

UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

**SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU SE STAVOVÝM
REGULÁTOREM**

Bc. Radovan Svatoš

Diplomová práce
2015

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Bc. Radovan Svatoš
Osobní číslo: I13477
Studijní program: N2646 Informační technologie
Studijní obor: Řízení procesů
Název tématu: Syntéza regulačního obvodu se stavovým regulátorem
Zadávající katedra: Katedra řízení procesů

Zásady pro vypracování:

Cíl práce:

Cílem práce je teoretický návrh a simulační ověření činnosti stavových regulátorů pro řízení vybraných dynamických procesů. Pozornost bude věnována ověření robustnosti navržených regulačních algoritmů, jejichž součástí budou i estimátory úplného či redukovaného řádu.

Teoretická část:

Řízení dynamických systémů spojitými a diskrétními stavovými regulátory s estimátory úplného a redukovaného řádu.

Implementační část:

Vytvoření skriptů v Matlabu a modelů v Simulinku. Ověření činnosti navržených regulátorů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. 2005. Modern Control Systems. 10 vyd. New Jersey: Prentice Hall. 881 s. ISBN 0-13-127765-0.

BALÁTĚ, J. 2004. Automatické řízení. 2 vyd. Praha: BEN - technická literatura. 663 s. ISBN 80-7300-148-9.

MODRLÁK, O. 2004. Základy analýzy a syntézy ve stavovém prostoru [skriptum]. Liberec: TU v Liberci. 82 s.

KUPKA, L.; JANEČEK, J. 2007. Matlab & Simulink: řešené příklady. Lanškroun: TG tisk a SOŠ a SOU. 224 s. ISBN 978-80-239-9532-9.

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Libor Kupka, Ph.D.

Katedra řízení procesů

Datum zadání diplomové práce:

29. října 2014

Termín odevzdání diplomové práce:

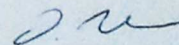
15. května 2015



prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan



L.S.



Ing. Daniel Honc, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 14. listopadu 2014

Prohlášení

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 29.5.2015

Radovan Svatoš

Poděkování

Velice rád bych poděkoval svému vedoucímu práce panu Ing. Liboru Kupkovi, Ph.D. za jeho cenné rady a pomoc při tvorbě této diplomové práce. Po celou dobu řešení diplomové práce mě vedl správným směrem účinnou metodickou a pedagogickou pomocí. Také bych rád poděkoval kamarádům, kteří mě po celou dobu podporovali a pomáhali mi a také bych samozřejmě rád poděkoval hlavně rodičům za velkou podporu.

V Pardubicích dne 29.5.2015

Radovan Svatoš

ANOTACE

Práce se zabývá teoretickým návrhem a simulačním ověřením činnosti stavových regulátorů pro řízení vybraných dynamických procesů. Pozornost je věnována ověření robustnosti navržených regulačních algoritmů, jejichž součástí jsou i estimátory úplného resp. redukovaného řádu. Návrh stavových regulátorů s estimátory byl proveden jak ve spojitě, tak i v diskrétní variantě. Ověření jejich činnosti bylo realizováno na identifikovaných modelech dvou reálných laboratorních systémů.

KLÍČOVÁ SLOVA

MATLAB, estimátor, charakteristiky, stavový popis, stavový regulátor.

TITLE

SYNTHESIS OF A REGULATION CIRCUIT WITH A STATE CONTROLLER

ANNOTATION

The thesis deals with a theoretical design and a simulation verification of activities of state controllers for the management of selected dynamic processes. Attention is paid to the verification of the robustness of the proposed control algorithms, which also include estimators of full or reduced systems. Motion controllers state estimators were performed both in the continuous and in the discrete variants. Verification of their activities has been implemented in the identified models of two real laboratory systems.

KEYWORDS

MATLAB, estimator, characteristics, state description, state controller.

Obsah

Seznam zkratk	9
Seznam značek	10
Seznam obrázků	11
Seznam tabulek	13
ÚVOD	14
1 STAVOVÝ POPIS DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	15
1.1 KANONICKÉ TVARY	17
1.2 NORMÁLNÍ FORMA ŘIDITELNOSTI	17
1.2.1 Spojitý systém.....	19
1.2.2 Diskrétní systém	20
1.3 NORMÁLNÍ FORMA POZOROVATELNOSTI.....	20
1.3.1 Spojitý systém.....	22
1.3.2 Diskrétní systém	23
1.4 VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ POPIS DYNAMICKÉHO SYSTÉMU	23
1.5 SOUVISLOST MEZI VNĚJŠÍM A VNITŘNÍM POPISEM.....	24
1.6 FUNDAMENTÁLNÍ MATICE PŘECHODU	24
1.7 TRANSFORMACE FUNDAMENTÁLNÍ MATICE	25
1.8 DISKRÉTNÍ STAVOVÝ MODEL	27
2 ESTIMACE STAVŮ - ESTIMÁTORY	30
2.1 VLIV DYNAMIKY ESTIMÁTORU	31
2.1.1 Rozdílný krok regulátoru a estimátoru	32
2.2 SPOJITÝ ESTIMÁTOR ÚPLNÉHO ŘÁDU	33
2.3 DISKRÉTNÍ ESTIMÁTOR ÚPLNÉHO ŘÁDU	35
2.4 DISKRÉTNÍ ESTIMÁTOR REDUKOVANÉHO ŘÁDU.....	37
3 STAVOVÝ REGULAČNÍ OBVOD	42
3.1 METODY NÁVRHU STAVOVÉHO REGULÁTORU	44
3.1.1 Normalizace stavového popisu	45
3.1.2 Vliv periody vzorkování	45
3.1.3 Vliv nastavení regulátoru.....	45
3.2 NÁVRH REGULÁTORU V KONEČNÉM POČTU REGULAČNÍCH KROKŮ.....	46
3.2.1 Ackermanova formule	47
3.3 NÁVRH REGULÁTORU PODLE KVADRATICKÉHO KRITERIA	48

3.3.1 Riccatiho rovnice	49
3.4 POPIS REGULAČNÍHO OBVODU S ASTATICKÝM ČLENEM.....	52
4 SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU SE STAVOVÝM REGULÁTOREM.....	54
4.1 MATLAB SKRIPT	54
4.2 POPIS A ZDŮVODNĚNÍ ZVOLENÉHO ZPŮSOBU ŘEŠENÍ.....	55
4.3 ŘÍZENÍ SOUSTAVY MOTOR – GENERATOR S PEVNOU SPOJKOU	56
4.4 ŘÍZENÍ SOUSTAVY MOTOR – GENERATOR S PRUŽNOU SPOJKOU.....	57
5 DOSAŽENÉ VÝSLEDKY	58
5.1 VÝSLEDNÉ PRŮBĚHY	59
5.1.1 Systém1: Motor – generátor s pevnou spojkou	60
5.1.2 Systém2: Motor – generátor s pružnou spojkou	71
ZÁVĚR	76
Literatura	77
Přílohy.....	78

Seznam zkratek

GKR	Gaussova Komplexní Rovina
KPK	Konečný Počet Kroků
LTI	Linear Time Invariant
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multi Input Multi Output
ZV	Zpětná Vazba
MATLAB	Matrix Laboratory
VI	Virtual Instrument
NF	Normální Forma
NFŘ	Normální Forma Řiditelnosti
NFP	Normální Forma Pozorovatelnosti
A/Č	Analogově Číslicový převodník
Č/A	Číslicově Analogový převodník
S	regulovaná soustava
R	číslicový regulátor

Seznam značek

n	řád systému
p	počet vstupních (budících) veličin
r	počet výstupních (vybuzených) veličin
A, M	matice systému; rozměr (n, n)
B, N	matice buzení; rozměr (n, p)
C	matice výstupu; rozměr (r, n)
D	matice převodu; rozměr (r, p)
E	jednotková matice
R	matice regulátoru
Φ	fundamentální matice systému
$e(t), e(k)$	regulační odchylka
$w(t), w(k)$	žádaná hodnota (řídící veličina)
$x(t), x(k)$	stavový vektor; rozměr (n, I)
$u(t), u(k)$	vektor buzení – akční veličina; rozměr (p, I)
$y(t), y(k)$	vektor výstupu – regulovaná veličina; rozměr (r, I)
T_S	perioda vzorkování
a_0, b_0	koeficienty lineární diferenciální rovnice
$U(s)$	Laplaceův obraz vstupní veličiny
$Y(s)$	Laplaceův obraz výstupní veličiny
$h(t)$	přechodová funkce
$g(t)$	impulsní funkce
H_E, M_E, N_E	matice estimátoru
s	Laplaceův operátor
f, g	obecně nelineární funkce

Seznam obrázků

Obrázek 1.1 – Schéma spojitého popisu	15
Obrázek 1.2 – Schéma diskrétního popisu.....	16
Obrázek 1.3 – Normální forma říditelnosti.....	18
Obrázek 1.4 – Dynamika systému 2. řádu (průběh veličin na čase), říditelnost	18
Obrázek 1.5 – Vývoj stavové trajektorie, říditelnost	18
Obrázek 1.6 – Normální forma pozorovatelnosti	21
Obrázek 1.7 – Dynamika systému 2. řádu (průběh veličin na čase), pozorovatelnost	21
Obrázek 1.8 – Vývoj stavové trajektorie, pozorovatelnost.....	21
Obrázek 1.9 – Spojitý systém s číslicovým regulačním obvodem	28
Obrázek 2.1 – Regulační obvod s estimátorem	31
Obrázek 2.2 – Deterministický estimátor	33
Obrázek 2.3 – Estimátor úplného řádu	34
Obrázek 2.4 – Diskrétní estimátor úplného řádu	35
Obrázek 2.5 – Diskrétní estimátor	37
Obrázek 2.6 – Spojitý estimátor redukovaného řádu.....	38
Obrázek 2.7 – Spojitý estimátor	38
Obrázek 2.8 – Spojitý estimátor pro $\lambda = 0.1$ a $p.p.=1.5$	39
Obrázek 2.9 – Spojitý estimátor pro $\lambda = -0.1$ a $p.p.=0.6$	39
Obrázek 2.10 – Diskrétní estimátor redukovaného řádu	40
Obrázek 2.11 – Diskrétní estimátor	40
Obrázek 2.12 – Diskrétní estimátor pro $\lambda = -0.1$ a $p.p.=3$	41
Obrázek 2.13 – Diskrétní estimátor pro $\lambda = 0.1$ a $p.p.=2$	41
Obrázek 3.1 – Diskrétní stavový regulátor	42
Obrázek 3.2 – Estimátor a regulace	43
Obrázek 3.3 – Ackermanův přístup	48
Obrázek 3.4 – Měkký regulátor	51
Obrázek 3.5 – Tvrdý regulátor.....	51
Obrázek 3.6 - Stavový regulační obvod s astatickým členem	52
Obrázek 4.1 – Měřicí karta NI USB-6009 jen pro analogové vstupy/výstupy.....	56
Obrázek 4.2 – Schéma simulace regulátoru s pevnou spojkou.....	56
Obrázek 4.3 – Schéma simulace regulátoru s pevnou spojkou.....	57

