní úlohy jsou ve stejných jednotkách a zadruhé součty kapacit dodavatelů a požadavků odběratelů jsou si rovny. Existuje několik metod výpočtu tohoto řešení. Každá z těchto metod pracuje na základě jiného principu, pomocí kterého vybírá políčka, která budou obsazena kladnou hodnotou. Hodnota proměnné na obsazeném políčku se určí ve všech metodách tak, aby vypočtené řešení bylo přípustné. Výchozí řešení dopravního problému může být i řešením optimálním. Tato situace však často nenastává. Nejčastěji jsou pro nalezení výchozího řešení používány tyto metody:

- metoda severozápadního rohu (SZR)
- metoda indexní (IM)
- Vogelova aproximační metoda (VAM)

Metoda severozápadního rohu

Výběr základních proměnných začíná vždy prvním políčkem dopravní tabulky, tedy v levém horním rohu (odtud název „metoda severozápadního rohu“). Aby bylo výchozí řešení přípustné, stanoví se hodnota proměnné x_{11} jako minimum z kapacity příslušného dodavatele (a_1) a požadavku příslušného odběratele (b_1). O toto množství se zmenší kapacita prvního dodavatele a požadavek prvního odběratele. Jestliže se některé množství u příslušného odběratele či dodavatele vynuluje, pak se tento sloupec nebo řádek škrtá. Dále se pokračuje dalším volným políčkem. Při této metodě se nebere v úvahu velikost jednotkových přepravních nákladů. Stále platí, že konečný počet obsazených políček se rovná m + n – 1. [9] Při tomto postupu může dojít k degeneraci bazického řešení, tzn., že počet nenulových bazických proměnných je nižší než m + n – 1. Stává se to především tehdy, když se v některém místě dopravní tabulky rovná kapacita a požadavek. V tomto případě se změní některá nebazická proměnná s nulovou hodnotou na bazickou a pracuje se s ní jako s kteroukoliv jinou bazickou proměnnou. Při volbě této „bazické nuly“ je nutné dávat pozor, aby nedošlo k vytvoření uzavřeného cyklu. Doporučuje se dát přednost té proměnné, které odpovídají co nejnižší jednotkové přepravní náklady. [10]

Indexní metoda

Ze všech políček dopravní tabulky se vybere to s nejmenšími přepravními náklady. Stejně jako u metody SZR se poté do tohoto políčka doplní menší hodnota z příslušné kapacity nebo požadavku. Pakliže dvě políčka v tabulce mají stejné jednotkové náklady, je přednostně vyplněno to s nižším součtem indexů (např. x_{21} před x_{32}). Dále se pokračuje dalším políčkem s nejnižšími jednotkovými přepravními náklady z dosud nevyškrtnutých polí. Totožně jako u předchozí metody se znovu vyškrtnou ti dodavatelé (odběratelé), jejichž kapacita (požadavek) se vynuluje. [9]

Vogelova aproximační metoda

Tato metoda vychází z poznatku, že obsazením políčka s nejnižší cenou se vyškrtne jeden řádek nebo sloupec a jsou-li v této řadě ostatní ceny rovněž nízké, zabráníme jejich obsazení a nakonec musíme vybrat políčka s vysokými cenami. Tím zbytečně prodlužujeme řešení dopravní úlohy a oddalujeme nalezení optimálního řešení. Pro provedení této metody je tak zapotřebí stanovit sloupcové a řádkové diference. Určují se tím způsobem, že se nejdříve veškeré jednotkové náklady příslušného řádku či sloupce uspořádají do nerostoucí posloupnosti. Řádková resp. sloupcová diference se poté určí jako rozdíl mezi předposlední a poslední hodnotou v příslušné posloupnosti. V dalším kroku se vybere řádek (sloupec) s největší diferencí a ten je vyplněn přednostně od nejnižších přepravních nákladů. V případě existence více řádků anebo sloupců s maximální diferencí se doporučuje dát přednost nejmenšímu řádkovému a sloupcovému indexu. Pokud je kapacita naplněna nebo uspokojeny požadavky, řádek či sloupec se škrtá. Po vyškrtnutí se dopočítají nové diference pouze z nevyškrtnutých polí a postup se opakuje. Po určitém počtu těchto opakování, již nebude možné diference spočítat a proto tabulku doplníme indexní metodou. [10]

Při **porovnání metod** je patrné, že metoda SZR je z nich nejjednodušší, ale také nejméně přesná. Lepší výsledky nám poskytují metody, které již do úvahy berou jednotkové přepravní náklady (IM a VAM). Nejlepší výsledek nám dává metoda nejpropracovanější, tedy metoda VAM. Výsledky VAM se často velmi blíží optimálnímu řešení. Proto se také někdy tato metoda používá jako přibližná metoda řešení dopravní úlohy a nevylepšuje se žádným optimalizačním algoritmem.