Obrázek 5.1 – Naměřená data pro soustavu motor – generátor s pevnou spojkou.....	60
Obrázek 5.2 – Lineární oblasti statické charakteristiky.....	61
Obrázek 5.3 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou. S přenosem 1. řádu.....	61
Obrázek 5.4 – Aproximace soustavy motor – generátor. S přenosem 1. řádu.....	62
Obrázek 5.5 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou. S přenosem 2. řádu.....	62
Obrázek 5.6 – Aproximace soustavy motor – generátor. S přenosem 2. řádu.....	63
Obrázek 5.7 – Statická charakteristika motor – generátor s pevnou spojkou.....	63
Obrázek 5.8 – Porovnání přechodových charakteristik aproximačních modelů	64
Obrázek 5.9 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou, přidáný šum nižší úrovně	65
Obrázek 5.10 – Průběh estimované derivace s přidáným šumem nižší úrovně.....	65
Obrázek 5.11 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou, přidáný šum vyšší úrovně.....	65
Obrázek 5.12 – Průběh estimované derivace s přidáným šumem vyšší úrovně	66
Obrázek 5.13 – Reakce vstupu soustavy bez šumového signálu.....	66
Obrázek 5.14 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy bez šumového signálu	67
Obrázek 5.15 – Výsledný graf signálu bez šumu	67
Obrázek 5.16 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-6$	68
Obrázek 5.17 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-6$	68
Obrázek 5.18 – Výsledný graf signálu s šumem $1e-6$	69
Obrázek 5.19 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-7$	69
Obrázek 5.20 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-7$	70
Obrázek 5.21 – Výsledný graf signálu s šumem $1e-7$	70
Obrázek 5.22 – Systém 4. řádu	71
Obrázek 5.23 – Reakce vstupu soustavy bez šumového signálu.....	71
Obrázek 5.24 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy bez šumového signálu.....	72
Obrázek 5.25 – Výsledný graf signálu vzorkování estimovaného signálu bez šumu.....	72
Obrázek 5.26 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-6$	73
Obrázek 5.27 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-6$	73
Obrázek 5.28 – Výsledný graf vzorkovaného estimovaného signálu s šumem $1e-6$	74
Obrázek 5.29 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-7$	74
Obrázek 5.31 – Výsledný graf vzorkovaného estimovaného signálu s šumem $1e-7$	75
Obrázek 5.30 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-7$	75

Seznam tabulek

Tabulka 4.1 – Základní vlastnosti karty NI USB-6009	56
---	----

ÚVOD

Při popisu dynamických systémů se v minulosti nejčastěji používaly diferenciální rovnice resp. jim odpovídající přenosové funkce, zatímco v současnosti se stále více využívá stavové vyjádření pomocí dynamických vazeb mezi vnitřními – stavovými proměnnými, které určují v každém okamžiku přesný stav systému. Teoreticky správným návrhem stavového regulátoru lze ovlivnit dynamiku celého regulačního obvodu, ale prakticky jsme omezeni velikostí a rychlostí změny akční veličiny reálného obvodu, možnostmi akčních a přizpůsobovacích členů. Také nesmíme zapomínat na robustnost, což je omezení zpětnovazebního obvodu, které vyjadřuje jeho citlivost. Při zvyšování našich požadavků na kvalitu a rychlost regulačního pochodu se také zvyšují i nároky na přesnost modelu. Předpokládaný lineární popis pomocí modelu reálné regulované soustavy je pouze aproximací skutečného chování. Ve skutečnosti je většina systémů spíše nelineárních. V některých případech může vzniklá odchylka způsobit i nestabilní chování jinak teoreticky dobře navrženého regulačního obvodu.

Práce je tedy rozdělena na dvě části. Na teoretickou část a na praktickou část. Její součástí je především problematika řízení dynamických systémů stavovými regulátory s estimátory. V úvodu je uvedeno, co to stavový popis je a jak se zapíše pro dynamické systémy. Také jsou uvedena bloková schémata spojitého a diskrétního systému, v samostatné části jsou popsány i estimátory. Estimátory jsou uvažovány spojité a diskrétní, ale z důvodu velkého využití estimátorů diskrétních se tato práce zaměří právě na jejich popis. Diskrétní estimátory se dělí na estimátory úplného řádu a estimátory redukováného řádu. Součástí textu jsou zapojení pro každý estimátor, jeho základní rovnice a postup nutný pro návrh. V další části práce jsou popisovány stavové regulátory a především jsou důkladně vysvětleny dvě metody pro návrh jejich diskrétní verze. Jedná se o návrh regulátoru v konečném počtu regulačních kroků na základě Ackermannovi formule a o návrh regulátoru podle kvadratického kritéria s využitím Riccatiho rovnice.

1 STAVOVÝ POPIS DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Chování dynamického systému lze popsat diferenciální rovnicí. Ta je jasně určena vlastním matematickým zápisem, tvarem budicí funkce a počátečními podmínkami. Počáteční podmínky tedy určují stav systému na začátku sledování dynamického procesu. S pomocí dynamického popisu, tvaru budicí funkce a stavu systému se dá určit následující reakce v každém okamžiku.

Hlavní princip je, že stavové vyjádření nahrazuje diferenciální nebo diferenční rovnice vyššího řádu soustavou diferenciálních nebo diferenčních rovnic prvního řádu. Matematický zápis je vyjádřen maticovými rovnicemi, popisujícími vývoj stavového vektoru. Ten je tvořen n -ticí lineárně nezávislých stavových veličin. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

Pro spojitý popis:

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.2)$$

Pro diskrétní popis:

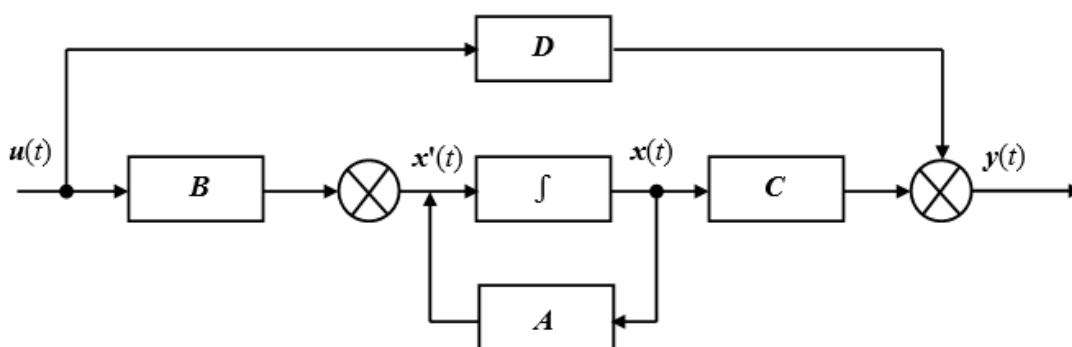
$$\mathbf{x}'(k + 1) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y}(k) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k), \quad (1.4)$$

f, g - obecně nelineární funkce

Pro lineární, časově invariantní dynamický systém (LTI) se získá tvar:

Pro spojitý popis:



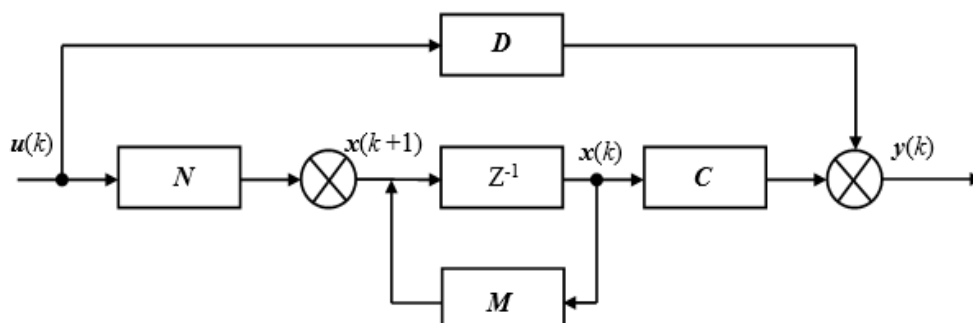
Obrázek 1.1 – Schéma spojitého popisu

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t), \quad (1.6)$$

Blokové schéma spojitého systému je na obrázku 1.1. Spojitý stavový popis systému je definován pomocí matic A , B , C , D .

Pro diskretní popis:



Obrázek 1.2 – Schéma diskretního popisu

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}(k), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k), \quad (1.8)$$

Blokové schéma diskretního systému je na obrázku 1.2. Diskretní systém je definován pomocí matic \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . Čerpáno z (Kupka, 2014).

Rovnice pro $\mathbf{x}'(t)$ a $\mathbf{x}(k + 1)$ jsou stavové rovnice a rovnice vyjadřující $\mathbf{y}(t)$ a $\mathbf{y}(k)$ jsou výstupní rovnice. Stavový popis dynamického systému je obdobný bez ohledu, zda je systém popsán jedinou diferenciální nebo diferenční rovnicí s jednou budící a jednou buzenou veličinou (SISO systémy), nebo je popsán soustavou rovnic s více vstupy i výstupy (MIMO systémy). Počet vstupů a výstupů nemusí být shodný.

Vektory \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{y} jsou vektory časových funkcí, popřípadě diskretních posloupností měnících v diskretních časových okamžicích funkční hodnoty $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT_S)$; $\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(kT_S)$; $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(kT_S)$ pro: $k = 0, 1, 2, \dots, T_S$ je perioda vzorkování.

Časové funkce s jedním prvkem $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{y} = y$ se získají tehdy, jde-li o systém s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO). Z toho plyne, že mají matice \mathbf{B} a \mathbf{N} jen jeden sloupec, matice \mathbf{C} má jeden řádek a matice \mathbf{D} je tvořena jedním řádkem a jedním sloupcem (skalár). Pokud by byl systém ryze dynamický, tak nedochází k přímé vazbě mezi vstupem a výstupem a matice $\mathbf{D} = 0$.

Dynamika fyzikálních procesů regulovaných soustav bývá popsána nelineárními rovnicemi, které je možné aproximovat lineárními rovnicemi. Aproximujeme je z důvodu zjednodušení.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (1.9)$$

a pro diskretní systém:

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k+1) + \dots + a_0 y(k+n) = b_n u(k) + b_{m-1} u(k+1) + \dots + b_0 u(k+n) \quad (1.10)$$

Nejvyšší derivace (diference) určuje řád dynamického systému. Výhodou stavového popisu je jednoduchost a jednotnost bez ohledu na to, zda se jedná o spojité nebo diskretní systém libovolného řádu. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

1.1 KANONICKÉ TVARY

Kanonickým vyjádřením obvykle rozumíme tvar matematického popisu. Zaměříme se dále na stavový popis lineárního dynamického SISO systému (s jedním vstupním a jedním výstupním signálem) a to jen na jeho dvě základní vlastnosti – říditelnost a pozorovatelnost. Uvažujme popis spojitých i diskretních systémů vedoucích na tvary stavových matic, ze kterých následně sestavené matice říditelnosti resp. pozorovatelnosti mají trojúhelníkový tvar a je u nich tak zřejmá jejich hodnota určující příslušnou vlastnost.

Stavová trajektorie

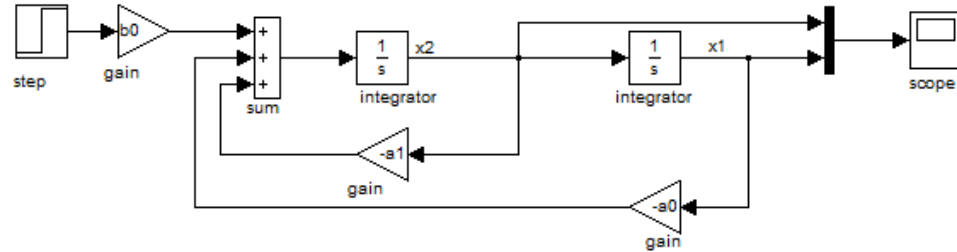
Vývoj dynamického systému můžeme vyjádřit ve stavové reprezentaci pohybem bodu, který je jednoznačně určen souřadnicemi stavového vektoru. Polohu bodu vyjadřujeme momentálním stavem systému. Vývoj tvoří obecně prostorovou křivku – tzv. stavovou trajektorii ve stavovém prostoru. Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.2 NORMÁLNÍ FORMA ŘIDITELNOSTI

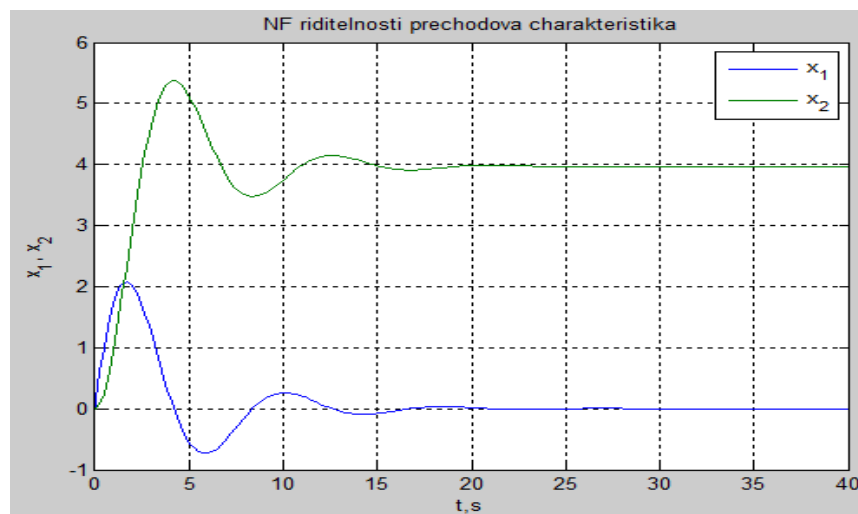
Jedná se o tzv. Frobeniův kanonický tvar vzhledem ke vstupu. Pro ilustraci uvažujme níže uvedenou soustavu popsanou obrazovým přenosem. Matice **A**, **B**, **C**, **D** pak budou v tomto konkrétním případě v uvedeném tvaru. Odpovídající simulační stavové schéma pro simulaci reakce na $u(t) = \eta(t)$ při p. p. = 0 je na obrázku 1.3. Časové závislosti stavových veličin jsou pak na obrázku 1.4.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2,5}{s^2 + 0,5s + 0,6}$$

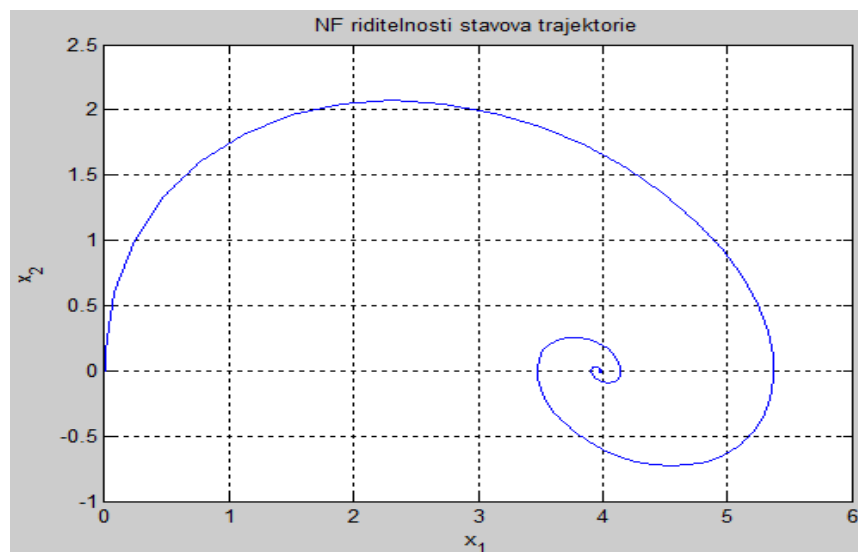
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = 0$$



Obrázek 1.3 – Normální forma říditelnosti



Obrázek 1.4 – Dynamika systému 2. řádu (průběh veličin na čase), říditelnost



Obrázek 1.5 – Vývoj stavové trajektorie, říditelnost

Čerpáno z (Kupka, 2014).

1.2.1 Spojitý systém

Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru.

$$a_n \mathbf{y}^{(n)} + a_{n-1} \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \mathbf{y}' + a_0 \mathbf{y} = b_m \mathbf{u}^{(m)} + b_{m-1} \mathbf{u}^{(m-1)} + \dots + b_1 \mathbf{u}' + b_0 \mathbf{u}, \quad (1.11)$$

$$n \geq m \quad a_n = 1$$

$$a_n \mathbf{v}^{(n)} + \dots + a_1 \mathbf{v}' + a_0 \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}'_1 = \mathbf{v}'$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}'_{n-1} = \mathbf{v}^{(n-1)}$$

$$\mathbf{y} = b_m \mathbf{v}^{(m)} + \dots + b_1 \mathbf{v}' + b_0 \mathbf{v}, \quad (1.13)$$

Použijeme vztahy (1.5) a (1.6).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{C} = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \quad (1.16)$$

$$\mathbf{D} = [b_n] \quad (1.17)$$

Matice říditelnosti:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 1 & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & * & * \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Jak je vidět, vznikne dolní trojúhelníková matice. Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.2.2 Diskrétní systém

Uvažujme diferenční rovnici ve tvaru.

$$a_n \mathbf{y}(k) + a_{n-1} \mathbf{y}(k+1) + \dots + a_0 \mathbf{y}(k+n) = b_n \mathbf{u}(k) + b_{n-1} \mathbf{u}(k+1) + \dots + b_0 \mathbf{u}(k+n) \quad (1.19)$$

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} v(k+i) = \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}_1(k) = \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{x}_2(k) = \mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{v}(k+1)$$

\vdots

$$\mathbf{x}_n(k) = \mathbf{x}_{n-1}(k+1) = \mathbf{v}(k+n-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = (b_n - b_0 a_n) \mathbf{x}_1(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \mathbf{x}_2(k) + \dots + (b_1 - b_0 a_1) \mathbf{x}_n(k) + b_0 \mathbf{u}(k) \quad (1.20)$$

Použijeme vztahy (1.7) a (1.8).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{C} = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \dots \quad b_1 - b_0 a_1] \quad (1.23)$$

$$\mathbf{D} = [b_0] \quad (1.24)$$

Matice říditelnosti:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{N} \quad \mathbf{M}\mathbf{N} \quad \mathbf{M}^2\mathbf{N} \quad \dots \quad \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 1 & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & * & * \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

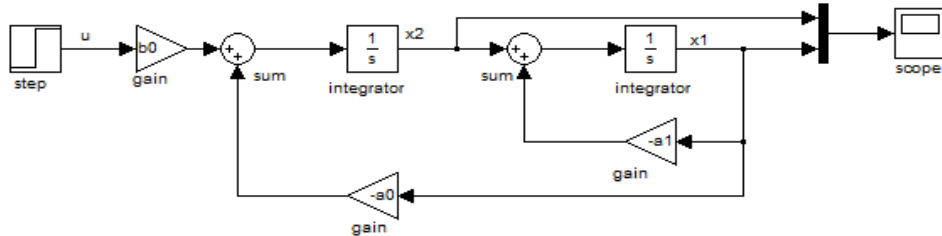
Jak je vidět, vznikne dolní trojúhelníková matice. Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.3 NORMÁLNÍ FORMA POZOROVATELNOSTI

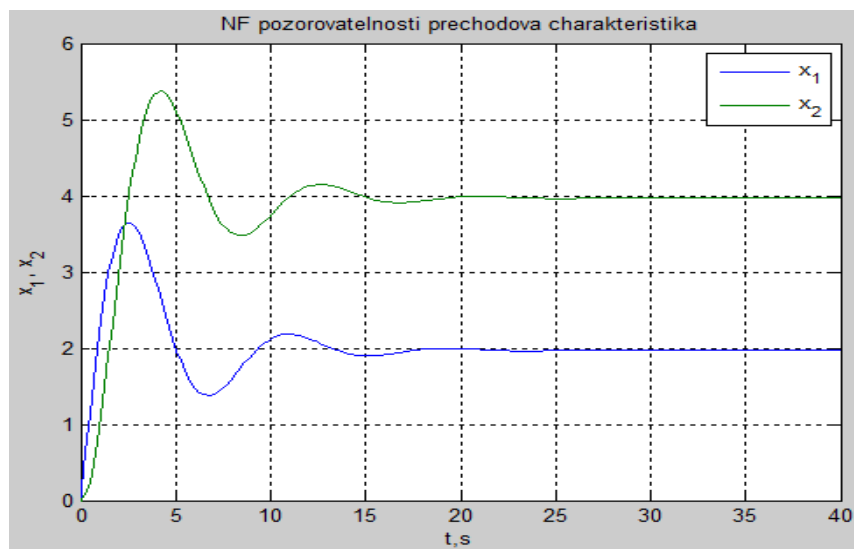
Další, tzv. normální formou pozorovatelnosti, je Frobeniův kanonický tvar vzhledem k výstupu. Uvažujme stejný systém jako v odstavci 1.2 a vyjádřeme opět matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} .

Simulační stavové schéma je na obrázku 1.6. Simulována je reakce na $u(t) = \eta(t)$, při p.p.=0. Odpovídající průběhy jsou na obrázku 1.7.

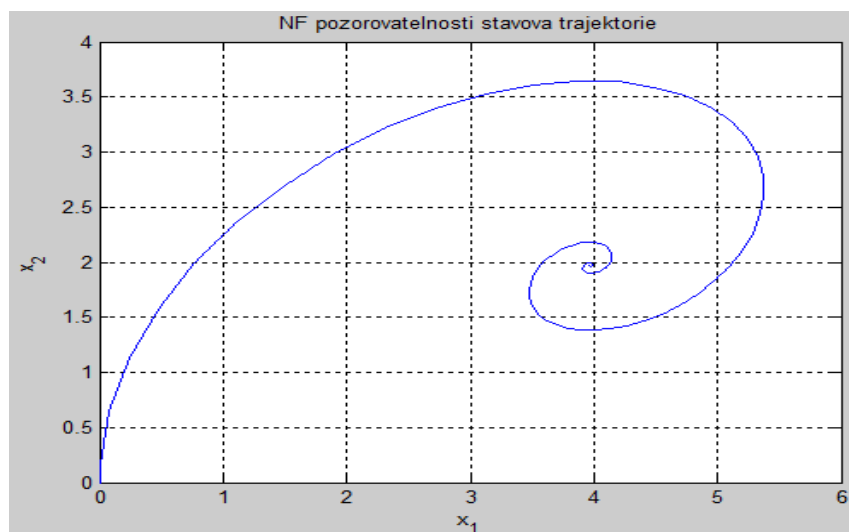
$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -0,6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = 0$$



Obrázek 1.6 – Normální forma pozorovatelnosti



Obrázek 1.7 – Dynamika systému 2. řádu (průběh veličin na čase), pozorovatelnost



Obrázek 1.8 – Vývoj stavové trajektorie, pozorovatelnost

Čerpáno z (Kupka, 2014).

1.3.1 Spojitý systém

Uvažujme diferenciální rovnici.

$$a_n \mathbf{y}^{(n)} + a_{n-1} \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \mathbf{y}' + a_0 \mathbf{y} = b_m \mathbf{u}^{(m)} + b_{m-1} \mathbf{u}^{(m-1)} + \dots + b_1 \mathbf{u}' + b_0 \mathbf{u} \quad (1.26)$$

$$n \geq m \quad a_n = 1$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{a_n} \mathbf{x}_1 + \frac{b_n}{a_n} \mathbf{u} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{x}_1 = a_n \mathbf{y} - b_n \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}_2 = a_{n-1} \mathbf{y} + a_n \mathbf{y}' + b_{n-1} \mathbf{u} + b_n \mathbf{u}'$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_n = a_1 \mathbf{y} + a_2 \mathbf{y}' + \dots + a_n \mathbf{y}^{(n-1)} - b_1 \mathbf{u} + b_2 \mathbf{u}' - \dots - b_n \mathbf{u}^{(n-1)}$$

Použijeme vztahy (1.5) a (1.6).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{n-1} - b_n a_{n-1} \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_0 - b_n a_0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (1.30)$$

$$\mathbf{D} = [b_n] \quad (1.31)$$

Matice pozorovatelnosti:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Jak je vidět, vznikne dolní trojúhelníková matice. V případě, že stavová realizace systému není v normálním tvaru pozorovatelnosti, lze ji na tento tvar převést pomocí vhodné transformační matice \mathbf{T} . Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.3.2 Diskrétní systém

Uvažujme diferenční rovnici.

$$a_n \mathbf{y}(k) + a_{n-1} \mathbf{y}(k+1) + \dots + a_0 \mathbf{y}(k+n) = b_n \mathbf{u}(k) + b_{n-1} \mathbf{u}(k+1) + \dots + b_0 \mathbf{u}(k+n) \quad (1.33)$$

$$\mathbf{x}_1(k) = a_0 \mathbf{y}(k) - b_0 \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}_2(k) = a_1 \mathbf{y}(k) + a_0 \mathbf{y}(k+1) - b_1 \mathbf{u}(k) - b_0 \mathbf{u}(k+1)$$

⋮

$$\mathbf{x}_n(k) = a_{n-1} \mathbf{y}(k) + a_{n-2} \mathbf{y}(k+1) + a_0 \mathbf{y}(k+n-1) - b_{n-1} \mathbf{u}(k) - b_0 \mathbf{u}(k+n-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_1(k) + b_0 \mathbf{u}(k)$$

Použijeme vztahy (1.7) a (1.8).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ \vdots \\ b_n - b_0 a_n \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (1.36)$$

$$\mathbf{D} = [b_0] \quad (1.37)$$

Matice pozorovatelnosti:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Jak je vidět, vznikne dolní trojúhelníková matice. Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.4 VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ POPIS DYNAMICKÉHO SYSTÉMU

Vnější popis dynamického systému, je popis dynamiky systému přenosovou funkcí, popřípadě diferenciální či diferenční rovnicí.