4 APLIKACE VYBRANÝCH METOD OPERAČNÍHO VÝZKUMU

4.1 O společnosti

V následujících dvou kapitolách jsou popsány postupy aplikace metod operačního výzkumu na praktické problémy skutečného podniku. Jedná se o truhlářskou dílnu s dlouholetou tradicí z Jevišovic na Znojemsku. Truhlářství provádí především výrobu na zakázku. Dílna nabízí širokou paletu výrobků (nábytek, kuchyně, schodiště), většinou z lamina. Truhlářství vyrábí také produkty z masivu. S nabídkou jsou spojeny doprovodné služby, jako je například montáž přímo na místě. Informace a podklady pro aplikaci metod operačního výzkumu byly poskytnuty zaměstnancem firmy panem Vladimírem Šinclem.

Název firmy: TRUHLÁŘSTVÍ - KOŠÍČEK KAREL - VÝROBA NÁBYTKU

Zahájení provozu: 01. 01. 1999

Provozovna: 671 53, Jevišovice 197

Identifikační číslo provozovny: 1007736577

Internetové stránky: http://www.truhlarstvinabytek.znojemsko.com/

4.2 Řezný problém

Jedna z možností jak využít metod operačního výzkumu v tomto truhlářství je řešení řezného problému. V truhlářství velmi často využívají při výrobě dřevěné hranoly, které krátí dle potřeby. Tyto hranoly mají délku 3200 mm. Hranoly jsou poté vždy kráceny podle aktuální potřeby každý den. V případě že firma má více zakázek, ve kterých je použit stejný hranol o stejném rozměru, může si tyto hranoly nařezat dopředu. Tímto postupem by mělo být dosaženo snížení celkového počtu použitých hranolů.

Na první zakázku truhlářství potřebuje 55 ks hranolů o délce 1400 mm (A) jakožto podložku na zeď pro stůl. Ve druhé zakázce je k výrobě laviček před šatní skříňky potřeba nařezat 110 ks hranolů o délce 1100 mm (B) a 55 ks hranolů o délce 500 mm (C). V následující tabulce je rozpis všech řezných možností, kterými lze hranol nařezat.

Tabulka 4.1: Počet kusů získaných jednotlivými řeznými možnostmi - hranol

Řezný plán / **Díly**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
A	2	1	1	0	0	0
B	0	1	0	2	1	0
C	0	1	3	1	4	6
odpad v dm	4	2	3	5	1	2

Zdroj: vlastní zpracování

V tabulce není uvedena možnost uříznout dva kusy B a dva kusy C, protože jejich celková délka by byla přesně 3200 mm. Tato varianta však z důvodu tloušťky pily, která je 3 mm, není možná. V případě, že by v truhlářství nejprve nařezali materiál na výrobu stolů, tedy provedli 28 krát řezný plán I a poté nařezali materiál na druhou zakázku, tedy pro získání 55 kusů B provedli 28 krát řezný plán IV a poté pro získání zbylých 82 kusů typu C provedli 14 krát řezný program VI, byl by celkový počet použitých dlouhých hranolů 70 ks. Při aplikaci matematického programování však může být tento počet snížen.

Následuje vytvoření matematického modelu této situace. Nejprve musí být formulována účelová funkce. Účelová funkce je formulována jako součet počtu provedených řezných plánů, který odpovídá počtu použitých hranolů. Tato funkce se následně minimalizuje a zní takto:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Může být minimalizován také odpad, který vznikne. V tomto případě se k jednotlivým proměnným přidá příslušná velikost odpadu. Dalším krokem je formulace omezujících podmínek. Ty vypadají následovně:

$$2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 \geq 55$$

$$0\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 + 2\,x_4 + 1\,x_5 + 0\,x_6 \geq 55$$

$$0\,x_1 + 1\,x_2 + 3\,x_3 + 1\,x_4 + 4\,x_5 + 6\,x_6 \geq 110$$

Omezující podmínky by mohly být i ve tvaru rovnic. Při minimalizaci celkového počtu použitých hranolů však přidání nerovnosti nemá na výsledek zásadní vliv.

Následně je třeba přidat podmínku, která zamezí záporným výsledkům, tato podmínka je formulována takto:

$$x_1, x_2, x_3, x_4,\ x_5, x_6 \geq 0$$

Poslední podmínkou je podmínka celočíselnosti optimálního řešení. Podmínka zní:

$$x_1, x_2, x_3, x_4,\ x_5, x_6 \in \mathrm{Z}$$

Takto formulovaná úloha již může být řešena pomocí simplexového algoritmu. V první řadě se tedy musí úloha dostat do kanonického tvaru. Podmínka minimalizační účelové funkce je splněna, není však splněna podmínka říkající, že všechny omezující podmínky musí být ve tvaru rovnic. Tyto podmínky se tedy převedou do tvaru rovnice odečtením doplňkových proměnných od levé strany nerovnic. Do účelové funkce se tyto nové proměnné zapíší s koeficientem 0.