Vnitřní popis dynamického systému, je stavová reprezentace respektující strukturální vnitřní vazby mezi stavovými veličinami.

1.5 SOUVISLOST MEZI VNĚJŠÍM A VNITŘNÍM POPISEM

Souvislost plyne z jednoduché úvahy a řešení příslušných stavových rovnic v Laplaceově transformaci. Uvažujme stavový popis obecně MIMO lineárního dynamického systému n -tého řádu:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad \text{L} \rightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0+) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.39)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad \text{L}^{-1} \rightarrow \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.40)$$

Pro nulové počáteční podmínky:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.41)$$

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.42)$$

Vektor vnitřních stavů $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.43)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s) = [\mathbf{C} \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.44)$$

$$F(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.45)$$

Obdobně lze psát pro diskretní systém pomocí Z-transformace:

$$F(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{D} \quad (1.46)$$

Čerpáno z (Kupka, 2014).

1.6 FUNDAMENTÁLNÍ MATICE PŘECHODU

Fundamentální matice systému $\Phi(t)$ je často také označovaná jako stavová matice přechodu, je jedním z vyjádření základních vlastností dynamického systému. Jednoznačně popisuje v časové oblasti vývoj všech složek stavového vektoru.

Stavový vektor v časové oblasti lze v obecném případě vyjádřit inverzní Laplaceovou transformací.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0+) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.47)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.48)$$

Laplaceův obraz stavového vektoru $\mathbf{X}(s)$ je dán vztahem:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0+) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.49)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0+) + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.50)$$

$$L^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\} = \boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.51)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{E} \quad (1.52)$$

$\boldsymbol{\Phi}$ je čtvercová matice rozměru $n \cdot n$. Čerpáno z (Kupka, 2014)

Vývoj stavového vektoru v časové oblasti:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}(0+) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.53)$$

Laplaceův obraz lze pak vyjádřit konvolutorním vztahem:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) = L\{\boldsymbol{\Phi}(t)\}\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \quad (1.54)$$

Pomocí tranzitivitě matice $\boldsymbol{\Phi}(t)$, pro kterou platí:

$$\boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}e^{\mathbf{A}(t_0)} = e^{\mathbf{A}(t)} = \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (1.55)$$

Přesun počátku sledovaného časového intervalu do t_0 :

$$\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0)\mathbf{x}(0+) + \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t_0 - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) &= \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0)\mathbf{x}(0+) + \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0 - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau = \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}(0+) + \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) - \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.58)$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.59)$$

$$t > t_0$$

Tento vztah určuje časový průběh všech složek stavového vektoru za předpokladu, že známe stav systému v čase t_0 a budicí funkci $u(\tau)$ na intervalu $\tau \in \langle t_0, t \rangle$. Čerpáno z (Janeček, 2012).

1.7 TRANSFORMACE FUNDAMENTÁLNÍ MATICE

Výhodou stavového popisu dynamického systému je, že lze jednoduchou transformací přizpůsobit tvar popisu fyzikální podstatě systému, ale i měnit vyjádření do tvarů vhodných pro některé numerické operace. Přejít od jednoho vyjádření k druhému je určen prostou regulární transformací stavového vektoru $\mathbf{x}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(t)$

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}'(t) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.60)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.61)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (1.62)$$

$$\mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (1.63)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.64)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.65)$$

Pro spojité systém:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (1.66)$$

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}(t)} \quad (1.67)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t)} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{A}}t + \frac{1}{2!} \tilde{\mathbf{A}}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \tilde{\mathbf{A}}^3 t^3 = \mathbf{E} + (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})t + \frac{1}{2!} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^2 t^2 + \frac{1}{3!} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^3 t^3 = \mathbf{T}^{-1} \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 t^3 + \dots \right) \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \Phi(t) \mathbf{T} \quad (1.68)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{T}^{-1} \Phi(t) \mathbf{T} \quad (1.69)$$

$$\Phi(t) = \mathbf{T} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{T}^{-1} \quad (1.70)$$

Pro diskrétní systém:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{N}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (1.71)$$

Čerpáno z (Slapnička, 2010).

Metody jak nalézt fundamentální matici $\Phi(t)$ dynamického systému:

a) Pomocí Laplaceovy transformace:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \quad (1.73)$$

b) Pomocí Sylvestrova rozvoje matice \mathbf{A}

Sylvestrův rozvoj matice \mathbf{A} , se vyplatí především tehdy, když potřebujeme provést výpočet většího počtu maticových funkcí s jednou maticí. Převádí nekonečný rozvoj, kterým je maticová funkce definována, pouze na konečnou řadu, jejíž počet členů je dán stupněm minimálního anulujícího polynomu $\psi(\lambda)$ matice.

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ z toho zjistíme vlastní čísla matice

$$\mathbf{A}^{-1}(\lambda) = (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (1.74)$$

$$\Delta(\lambda) = \psi(\lambda)$$

Minimální anulující polynom $\psi(\lambda)$ se rovná anulujícímu $\Delta(\lambda)$, k defektu matice zde nedochází, kořeny $\psi(\lambda)$ jsou vlastní čísla matice a tvar Sylvestrova rozvoje nabývá tvaru:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{K}_1 f(\lambda_1) + \mathbf{K}_2 f(\lambda_2) \quad (1.75)$$

Sylvestrovův rozvoj má pouze dva členy pro jakoukoliv matici \mathbf{A} . Maticové koeficienty $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ jsou stejné pro jakoukoliv rozvíjenou funkci, musíme je v dalším určit.

Volíme dvě různé jednoduché (libovolné) funkce:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{K}_1 f(\lambda_1) + \mathbf{K}_2 f(\lambda_2) \quad (1.76)$$

Dále řešíme pomocí Cramerova pravidla:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A} & -2\mathbf{E} \end{vmatrix} = 2\mathbf{E} + \mathbf{A} \quad (1.77)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{K}_1 \quad (1.78)$$

c) Prostřednictvím transformace \mathbf{A} do Jordanova tvaru

Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{A} je ve tvaru, který odpovídá normální formě říditelnosti stavového vyjádření a má pouze jednonásobná vlastní čísla, je transformační matice, která ji transformuje do Jordanova diagonálního tvaru \mathbf{A}_J :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{z toho si vyjádříme matici } \mathbf{T}^{-1} \quad (1.79)$$

$$\mathbf{A}_J = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Fundamentální matice v Jordanově tvaru:

$$\Phi_J(t) = e^{\mathbf{A}_J t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

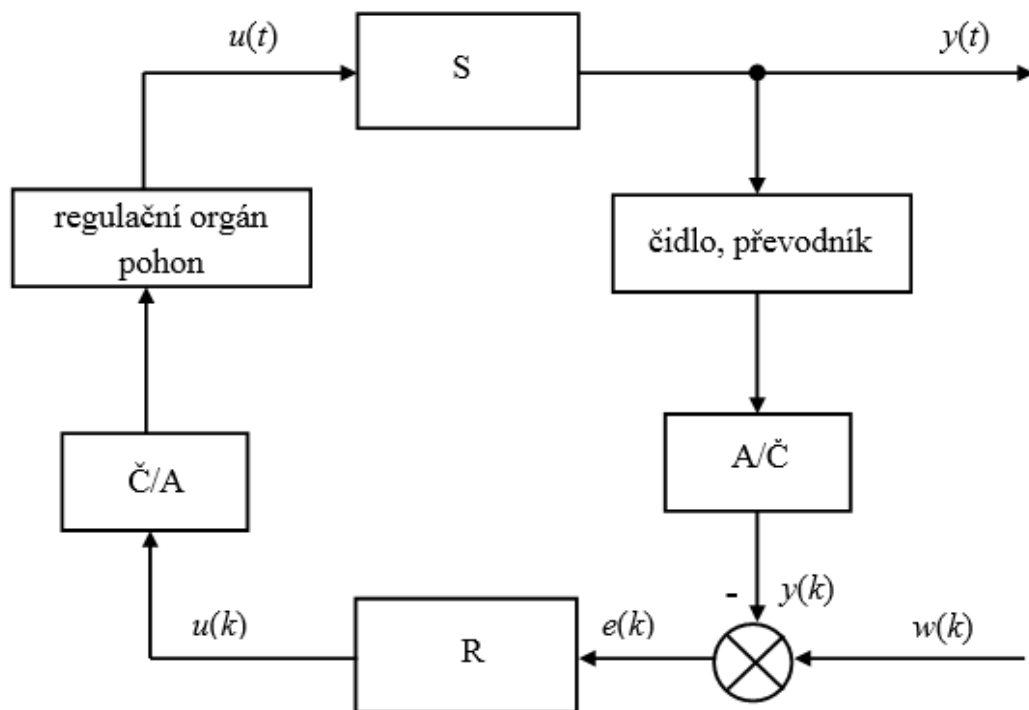
Čerpáno z (Janeček, 2014).

1.8 DISKRÉTNÍ STAVOVÝ MODEL

Z počátku se pracovalo se spojitými regulátory, ale rozvoj technologie diskrétních pracujících prvků je nahradil diskrétními regulátory (informace v digitální podobě). Tato změna

si vyžádala modifikaci matematických analytických přístupů. Vše co je v přírodě kolem nás, je spojitě.

Velké množství dynamických systémů a procesů, které ovládáme, jsou spojitě procesy. Spojité procesy jsou popsány diferenciálními rovnicemi. Prvek, který je ve zpětné vazbě, pracuje s informací v číslicové formě. Veličiny, které jsou spojitě a v průběhu funkce se mění, jsou vzorkovány v pravidelných okamžicích. Dále jsou převáděny do číslicové podoby jako posloupnosti čísel a ty číslicový regulátor ve zpětné vazbě zpracovává. Výsledkem je výpočet hodnoty akční veličiny v číslicové podobě, kterou akční členy převádějí na spojitou veličinu (tzv. schodovou funkci) působící na regulovanou soustavu. Je zřejmé, že akční veličina $u(t)$ působící na regulovanou soustavu, je spojitou funkcí, která mění své hodnoty jen v okamžicích vzorkování a mezi těmito okamžiky je konstantní. Čerpáno z (Honc, 2014).



Obrázek 1.9 – Spojitý systém s číslicovým regulačním obvodem

Převodník:- standardní napětí: 0 až 5 V; 0 až 10 V; -5 až 5 V; -10 až 10 V
standardní proud: 0 až 20 mA; 4 až 20 mA

Diskrétní model spojitého systému popisuje chování v diskrétních okamžicích vzorkování. Popišme nyní způsob nalezení diskrétního modelu spojitého systému pomocí rovnic popisujících vývoj jeho stavového vektoru. Čerpáno z (Honc, 2014).

Spojitý stavový popis systému buzeného schodovou funkcí přechází na diskrétní stavový popis.

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (1.82)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (1.83)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.84)$$

$t_0 = kT_S$, $t = (k+1)T_S$, $\mathbf{u}(t)$ je schodová funkce s konstantními okamžiky vzorkování

$$\mathbf{x}[(k+1)T_S] = \Phi[(k+1)T_S - kT_S]\mathbf{x}(kT_S) + \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} \Phi[(k+1)T_S - \tau]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.84)$$

Čerpáno z (Slapnička, 2010).

Matice diskrétního popisu lze tedy získat takto:

$$\mathbf{M} = \Phi(T_S) = e^{\mathbf{A}T} \quad (1.85)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{E})\mathbf{B} \quad (1.86)$$

Čerpáno z (Kupka, 2015).

2 ESTIMACE STAVŮ - ESTIMÁTORY

Obecně je estimátor zařízení, které umožňuje zjistit na základě znalosti vstupních, výstupních, případně měřitelných stavových veličin hodnoty neměřitelných stavových veličin. Dochází tak v podstatě k rekonstrukci stavů, proto se často používá i označení rekonstruktor, případně pozorovatel. Známe-li kromě vstupní a výstupní veličiny soustavy i její stavové proměnné, můžeme je k regulaci využít také. A to typicky s použitím stavového regulátoru. Pro realizaci estimátorů je nutná znalost stavového popisu soustavy. Každý fyzikální systém lze charakterizovat soustavou diferenciálních rovnic označovaných jako stavové rovnice systému. V řadě případů však tyto stavové rovnice neznáme a známe jen vstupně výstupní aproximaci soustavy. Ke každému vstupně-výstupnímu popisu existuje nekonečně mnoho stavových popisů. V případě, že nám při regulaci nezáleží na průběhu stavových veličin soustavy, lze použít libovolnou stavovou reprezentaci. V případě, že záleží na průběhu stavů, je třeba použít stavový popis odpovídající regulovanému systému. Další možností je využití transformační matice, která umožňuje získat z průběhů stavových veličin jedné reprezentace průběh stavů jiné stavové reprezentace. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

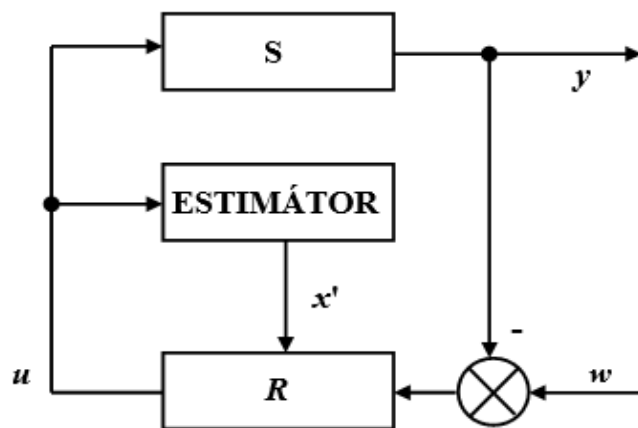
Estimátor se v regulační smyčce používá při regulaci stavovým regulátorem. Hlavní cíl je získávat hodnoty neměřitelných stavových veličin z průběhu vstupních a výstupních veličin, případně měřitelných stavových veličin. Získané stavové veličiny jsou použity jako vstupy stavového regulátoru. Estimátor se většinou realizuje regulovaným systémem doplněným o korekční vazby, které odstraňují rozdíl mezi stavy soustavy a stavy estimátoru.

Požadujeme, aby do regulační smyčky nevstupovaly neměřené poruchové signály. Při vstupu skokové poruchy dochází po dobu přechodného děje k nesprávnému odhadu stavových veličin. Regulátor reguluje podle nesprávných stavových hodnot, problém je pak optimalizovat vyregulování poruchy. Pokud na regulovaný systém působí měřené poruchy, lze je do modelu estimátoru přivést také. Přesnost estimace stavových veličin je dána podobností modelu a skutečného systému.

Máme různé typy estimátorů a každý je určen pro estimaci při určité vstupující poruše. Pro estimaci bez vstupující poruchy je určen estimátor E_{ARX} , při vstupující poruše na vstup soustavy E_{IN} , při působení poruchy na výstupu soustavy E_{OUT} a při působení poruchy s obecným přenosem typ označený jako E_{ARMAX} . Rozdíl jednotlivých typů je dán použitím zpětnovazební korekční vazby a způsobem připojení na výstup soustavy. Základní estimátor E_{ARX} dokáže odstranit vliv libovolné konstantní poruchy do určitého počtu vzorkovacích period, daných řádem soustavy. Během přechodného děje však stavy estimátoru nesouhlasí se skutečnými

stavy regulované soustavy, proto při vstupu poruchy dochází k přepnutí na typ estimátoru určeného pro danou poruchu. Ten zajistí správný průběh stavů, do regulace je však zapojen jen na dobu nutnou k odeznění přechodného děje v estimátoru E_{ARX} . Požadavkem pro správnou funkci je vstup jen konstantních poruch. K regulaci stavových veličin je použitý stavový regulátor nastavovaný pomocí kvadratického kritéria. Pro zajištění nulové ustálené odchylky při působení jakékoli konstantní poruchy působící mezi vstupem a výstupem soustavy je do regulační smyčky navíc přidána další stavová veličina. Ta je realizována jako integrační složka. Estimátory i stavový regulátor jsou realizovány v přírůstkovém tvaru. Protože v ustáleném stavu jsou výstupy všech přírůstkových estimátorů nulové, je přepínání mezi nimi velmi jednoduché. Čerpáno z (Dvořáček, 2008).

Důležitou vlastností stavové regulace je, že využívá úplnou informaci o rozvážení systému pro konstrukci akční veličiny, která působí na jeho vstupu a určuje jeho vývoj. V reálných systémech je však možné fyzické měření složek stavového vektoru jen ve výjimečných případech. Neměřitelné složky se odhadují zařízením zvaným estimátor nebo také řečeno pozorovatel. Výsledkem činnosti estimátoru je dynamický odhad \hat{x} neměřitelných složek stavového vektoru, které jsou využívány k výpočtu akční veličiny. V případě, že je měřená veličina zatížena nepřesnostmi měření nebo šumem, se využívají estimované veličiny místo měřených. Stochastický šum je estimátorem vhodně filtrován.



Obrázek 2.1 – Regulační obvod s estimátorem

2.1 VLIV DYNAMIKY ESTIMÁTORU

Dynamika uzavřeného regulačního obvodu je výslednicí dynamické spolupráce a vzájemného ovlivnění tří relativně samostatných částí. Vlastní regulované soustavy, regulátoru a estimátoru. Je zřejmé, že každá tato část svým způsobem ovlivňuje dynamiku celku. Navrhovaný regulátor a estimátor nemusejí mít stejné dynamické vlastnosti, nemusejí být ani

navrženy stejnou strategií. Správně navržený estimátor může významně ovlivnit dynamiku celého obvodu. Tedy „opatrná strategie“ regulátoru, realizovaná buď delším regulačním krokem, nebo způsobem jeho návrhu, může být kompenzována rychlejší dynamikou estimátoru. Reakce regulačního obvodu na neměřitelné poruchy, které zatěžují regulační obvod, nemusejí do estimátoru vstupovat přímo, ale s dynamickým zpožděním daným reakcí celého obvodu. Tyto poruchy jsou pro regulaci zvláště nepříjemné, protože estimátor neposkytuje regulátoru správnou informaci o rozvážení regulované soustavy, ale pouze odchýlené odhady stavových veličin. Zlepšení kvality regulačního pochodu a robustnosti celého obvodu může snadno vést k chybné strategii zvyšování váhy na akční veličinu u kvadratického kritéria (a tím zpomalování a zklidňování regulačního pochodu) kompenzované zkrácováním regulačního kroku. Můžeme takto dosáhnout velmi podobných regulačních pochodů a prakticky stejné robustnosti obvodu, ale reakce na neměřitelné poruchy se tímto způsobem výrazně zhorší.

Tedy zrychlení estimačního procesu má pozitivní vliv na dynamické vlastnosti regulačního obvodu, zvyšuje jeho robustnost. Zvyšování váhy na akční veličinu v kvadratickém kritériu se současným zkrácováním regulačního kroku je však nevhodné. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

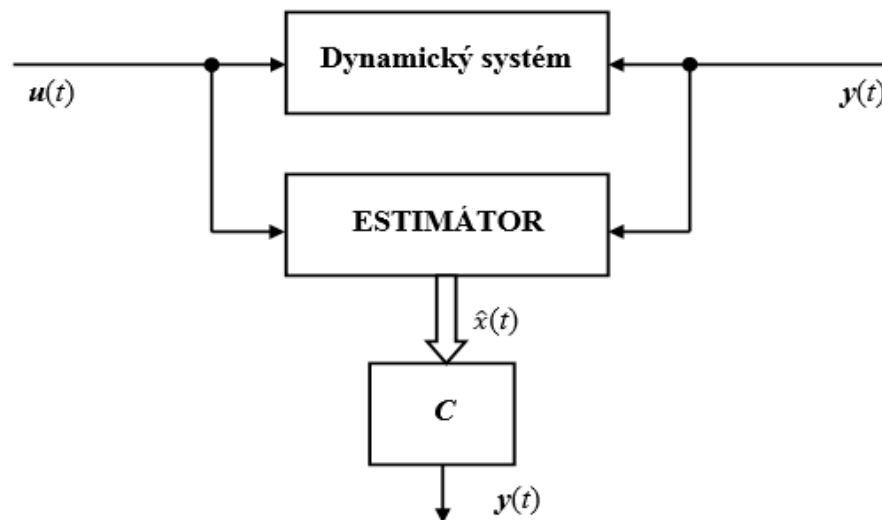
2.1.1 Rozdílný krok regulátoru a estimátoru

Spolupráce diskrétního regulátoru a diskrétně pracujícího estimátoru je poněkud nestandartní, pokud každý z nich pracuje s jinou vzorkovací periodou. Estimátor skutečný stav regulované soustavy pouze odhaduje s chybou, která se v průběhu regulačního pochodu zmenšuje. Pokud regulátor nemá přesný odhad jednotlivých složek stavového vektoru, výpočet řídicího algoritmu vede na neoptimální akční zásahy a ve svém důsledku na regulační pochod, který se liší od teoreticky optimálního. Myšlenkou je estimovat stav s násobně kratší periodou vzorkování než je perioda regulace (a tím i relativně rychlejší dynamikou estimačního procesu), potlačit co nejvíce nepřesných odhadů a poskytnout regulátoru kvalitnější informaci o rozvážení soustavy. Pokud volíme krok regulace jako celočíselný násobek estimačního kroku, tak výsledkem je očekávaný efekt, analogický k efektu, který byl vyvolán návrhem estimátoru s rychlejší dynamikou. Pokud návrh estimátoru neovlivní zásadním způsobem reakci obvodu, tak se jedná o „měřitelné“ poruchy, které budí shodně dynamiku regulované soustavy i estimátoru. Vliv zvyšující se rychlosti estimace může mít pozitivní vliv na zrychlování dynamiky estimace a kvalitu regulačního pochodu i zlepšení robustnosti uzavřeného obvodu. Také možným urychlením estimačního procesu je zkrácení estimačního kroku, ale nevhodným

zkrácením estimačního kroku můžeme dynamiku obvodu paradoxně i výrazně zhoršit, tedy dojde k zhoršení odhadu a dynamických vlastností regulačního obvodu. Při návrhu estimátoru v jiném než konečném počtu kroků estimace toto nebezpečí nehrozí. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

2.2 SPOJITÝ ESTIMÁTOR ÚPLNÉHO ŘÁDU

Odhad stavu je možné realizovat ve spojitě i diskrétní formě popisu dynamického systému, ale diskrétní forma estimátoru se v praxi více používá.



Obrázek 2.2 – Deterministický estimátor

V případě, že je měření veličin na systému komplikované, nákladné, nebo nemožné, lze provést estimaci (odhad) stavového vektoru. Deterministická estimace odpovídá případu, kdy měřený signál $y(t)$ neobsahuje aditivní šumový signál a lze předpokládat, že na stavové veličiny nepůsobí šumové signály. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Deterministický přístup, na rozdíl od stochastického přístupu, nepracuje s předpokladem stochastické zátěže regulačního obvodu. Stochastické metody odhadu stavů vycházejí z předpokladu náhodného charakteru poruchových signálů. Pracují tedy s pravděpodobnostními charakteristikami těchto veličin. Deterministické a stochastické přístupy vedou ke stejné struktuře estimátorů. Jejich parametry jsou optimalizovány k dynamice estimačního procesu (deterministické estimátory) nebo k pravděpodobnostním momentům předpokládaných náhodných poruchových signálů (stochastické estimátory). Čerpáno z (Slapnička, 2010).