Po provedení tohoto kroku stále nejsou v zápisu jednotkové vektory, nutné pro nalezení počátečního řešení. Tyto vektory se vytvoří přičtením umělých proměnných k pravé straně omezujících podmínek. Do účelové funkce se tentokrát tyto proměnné promítnou s kladným znaménkem a s koeficientem ω. Úloha v kanonickém tvaru tedy vypadá následovně:

Minimalizační účelová funkce:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 0\,x_7 + 0\,x_8 + 0\,x_9 + \omega\,x_{10} + \omega\,x_{11} + \omega\,x_{12}$$

Omezující podmínky:

$$2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,x_7 + 1\,x_{10} = 55$$

$$1\,x_2 + 2\,x_4 + 1\,x_5 - 1\,x_8 + 1\,x_{11} = 55$$

$$1\,x_2 + 3\,x_3 + 1\,x_4 + 4\,x_5 + 6\,x_6 - 1\,x_9 + 1\,x_{12} = 110$$

Pokud je úloha zapsaná takto, přistupuje se ke konstrukci simplexové tabulky a k provedení simplexového algoritmu. První tabulka vypadá následovně:

Tabulka 4.2: 1. simplexová tabulka - hranoly

i	báze	c_i	X_h	1	1	1	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{p_{lk}}$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
1	p_{10}	ω	55	2	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	/
2	p_{11}	ω	55	0	1	0	2	1	0	0	-1	0	0	1	0	/
3	p_{12}	ω	110	1	1	3	1	4	6	0	0	-1	0	0	1	$\frac{100}{6}$
m+1	#	#	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	#
m+2	#	#	220	2	3	4	3	5	6	-1	-1	-1	0	0	0	#

Zdroj: vlastní zpracování

Nejedná se o optimální řešení, proto se vytvoří další simplexová tabulka, transformací té předcházející. Nová tabulka vypadá takto:

Tabulka 4.3: 2. simplexová tabulka - hranoly

i	báze	c_i	X_h	1	1	1	1	1	1	0	0	0	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{p_{lk}}$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	
1	p_{10}	ω	55	2	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	$\frac{55}{2}$
2	p_{11}	ω	55	0	1	0	2	1	0	0	-1	0	0	1	/
3	p_6	1	$\frac{55}{3}$	0	$1/6$	$1/2$	$1/6$	$2/3$	1	0	0	$\frac{-1}{6}$	0	0	/
m+1	#	#	$\frac{55}{3}$	-1	$\frac{-5}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-5}{6}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{6}$	0	0	#
m+2	#	#	110	2	2	1	2	1	0	-1	-1	0	0	0	#

Zdroj: vlastní zpracování

Stále nebylo nalezeno optimální řešení, proto se vytvoří další tabulka. Za vedoucí sloupec byl v tomto případě zvolen sloupec první. Po čtyřech dalších krocích dostaneme již optimální řešení, které je obsaženo v následující tabulce.

Tabulka 4.4: Simplexová tabulka s optimálním neceločíselným řešením - hranoly

i	báze	c_i	X_h	1	1	1	1	1	1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{p_{lk}}$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_1	1	$\frac{55}{6}$	1	0	1	$\frac{-7}{6}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$^2/_3$	$\frac{-1}{6}$	/
2	p_2	1	$\frac{110}{3}$	0	1	-1	$^7/_3$	0	-2	0	$\frac{-4}{3}$	$^1/_3$	/
3	p_5	1	$\frac{55}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	1	2	0	$^1/_3$	$\frac{-1}{3}$	/
m+1	#	#	$\frac{385}{6}$	0	0	0	$\frac{-1}{6}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	#

Zdroj: vlastní zpracování

Tato tabulka již obsahuje optimální řešení, jelikož všechna $z_j - c_j \leq 0$. Žádná proměnná nenabyla záporných hodnot. Řešení však není celočíselné. Požadavek celočíselnosti je kladen na všechny proměnné, k tabulce je tak přidána první řezná nadrovina, je proto porušena primární přípustnost řešení a pokračuje se duálním simplexovým algoritmem. Duální simplexový algoritmus je podobný jako ten primární. Rozdílem je způsob volby vedoucího řádku a sloupce. Vedoucí řádek se vybírá dle minimální hodnoty ve sloupci $X_{h.}$ Vedoucí sloupec posléze dle minimální hodnoty $\frac{z_j - c_j}{p_{lj}}$, pro záporná p_{lj}. Jako vedoucí sloupec je vybrán sloupec devátý. Další tabulka i s řeznou nadrovinou vypadá následovně:

Tabulka 4.5: Simplexová tabulka s řeznou nadrovinou - hranoly

i	báze	c_i	X_h	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
1	p_1	1	$\frac{55}{6}$	1	0	-1	$\frac{-7}{6}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$^2/_3$	$\frac{-1}{6}$	0
2	p_2	1	$\frac{110}{3}$	0	1	1	$^7/_3$	0	-2	0	$\frac{-4}{3}$	$^1/_3$	0
3	p_5	1	$\frac{55}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	1	2	0	$^1/_3$	$\frac{-1}{3}$	0
4	p_{10}	0	$\frac{-2}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
m+1	#	#	$\frac{385}{6}$	0	0	0	$\frac{-1}{6}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	0
$\frac{z_j - c_j}{p_{lj}}$	#	#	#	/	/	/	$^1/_2$	/	/	/	$^1/_2$	$^1/_2$	/