Odvoďme nyní spojitou variantu deterministického estimátoru úplného řádu. Odhad stavového vektoru lze vyjádřit

$$\hat{x} = x - \Delta x \quad (2.1)$$

$$\hat{x} = x' - \Delta x' \rightarrow \Delta x' = x' - \hat{x}' \quad (2.2)$$

$$\hat{x}' = \mathbf{A}_E \hat{x} + \mathbf{B}_E u + \mathbf{H}_E y \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}' &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u - \mathbf{A}_E \hat{x} - \mathbf{B}_E u - \mathbf{H}_E y = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u - \mathbf{A}_E x + \mathbf{A}_E \Delta x - \mathbf{B}_E u - \\ &\mathbf{H}_E (\mathbf{C}x + \mathbf{D}u) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{C})x + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{D})u + \mathbf{A}_E \Delta x \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vyjdeme-li z tzv. podmínky autonomnosti estimace, můžeme vyjádřit matice estimátoru \mathbf{A}_E a \mathbf{B}_E :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{C}) = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{D}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\Delta \hat{x}' = \mathbf{A}_E \Delta x \quad (2.6)$$

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{A} - \mathbf{H}_E \mathbf{C} \quad \mathbf{B}_E = \mathbf{B} - \mathbf{H}_E \mathbf{D} \quad (2.7)$$

$$\Delta \hat{x}' = \mathbf{A}_E \Delta x = x' - \hat{x}' = \mathbf{A}_E (x - \hat{x}) \quad (2.8)$$

$$\hat{x}' = x' - \mathbf{A}_E (x - \hat{x}) = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u - (\mathbf{A} - \mathbf{H}_E \mathbf{C})(x - \hat{x}) \quad (2.9)$$

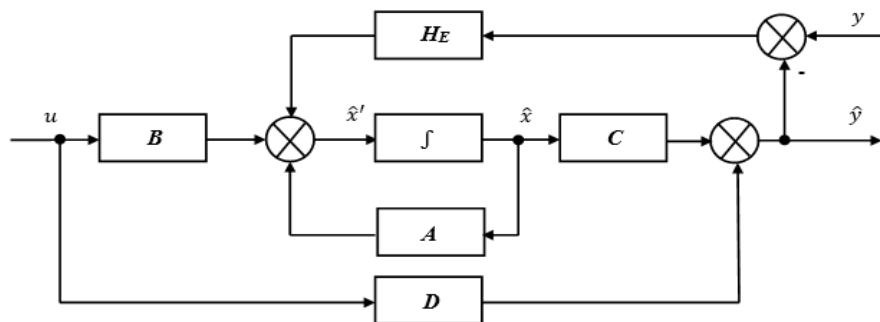
Uvedme nyní postup návrhu estimátoru:

$$1. \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}_E) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{H}_E \mathbf{C}) \quad (2.10)$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots = 0$$

$$2. \mathbf{A}_E = \mathbf{A} - \mathbf{H}_E \mathbf{C}, \quad \mathbf{B}_E = \mathbf{B} - \mathbf{H}_E \mathbf{D} \quad (2.11)$$

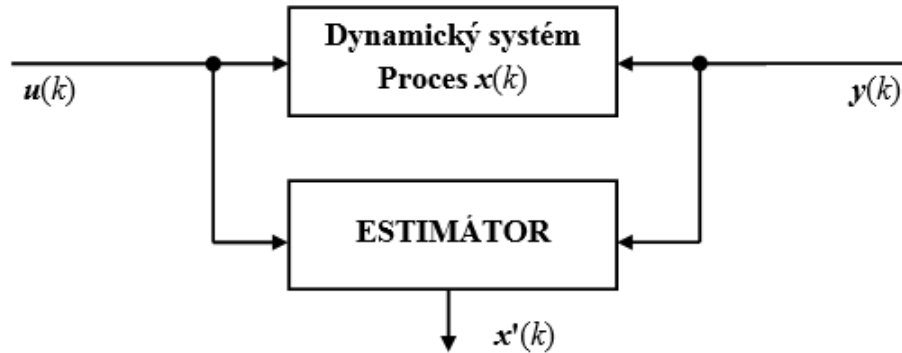
$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}' &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u - \mathbf{A}x + \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{H}_E \mathbf{C}(x - \hat{x}) = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}_E \mathbf{C}(x - \hat{x}) = \mathbf{A}\hat{x} + \\ &\mathbf{B}u + \mathbf{H}_E \mathbf{C}(y - \hat{y}) \rightarrow \Delta y = \mathbf{C} \Delta x \end{aligned} \quad (2.12)$$



Obrázek 2.3 – Estimátor úplného řádu

Čerpáno z (Kupka, 2014).

2.3 DISKRÉTNÍ ESTIMÁTOR ÚPLNÉHO ŘÁDU



Obrázek 2.4 – Diskrétní estimátor úplného řádu

Deterministický estimátor vychází ze znalosti matic A , B , C , D , nebo matic M , N , C , D stavového popisu a ze znalosti vstupu $u(t)$, nebo-li $u(k)$ a výstupu $y(t)$ nebo-li $y(k)$ dynamického systému.

Dynamický systém:

Použijeme vztahy (1.7) a (1.8).

Dynamika estimátoru:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}_E \mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_E \mathbf{y}(k) \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.14)$$

\mathbf{M}_E , \mathbf{N}_E - stavové matice estimátoru,

$\hat{\mathbf{x}}(k)$ - odhad stavu $\mathbf{x}(k)$

$\hat{\mathbf{y}}(k)$ - odhad výstupu $\mathbf{y}(k)$

Chyba estimace je rozdíl mezi skutečným stavem a odhadem.

Odchylka odhadu:

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u} - [\mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}_E \mathbf{u}(k) + \\ & \mathbf{H}_E \mathbf{y}(k)] = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) - \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{N} - \mathbf{N}_E)\mathbf{u}(k) - \mathbf{H}_E \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \Delta \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \\ & \mathbf{M}_E \Delta \mathbf{x}(k) + (\mathbf{M} - \mathbf{M}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{C})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{N} - \mathbf{N}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{D})\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Snažíme se, aby chyba estimace konvergovala s rostoucím časem k nule. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Podmínka autonomnosti estimace:

$$\mathbf{M} - \mathbf{M}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{C} = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{N} - \mathbf{N}_E - \mathbf{H}_E \mathbf{D} = 0 \quad (2.18)$$

Z výše uvedených vztahů je:

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}_E \Delta \mathbf{x}(k) \quad (2.19)$$

Dynamika je dána maticí \mathbf{M}_E . K zajištění konvergence estimačního procesu, je potřeba zvolit vlastní čísla ve stabilní oblasti.

Podmínka stability estimace:

\mathbf{M}_E – stabilní

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M}_E) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{H}_E \mathbf{C}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots \quad (2.20)$$

$$\lambda_i: |\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Kroky pro návrh estimátoru:

Matrice \mathbf{H}_E volíme tak, aby λ_i matice \mathbf{M}_E ležely uvnitř jednotkového kruhu (speciálně pro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ bude estimátor konečný a minimální)

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{M} - \mathbf{H}_E \mathbf{C} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{N}_E = \mathbf{N} - \mathbf{H}_E \mathbf{D} \quad (2.22)$$

Jestliže po provedení n -té mocniny vznikne nulová matice (vlastní čísla jsou nulová), tak estimační proces končí po n krocích. Pro systémy SISO je volba estimátoru jednoznačná, matice \mathbf{H}_E má stejný počet čísel jako je počet vlastních čísel λ_i estimačního pochodu, ten je dán řádem n dynamického systému. Pro systémy MIMO, které mají více jak jednu výstupní veličinu, je návrh estimátoru nejednoznačný. Matice \mathbf{H}_E má q sloupců a n řádků. Proto je více způsobů návrhu estimátoru. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Tedy estimační proces končí po n krocích. Po n krocích se odhad estimátoru přesně rovná skutečnému stavu. Estimátor lze interpretovat jako paralelní model systému dotovaný rozdílem skutečné a estimované hodnoty výstupní veličiny.

Opět použijeme vztahy (1.7) a (1.8).

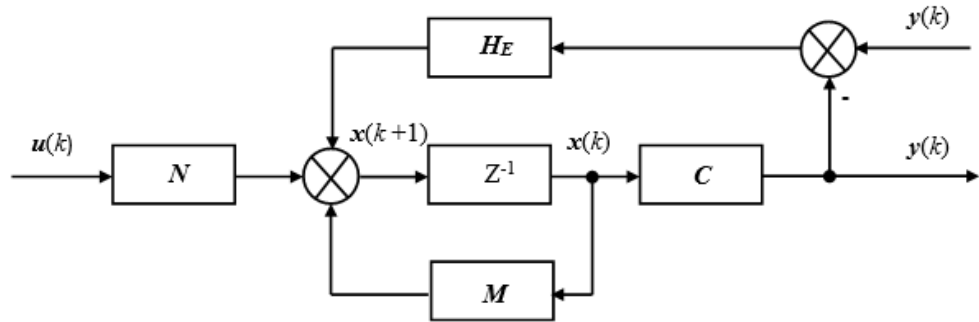
$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (2.23)$$

Estimátor:

Tady využijeme vztahy (2.21) a (2.22).

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}_E \mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_E \mathbf{y}(k) = (\mathbf{M} - \mathbf{H}_E \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{N} - \mathbf{H}_E \mathbf{D}) \mathbf{u}(k) = \\ &= \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N} \mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_E [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{D} \mathbf{u}(k)] = \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N} \mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_E [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)]\end{aligned}\quad (2.24)$$

Čerpáno z (Janeček, 2012).



Obrázek 2.5 – Diskrétní estimátor

2.4 DISKRÉTNÍ ESTIMÁTOR REDUKOVANÉHO ŘÁDU

Do estimace nezahrneme stavové veličiny, které jsou měřené, jako třeba výstup $\mathbf{y}(k)$.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ \mathbf{x}_E \end{bmatrix}$$

Tedy \mathbf{x}_M je část \mathbf{x} , která je měřená a \mathbf{x}_E je část \mathbf{x} , která se musí estimovat.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ \mathbf{x}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Kroky pro návrh estimátoru:

$$1. \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}_E) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_{12}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (2.27)$$

Každé λ_i musí reálnou část větší jak 0, pro $i = 1, 2, 3 \dots$

$$2. \mathbf{H}_E = \mathbf{A}_{21} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_{11} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q} \quad (2.28)$$

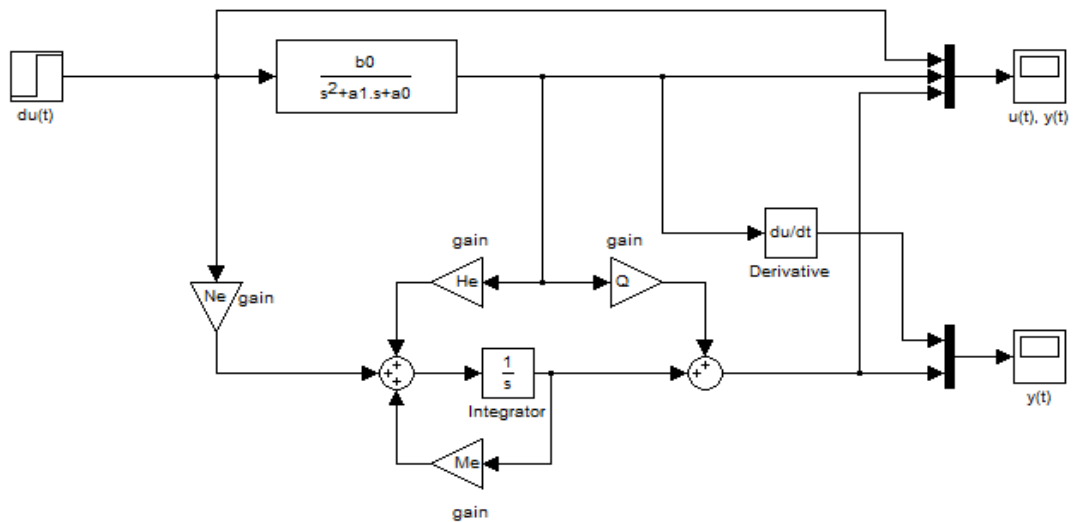
$$3. \mathbf{B}_E = \mathbf{B}_2 - \mathbf{Q}\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}_E = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_{12} \quad (2.29)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_E \rightarrow \widetilde{\mathbf{x}}_E \quad (2.30)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_E = \widetilde{\mathbf{x}}_E + \mathbf{Q}\mathbf{x}_M \quad (2.31)$$

Diskrétní verze je analogická spojité verzi $\mathbf{A}_E \rightarrow \mathbf{M}_E$ a $\mathbf{B}_E \rightarrow \mathbf{N}_E$.