Zdroj: vlastní zpracování

Po transformaci je řešení stále neceločíselné. Musí být přidána druhá řezná nadrovina. Další řešení je pak již optimální i celočíselné. Pokud provedeme transformace dle pravidel duálního simplexového algoritmu, vznikne řešení následující:

Tabulka 4.6: Simplexová tabulka s optimálním celočíselným řešením - hranoly

i	báze	c_i	X_h	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
1	p_1	1	**10**	1	0	1	-1	0	1	0	1	0	0	-1
2	p_2	1	**36**	0	1	-1	2	0	-2	0	-2	0	1	0
3	p_5	1	**19**	0	0	1	0	1	2	0	1	0	-1	0
4	p_{10}	0	2	0	0	0	1	0	0	0	2	1	-3	0
5	p_{11}	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-2
m+1	#	#	***65***	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Zdroj: vlastní zpracování

Optimálním řešením je provést 10 krát řezný plán I, 36x řezný plán II a 19x řezný plán V. Celkový počet využitých hranolů je 65. Množství potřebných hranolů je odvislé především od velikosti jednotlivých dílů a také od počtu dopředu známých zakázek. Platí, že čím více zakázek dopředu známe, tím efektivněji můžeme naplánovat řezný program.

Tato úloha může být řešena i za použití specializovaného softwaru. Program LINDO, volně ke stažení na stránkách společnosti LINDO Systems, nalezl následující řešení stejně zadaného problému. Devětkrát provést řezný plán I, 37x provést řezný plán II a 19x provést řezný plán V. Toto řešení se liší od toho, které bylo vypočítáno pomocí přidávání řezných nadrovin. Nicméně hodnota účelové funkce je stejná, tedy 65 a obě řešení jsou možná.

```
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       65.00000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1        9.000000           1.000000
       X2       37.000000           1.000000
       X3        0.000000           1.000000
       X4        0.000000           1.000000
       X5       19.000000           1.000000
       X6        0.000000           1.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)        0.000000           0.000000
       3)        1.000000           0.000000
       4)        3.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=      14
BRANCHES=    2 DETERM.=   1.000E    0
```

Obrázek 4.1: Řešení řezného problému – hranoly v softwaru LINDO

Zdroj: vlastní zpracování

Pokud je vyžadováno získat přesný počet jednotlivých dílů, můžeme omezující podmínky zapsat ve tvaru rovnic. Řešení, při použití softwaru LINDO, je poté provést 15x řezný plán I, 25x řezný plán II, 5x řezný plán IV a 20x řezný plán V. Takto bude získáno přesně 55 kusů o délce 1400 mm, 110 ks o délce 500 mm a 55 kusů o délce 1100 mm. Hodnota účelové funkce je i v tomto případě stejná.

```
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      65.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        15.000000          1.000000
       X2        25.000000          1.000000
       X3         0.000000          1.000000
       X4         5.000000          1.000000
       X5        20.000000          1.000000
       X6         0.000000          1.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=      212
BRANCHES=  114 DETERM.=  1.000E    0
```

Obrázek 4.2: Řešení řezného problému – hranoly v softwaru LINDO – přesné požadavky

Zdroj: vlastní zpracování

4.3 Složitější úloha lineárního programování

V truhlářství také velmi často dělají výrobky z laminátových desek. I v tomto případě lze sestavit úlohu lineárního programování, která nám pomůže určit, jak nejlépe tyto desky rozdělit, aby bylo dosaženo jejich co nejefektivnějšího nařezání. Truhlářství například vyrábělo laminátové skříňky. Seznam dílů potřebných pro jejich sestavení je uveden v následující tabulce.

Tabulka 4.7: Díly potřebné pro sestavení jedné skříňky

Označení kusu	rozměr v mm	počet kusů	materiál
A	1050x510	2	lamino bílé
B	770x510	2	lamino bílé
C	770x470	2	lamino bílé

Zdroj: vlastní zpracování

Tyto části jsou řezány z laminátové desky o rozměrech 2800x2070 mm. Pro sestavení úlohy lineárního programování nyní musíme nalézt všechny možnosti, jak a kolik kusů můžeme z celé desky nařezat. Vždy musí být využita maximální plocha desky. Těchto možností je tentokrát 77. V následující tabulce je uvedeno prvních šest z nich, včetně informací nutných k dalším výpočtům.

Tabulka 4.8: Počet dílů získaných jednotlivými řeznými možnostmi - deska

Řezný plán / Díly	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A	9	9	8	8	8	7
B	1	0	1	2	0	4
C	0	1	1	0	2	0
odpad v mm^2	5 838	6 146	7 574	7 266	7 882	4 767

Zdroj: vlastní zpracování

Pokud jsou k dispozici tyto informace, můžeme sestavit matematický model situace. Nejprve musíme sestavit účelovou funkci, která bude v tomto případě minimalizačního charakteru, protože chceme dosáhnout co nejnižšího odpadu popřípadě co nejmenšího počtu použitých desek. Funkce bude obsahovat 77 proměnných. Účelová funkce při minimalizaci odpadu je následující:

$$5838\, x_1 + 6146\, x_2 + 7574\, x_3 + 7266\, x_4 + 7882\, x_5 + 4767\, x_6 + \dots\dots\dots + 6986\, x_{77}$$

Každé x představuje jeden řezný plán, k němuž je přiřazena velikost odpadu, který při jeho aplikaci vznikne. Pokud bychom minimalizovali počet použitých desek, byla by účelová funkce tvořena pouze součtem všech proměnných x.

Dále musíme formulovat omezující podmínky. Pokud budeme uvažovat výrobu 100 kusů výrobků, budou omezující podmínky vypadat následovně:

$$9\,x_1 + 9\,x_2 + 8\,x_3 + 8\,x_4 + 8\,x_5 + 7\,x_6 + \dots\dots\dots + 0\,x_{77} = 200 \qquad \text{(A)}$$

$$1\,x_1 + 0\,x_2 + 1\,x_3 + 2\,x_4 + 0\,x_5 + 4\,x_6 + \dots\dots\dots + 1\,x_{77} = 200 \qquad \text{(B)}$$

$$0\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,x_4 + 2\,x_5 + 0\,x_6 + \dots\dots\dots + 13\,x_{77} = 200 \qquad \text{(C)}$$

Je tedy požadován přesný počet 200 kusů desek od každého typu. Pokud je vyráběna stejná skříň, ale se 3 poličkami, je poté změněna pravá strana omezující podmínky na 300 a obdobně. Další nutností je podmínka nezápornosti výsledných proměnných, jelikož samozřejmě nelze provést minus dva řezné plány. Podmínka nezápornosti je formulována takto:

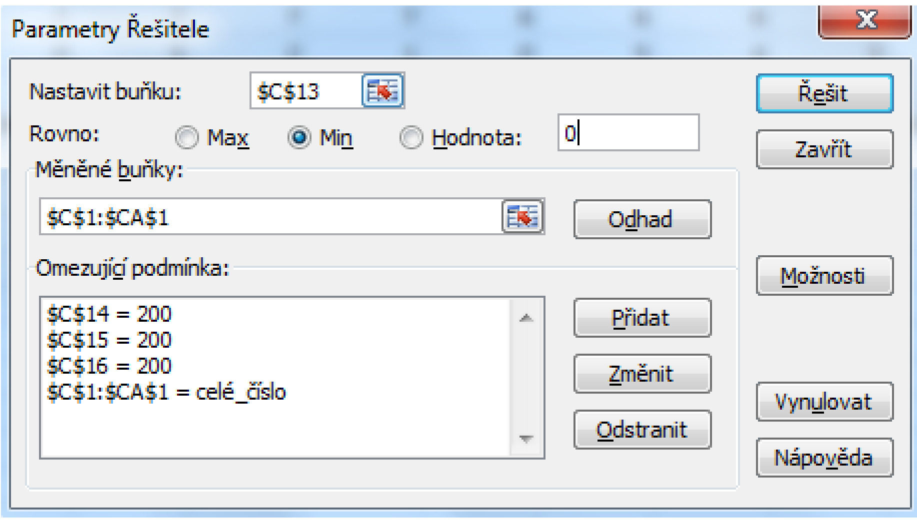
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\dots\dots, x_{77} \geq 0$$

Poslední podmínkou je podmínka celočíselnosti optimálního řešení. Podmínka zní:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\dots\dots, x_{77} \in \mathrm{Z}$$

Po sestavení samotného matematického modelu může být úloha řešena. Vzhledem k rozsáhlosti úlohy, je vhodné použít výpočetní techniku. Pro potřeby této práce byl zvolen Microsoft office Excel. Důvodem pro zvolení tohoto programu je jeho dostupnost pro kohokoliv. V Excelu se pro řešení úloh lineárního programování používá speciální doplněk „Řešitel“.

Na následujícím obrázku je ukázka, jak byly nastaveny parametry řešitele. Omezující podmínky jsou pouze 4, jelikož podmínka nezápornosti je volena speciálně na kartě možnosti.