Deterministický estimátor redukovaného řádu – spojitá varianta. Pro spojitou variantu volíme obecně stabilní estimační proces. Čerpáno z (Kupka, 2014).



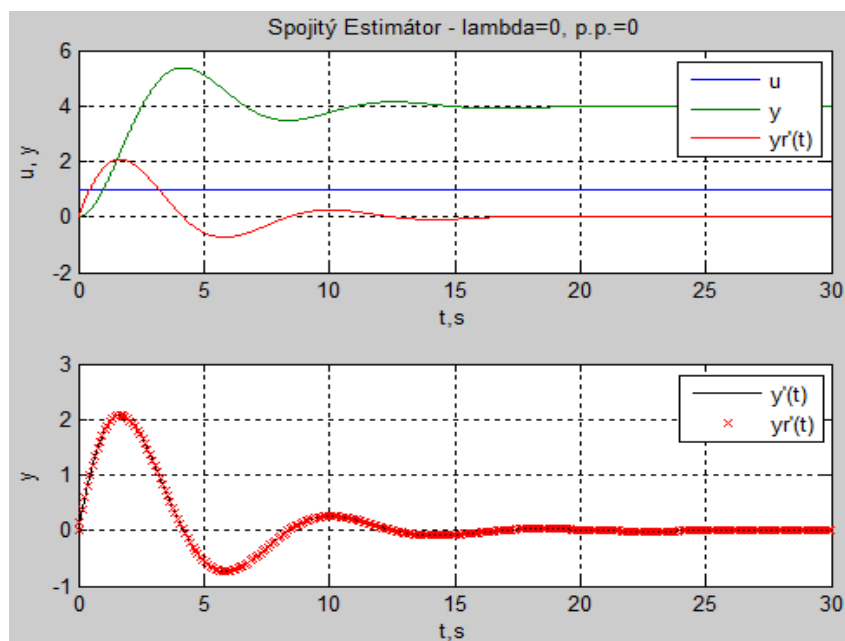
Obrázek 2.6 – Spojitý estimátor redukovaného řádu

Pokud budu mít stejně takto zadanou soustavu:

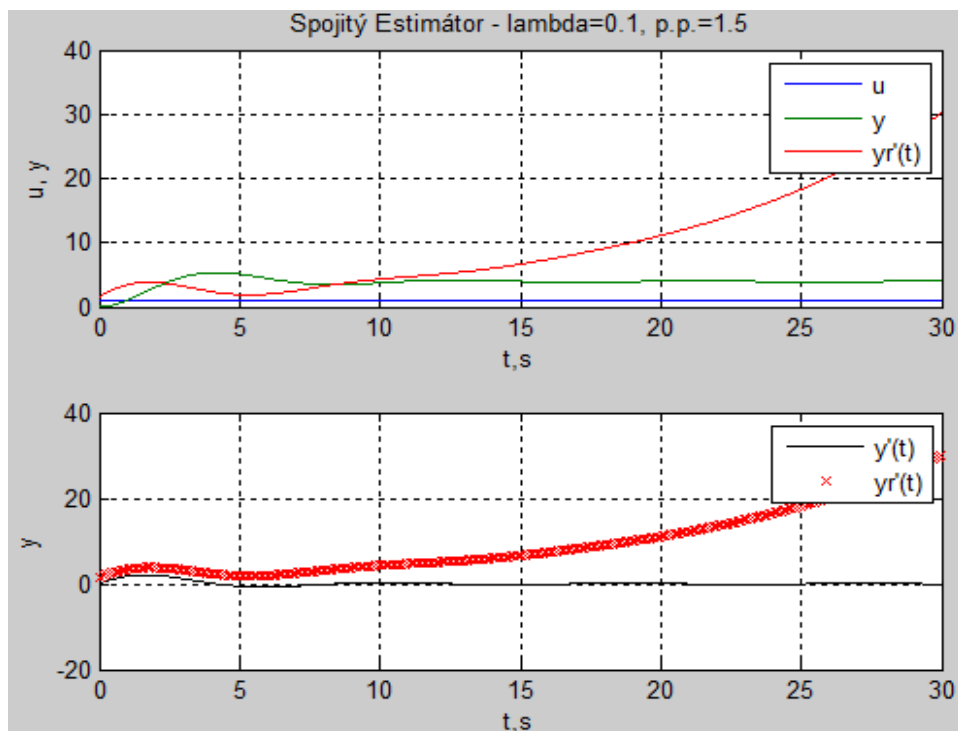
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2,5}{s^2+0,5s+0,6}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0], \mathbf{D} = 0$$

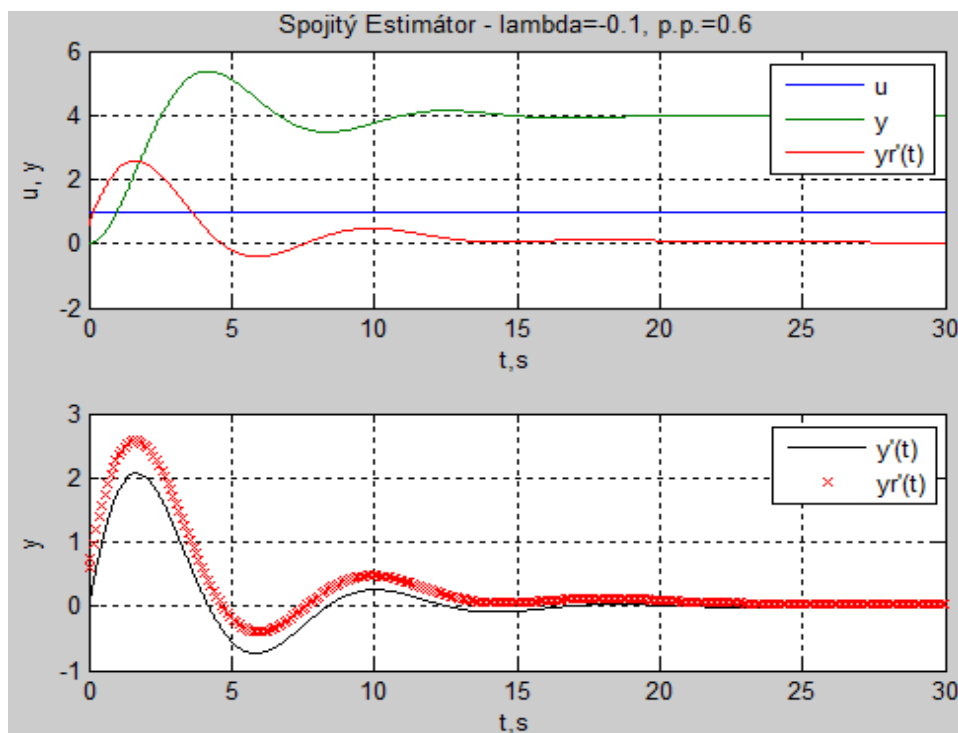
Využijí spojitě schéma zapojení pro estimátor redukovaného řádu, které je vidět na obrázku 2.6. Na obrázcích 2.7,2.8 a 2.9 jsou vidět výsledné průběhy při změně lambda a počátečních podmínek.



Obrázek 2.7 – Spojitý estimátor

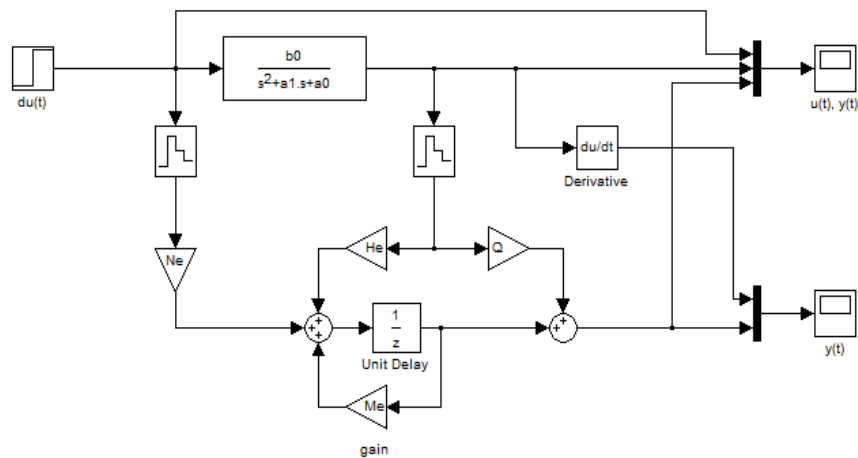


Obrázek 2.8 – Spojitý estimátor pro lambda =0.1 a p.p.=1.5



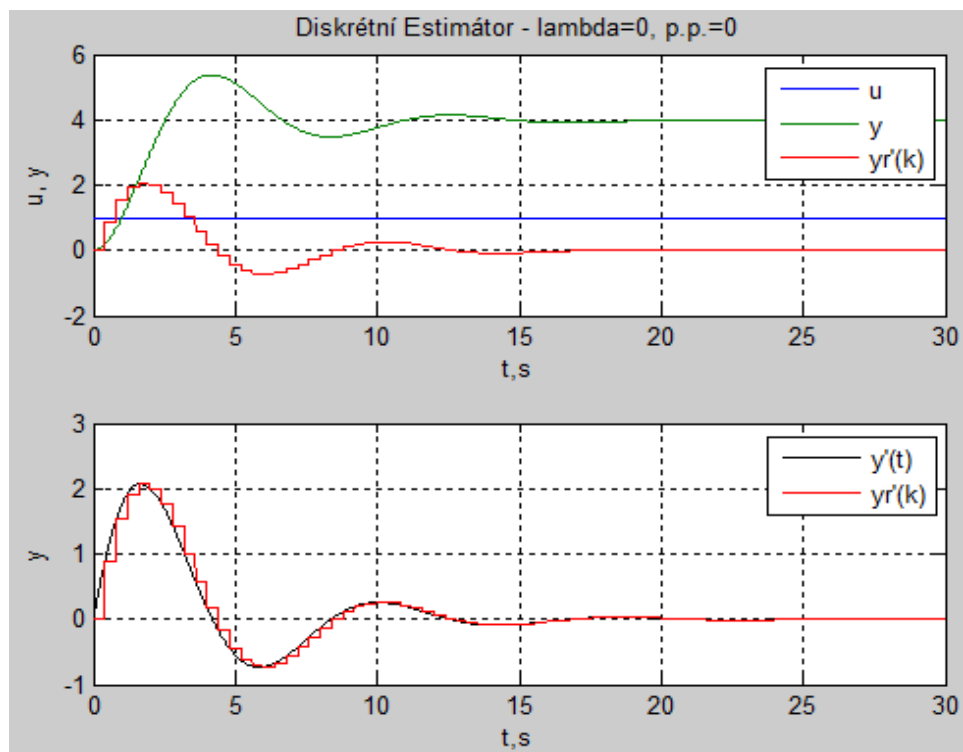
Obrázek 2.9 – Spojitý estimátor pro lambda =-0.1 a p.p.=0.6

Deterministický estimátor redukovaného řádu – diskrétní varianta. Pro diskrétní variantu v konečném počtu kroků.