Obrázek 4.3: Nastavení řešitele v Excelu

Zdroj: vlastní zpracování

Excel však nedokázal nalézt optimální celočíselné řešení, proto odstraníme podmínku neceločíselnosti a výpočet opakujeme. Výsledkem je tedy neceločíselné řešení, které není v praxi proveditelné. Čísla tedy zaokrouhlíme, aby řešení stále zůstávalo v množině přípustných řešení, zaokrouhlujeme tato čísla nahoru. Řešením poté je že, $x_2 = 19$; $x_{53} = 10$; $x_{54} = 20$. Neboli že 19 desek nařežeme způsobem, kdy získáme 9 částí typu A a 1 část typu C. 10 desek nařežeme způsobem, kdy získáme 1 část typu A a 13 částí typu C a 20 desek nařežeme tak, že dostaneme 1 část typu A, 10 částí typu B a 3 části typu C. Celkem získáme 201 částí A, 200 částí B a 209 částí C. Toto řešení není zcela optimální, je mu však velmi blízko.

Pokud truhlářství bude postupovat touto cestou, použije při výrobě 100 skříněk 48 celých velkých desek a z poslední uřízne pouze 4 části typu C. Pakliže firma postupuje standardně a z každé desky nařeže 4 části od každého typu, tedy části přesně potřebné pro výrobu 2 skříněk, bude celkový odpad roven 317 800 mm^2 lamina. Při aplikaci výše uvedeného postupu bude celkový odpad roven 221 914 mm^2. Truhlářství místo 50 desek použije pouze desek 48 a z poslední uřízne jen malou část. Ušetří tedy celkem necelých 10 m^2 materiálu. Cena 1 m^2 lamina se v případě lamina bílého pohybuje okolo 180 Kč.

Velikost úspory je odvislá především od velikosti jednotlivých dílů a od počtu kusů, které u konkrétních druhů potřebujeme. Větší firmy mají pro řešení těchto problémů k dispozici specializovaný software, který zvládne vytvářet řezné plány i pro nepravidelně tvarované části. Pro menší truhlářství jsou vhodné například programy Optimik či Truhlář NP, jejichž základní cena se pohybuje pod 4 000 Kč.

4.4 Výrobní problém – polotovary

Jak je popsáno v kapitole 3.3, první fází operačního výzkumu je rozpoznání problému, kterým je v tomto případě optimalizace výrobního plánu. Další fází je formulace ekonomického modelu, nejlépe zainteresovaným pracovníkem, který může rychle identifikovat všechny nutné proměnné.

Ekonomický model

Zde je uveden ekonomický model podniku, který optimalizuje svůj výrobní program s polotovary. Podnik vyrábí 4 druhy výrobků. Jedná se o výrobek V1 (surová čokoláda 250g), V2 (oříšky v čokoládě 500g), výrobek V3 k výročí podniku (balíček kakaa 200g a 250g oříšků v čokoládě), posledním výrobkem je dárkové balení V4 (jedna čokoláda a dva balíčky oříšků v čokoládě). Výrobky jsou vyráběny na zařízení Z, časy potřebné na výrobu jednotlivých výrobků jsou uvedeny v tabulce číslo 17 v sekundách. K výrobě je dále potřeba kakaový prášek (surovina S), množství (v gramech) potřebné na jednotlivé výrobky je znovu uvedeno v tabulce. K výrobě výrobku V2 je potřeba 0,5 ks výrobku V1. Pro výrobu jednoho výrobku V3 je potřeba 0,5 ks výrobku V2 a k výrobě V4 je třeba 1 kus výrobku V1 a dva kusy výrobku V2. V tabulce číslo 17 jsou dále uvedeny prodejní ceny jednotlivých výrobků v Kč. Produkty firmy jsou dále baleny na balícím zařízení (B1), množství výrobků, které zvládne stroj zabalit, pokud by balil jen jeden typ výrobku, jsou uvedeny v tabulce číslo 18. Výrobky V3 a V4 jsou dále baleny ručně zaměstnankyní podniku (B2). V tabulce číslo 18 jsou uvedeny počty výrobků, které by zvládla zaměstnankyně zabalit, pokud by balila pouze jeden typ výrobku. Cílem podniku je zjistit optimální množství, které má být vyrobeno tento týden při maximalizaci tržeb firmy. Celkový čas k výrobě je tento týden roven 49 hodinám čistého času. Firma má k dispozici právě nyní na skladě celkem 350 kg kakaa. Podnik musí ke svému výročí vyrobit tento týden 1000 ks výrobku V3. Firma má také již zajištěnou objednávku na 500 kg V2.

Tabulka 4.9: Omezení a tržby - polotovary

Omezení	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**
Zařízení Z (s)	7	12	12	14
Surovina S (g)	20	15	20	0
Výrobek V1	0	0,5	0	1
Výrobek V2	0	0	0,5	2
Prodejní cena	35	65	110	300

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 4.10: Kapacity pro balení - polotovary

Typ balení	V1	V2	V3	V4
B1	17 000	15 000	20 000	0
B2	0	0	2 940	2 940

Zdroj: vlastní zpracování

Matematický model

Při tvorbě matematického modelu je nejprve formulována účelová funkce, která v tomto případě je maximalizačního charakteru a zní následovně:

$$35(x_1 - 0{,}5x_2 - x_4) + 65(x_2 - 0{,}5x_3 - 2x_4) + 110x_3 + 300x_4$$

Dále jsou formulovány jednotlivé omezující podmínky, první z nich se týká omezeného výrobního času pro zařízení Z:

$$7\,x_1 + 12\,x_2 + 12\,x_3 + 14\,x_4 \leq 176\,400$$

Výrobu dále omezuje konečné množství zásob na skladě, v tomto případě je to 350 kg kakaa. Podmínka zní:

$$20\,x_1 + 15\,x_2 + 20\,x_3 + 0\,x_4 \leq 350\,000$$

Další podmínkou je, že nemůže být vyrobeno méně výrobků V1 než kolik je jich potřeba pro další výrobu. Podmínka zní následovně:

$$0\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,x_4 \leq x_1$$

Obdobně je definována i podmínka pro výrobek V2, je však již objednáno 500 kg V2, proto nemůže být všechen spotřebován pro další výrobu:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0{,}5\,x_3 + 2\,x_4 \leq x_2 - 1\,000$$

Dále je definována podmínka pro výrobu alespoň 1 000 ks V3 k výročí podniku:

$$x_3 \geq 1\,000$$

Následující podmínka se týká kapacitního omezení balící linky B1, které nemůže být překročeno:

$$\frac{1}{17000}(x_1 - 0{,}5\,x_2) + \frac{1}{15000}x_2 + \frac{1}{20000}x_3 \leq 1$$

Dále je omezena i kapacita zaměstnankyně provádějící ruční balení výrobků:

$$\frac{1}{2940}x_3 + \frac{1}{2940}x_4 \leq 1$$

Následují ještě podmínka nezápornosti a celočíselnosti hledaného řešení:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z$$

Po formulaci matematického modelu se může přistoupit k jeho řešení. Ať již ručně pomocí simplexového algoritmu, nebo pomocí specializovaného softwaru.

Řešení a interpretace:

Pro řešení tohoto příkladu byl vybrán doplněk „Řešitel" v programu Microsoft office Excel. Ten nalezl řešení z tabulky 19.

Tabulka 4.11: Řešení výrobního problému - polotovary

Proměnná	**Řešení**
X1	10 382
X2	5 380
X3	1 000
X4	1 940
Tržba	958 320

Zdroj: vlastní zpracování

Interpretace tohoto řešení je pak následující. Podnik, za daných podmínek, maximalizuje svoji týdenní tržbu, pokud vyrobí 10 382 ks V1, 5 380 ks V2, 1 000 ks V3 a 1 940 ks V4. V tomto případě dosáhnou jeho týdenní tržby hodnoty 958 320 Kč. Podnik nevyužije pouze šest sekund výrobního času zařízení Z, balicí linka B1 bude využita na 86 %, zaměstnankyně provádějící balení výrobků V3 a V4 využije k této činnosti celou svoji pracovní dobu, podnik samostatně prodá 5 752 čokolád a na skladě mu zůstane 41,66 kg kakaa.

ZÁVĚR

V první části práce byla popsána historie managementu a bylo zde identifikováno, že právě rozhodování je jednou ze základních manažerských funkcí. Proto bylo rozhodování ve druhé části práce popsáno podrobněji. Přístupů manažera k rozhodování je celá řada, jedním z nich je přístup matematický. Je totiž nepochybné, že pro manažera je nejvýhodnější, pokud má své rozhodnutí podložené konkrétními čísly. Třetí část práce se tedy věnuje operačnímu výzkumu a popisu používaných metod. Ve čtvrté části je pak ukázána aplikace vybraných metod na konkrétních příkladech.

Manažeři často přistupují k rozhodování intuitivně. Mohou tak činit na základě několika důvodů, například kvůli nedostatku času nebo kapitálu, malým zkušenostem a znalostem nebo kvůli neexistující kontrole jejich rozhodování. Rozhodnutí provedené bez dostatečné analýzy problému, na základě intuice, sice může být správné, ale velmi často tomu tak není. Je proto vhodné pokud manažer využije některou z rozhodovacích metod, která mu poskytne jednoznačné podklady pro jeho rozhodnutí. Právě metody operačního výzkumu tuto výhodu nabízejí. Manažer použitím těchto metod nejen zvyšuje pravděpodobnost správného rozhodnutí, ale přináší mu i další výhody. Především pokud se jeho rozhodnutí v budoucnu ukáže jako nesprávné. V případě intuitivního rozhodnutí je veškerá vina na manažerovi a podstatně tak klesá důvěra v něj. Pokud však použil metod operačního výzkumu, může dokázat, že v době svého rozhodnutí využil všech dostupných informací k nalezení ideálního řešení a výrazně tak vylepšit svoji pozici.

Velká část metod operačního výzkumu je systematizována a je dobře popsána jejich aplikace, proto jich mohou využívat nejen vysoce postavení manažeři, ale i manažeři na nižších úrovních řízení, kteří nemají tak rozsáhlé znalosti. K využívání metod operačního výzkumu na nižších úrovních řízení přispívají také rozvíjející se informační technologie. Poznatky operačního výzkumu totiž využívá celá řada programů, které podniky již využívají. Přesto je vhodné, aby výběr podobných programů dělal kvalifikovaný pracovník s dobrou znalostí podnikových procesů a metod operačního výzkumu, který dokáže zvážit jednotlivé varianty a rozhodnout se pro tu, která je pro podnik nejvýhodnější.

Metod operačního výzkumu může být využito jak v individuálním, tak i v kolektivním rozhodování. Jelikož výsledky metod operačního výzkumu jsou nezpochybnitelné, ostatní členové rozhodovacího týmu je nemohou přehlížet. Snižuje se tak prostor pro individuální dominanci určitého člena týmu, který upřednostňuje svoje osobní zájmy před zájmy organizace.

Metody operačního výzkumu výraznou měrou přispěly k tomu, že celá řada problémů, dříve považovaných za složitě řešitelné, se nyní přesunula do kategorie dobře strukturovaných problémů, jejichž řešení je již rutinní.

Ve čtvrté kapitole jsou řešeny konkrétní příklady použití metod operačního výzkumu v praxi. Jsou zde uvedeny dva příklady aplikace vybraných metod na problémech truhlářství Karla Košíčka z Jevišovic na Znojemsku. Jedná se o řezné problémy, jeden na hranol a jeden složitější na desku. V truhlářství musí rozhodnout, jak budou materiál dělit. Především v případě desky existuje spousta možností a není v lidských silách najít tu optimální bez pomoci metod operačního výzkumu a moderní výpočetní techniky. Při sestavení matematického modelu a použití simplexového algoritmu může být ušetřena značná část materiálu a tedy sníženy náklady. Celková ušetřená částka poté záleží na velikosti jednotlivých řezaných částí a ceně materiálu. Z příkladu také vyplývá, že pro firmu je lepší, pokud dopředu zná co nejvíce svých zakázek, jelikož může efektivněji plánovat řezné programy nebo řešení svého zásobování dle teorie zásob. V této části je také prezentován příklad na výrobní plánování při maximalizaci zisku. V tomto případě znovu může manažer libovolně měnit omezující podmínky a vždy tak nalézt množství vyráběných výrobků tak, aby byl maximalizován zisk podniku.

V práci byla popsána historie managementu a podrobněji rozebrán rozhodovací proces manažera a operační výzkum. Díky tomu mohl být splněn cíl práce, kterým bylo zhodnocení možností využití metod operačního výzkumu při rozhodování manažera.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] BLAŽEK, L. *Management - organizování, rozhodování, ovlivňování*. Praha: Grada Publishing, 2011. 191 s. ISBN 978-80-2473-275-6

[2] BUCHTA, M., SIEGL, M. *Základy managementu*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2004. 155 s. ISBN: 80-7194-540-4

[3] DUDORKIN, J. *Operační výzkum*. Praha: České vysoké učení technické, 2002. 296 s. ISBN 978-80-0102-469-0

[4] FOTR, J., DĚDINA, J., HRŮZOVÁ, H. *Manažerské rozhodování*. Praha: Ekopress, 2003. 250 s. ISBN 978-80-8611-969-4

[5] FRANKEL, E. G. *Quality Decision Management*. Dordrecht: Springer Science, 2008. 128 s. ISBN 978-1-4020-8995-4

[6] GROS, I. *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování*. Praha: Grada Publishing, 2003. 432 s. ISBN 978-80-2470-421-0

[7] HEIZER, J., RENDER, B. *Operations Management*. New Jersey: Pearson Education, 2004. 769 s. ISBN 0-13-120974-4

[8] JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum*. 3. vydání. Praha: Professional Publishing, 2007. 323 s. ISBN 978-80-8694-644-3

[9] JABLONSKÝ, J., LAGOVÁ, M. *Lineární modely*. 2. vydání. Praha: Oeconomica, 2009. 302 s. ISBN 978-80-245-1511-3

[10] LINDA, B., VOLEK, J. *Lineární programování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. 139 s. ISBN 978-80-7395-426-0

[11] PLEVNÝ, M., ŽIŽKA, M. *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010. 296 s. ISBN 978-80-7043-933-3

[12] ROUDNÝ, R., VÍŠEK, O. *Základy manažerského rozhodování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009. 184 s. ISBN 978-80-7395-164-1

[13] Mujweb.cz/miroslav.liska [online]. 2006 [cit. 2015-03-14]. *Operační výzkum*. Dostupné z WWW: <http://mujweb.cz/miroslav.liska/mmp/aspekty2.htm#PRIKLADY>

[14] Projects.math.slu.cz [online]. 2013 [cit. 2015-03-11]. *Softwarová podpora matematických metod v ekonomice a řízení.* Dostupné z WWW: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/SoftPodpora.pdf>