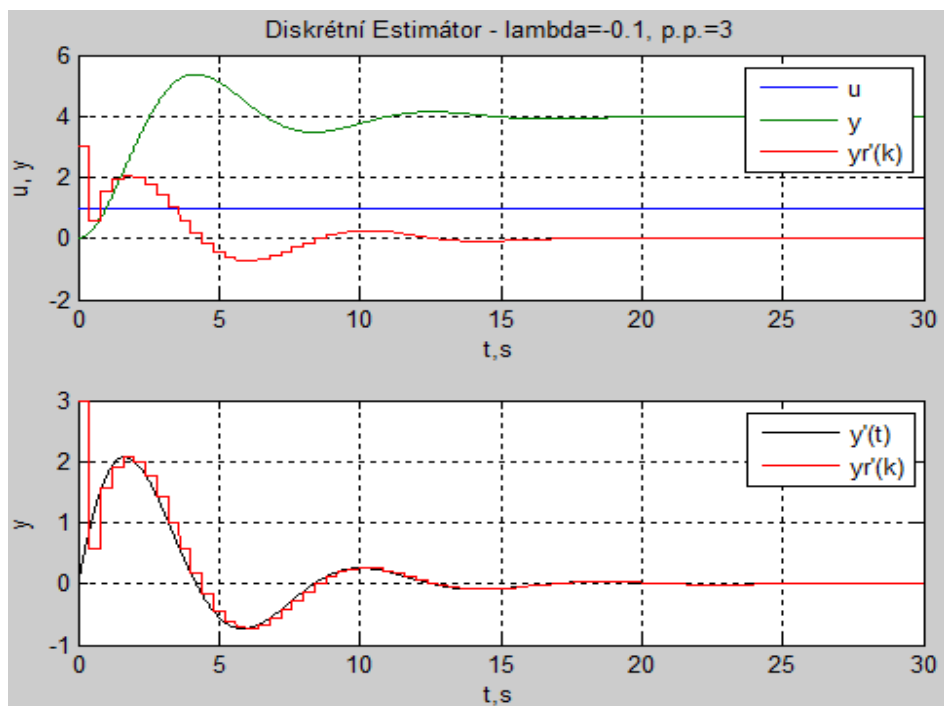


Obrázek 2.10 – Diskrétní estimátor redukovaného řádu

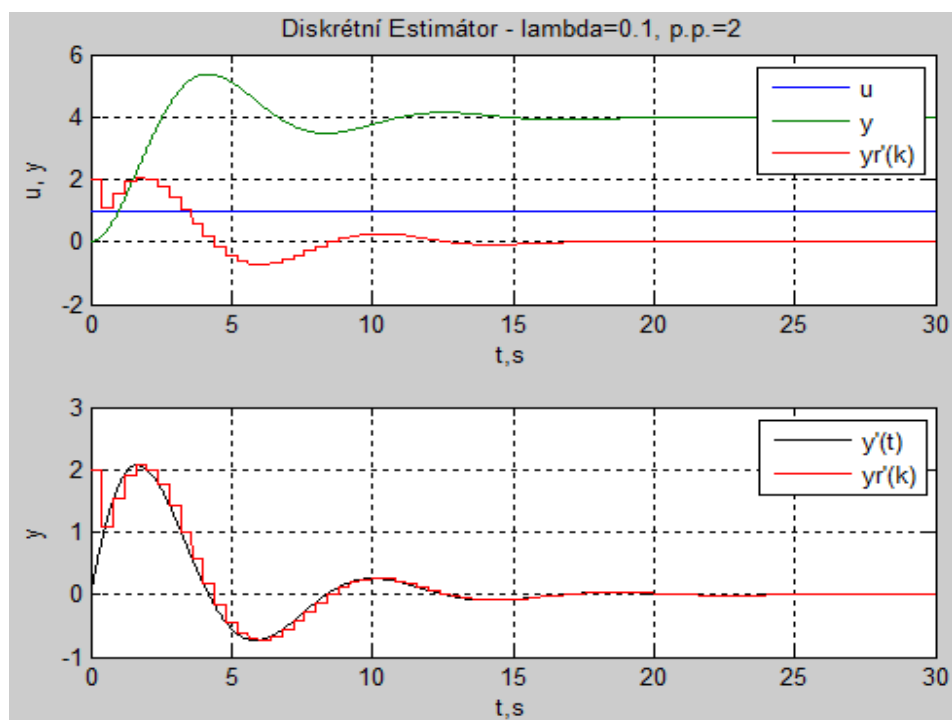
Uvažujme stejný systém jako v odstavci 2.4 a vyjádřeme opět matice **A**, **B**, **C**, **D**. Mám tedy stejně zadanou soustavu, jakou uvádím pro spojitý estimátor redukovaného řádu, tak využiji diskrétní schéma zapojení pro estimátor redukovaného řádu, které je vidět na obrázku 2.10. Na obrázcích 2.11, 2.12 a 2.13 jsou vidět výsledné průběhy při změně lambda a počátečních podmínek.



Obrázek 2.11 – Diskrétní estimátor



Obrázek 2.12 – Diskrétní estimátor pro $\lambda = -0.1$ a $p.p.=3$



Obrázek 2.13 – Diskrétní estimátor pro $\lambda = 0.1$ a $p.p.=2$

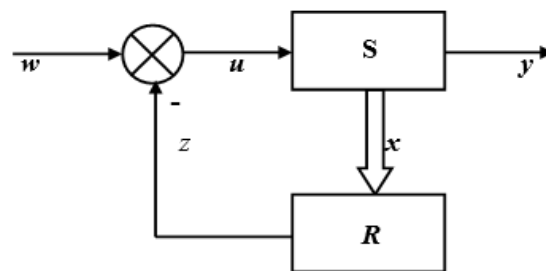
3 STAVOVÝ REGULAČNÍ OBVOD

Pokud je dynamický systém říditelný, tak akční veličina $\mathbf{u}(t)$ resp. $\mathbf{u}(k)$, převede systém z libovolného stavu do libovolného jiného stavu. Znalost všech složek stavového vektoru systém jednoznačně popisuje. Vytvoření vhodné akční veličiny je úkolem stavového regulátoru zapojeného do zpětné vazby regulačního obvodu. Princip stavového regulátoru je založen na tom, že přesune póly regulované soustavy do požadované polohy, kterou definují kořeny jmenovatele přenosu řízení. Princip korekční matice výstupu je založen na tom, že přesune nuly regulované soustavy do požadované polohy, kterou definují zadané kořeny čitatele přenosu řízení. Prvky matice stavového regulátoru a prvky matice korekce výstupu jsou konstanty. Stavové regulátory jsou realizovány nejčastěji jako diskrétní stavové regulátory a to kvůli komplikované struktuře. Čerpáno z (Balátě, 2004).

V případě, že nejsou stavové veličiny přístupné měření, provádí se jejich odhad. Odhad se provádí pomocí estimátorů na základě srovnání skutečných hodnot měřených výstupních veličin y a hodnot výstupních veličin \hat{y} , vypočítaných z odhadnutých hodnot \hat{x} stavových veličin. Návrh regulátoru a struktury estimátoru se provádí nezávisle na sobě, návrhy se vzájemně neovlivňují.

Co se týče volby hodnot matice regulátoru, lze ji provést na základě např. kvadratického kritéria nebo i tak, aby regulace probíhala v minimálním počtu kroků. Čerpáno z (Dvořáček, 2008)

$S: \{M, N, C\}$... rýze dynamický ($D = 0$) a stabilní (M je stabilní)



Obrázek 3.1 – Diskrétní stavový regulátor

Soustava:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (2.33)$$

Regulátor:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{R}\mathbf{x}(k) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{z}(k) \quad (2.35)$$

Upravíme a dostaneme:

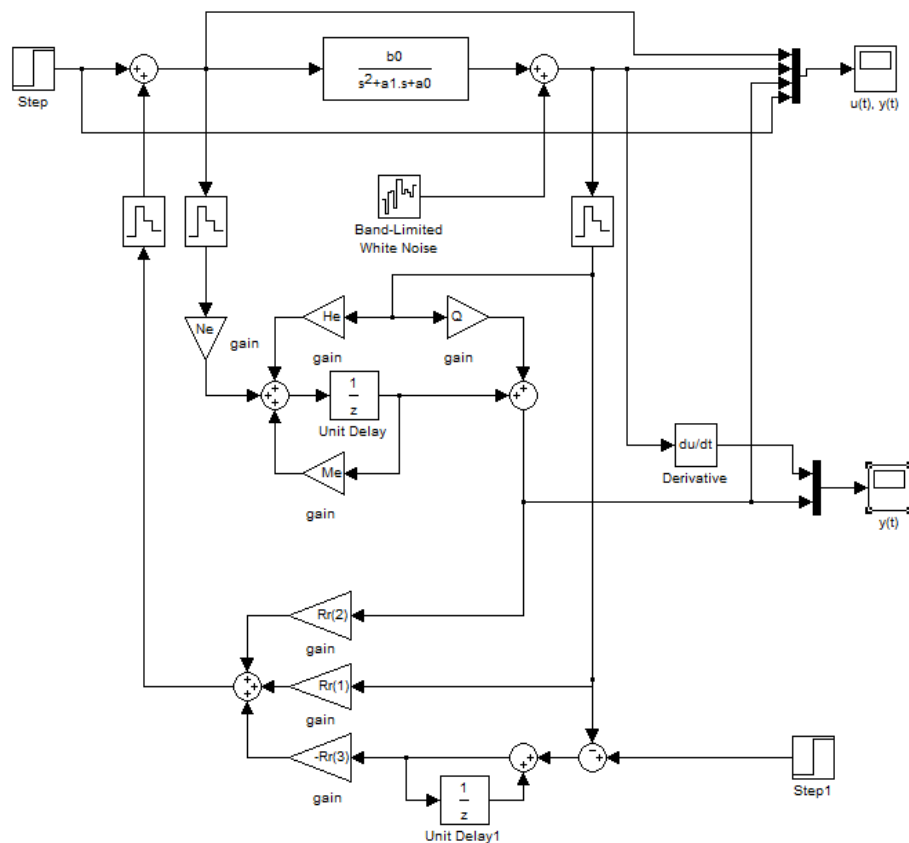
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{M} + \mathbf{NR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}w(k) \rightarrow \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}[w(k) - z(k)] = (\mathbf{M} - \mathbf{NR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}w(k) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{C} + \mathbf{DR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}w(k) \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}[w(k) - z(k)] = (\mathbf{C} - \mathbf{DR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}w(k) \quad (2.37)$$

Stabilitu procesu zajišťuje stavový regulátor \mathbf{R} , pro který matice dynamiky uzavřeného obvodu $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$ má všechna vlastní čísla ve stabilní oblasti, tedy pro diskrétní obvod je to uvnitř jednotkového kruhu. Volba umístění vlastních čísel při návrhu regulátoru \mathbf{R} je pro SISO systémy jednoznačná, což znamená n vlastních čísel, n prvků matice \mathbf{R} . Pro systémy MIMO je víceznačná.

Tedy u diskrétních regulačních obvodů je taková volba regulátoru \mathbf{R} , aby byl vliv poruch zcela eliminován již po n krocích, pro řízení v konečném a minimálním počtu kroků.

Simulace chování regulačního obvodu složeného ze spojité regulované soustavy, diskrétního estimátoru a stavového diskrétního regulátoru je na obrázku 3.2. Čerpáno z (Kupka, 2014).



Obrázek 3.2 – Estimátor a regulace

3.1 METODY NÁVRHU STAVOVÉHO REGULÁTORU

Regulátor ve zpětné vazbě ovlivňuje chování regulačního obvodu a kvalitu regulačních pochodů. Existuje několik metod návrhu stavového regulátoru, například: metoda umístění pólů přenosu uzavřeného obvodu nebo metoda minimalizace kvadratického kritéria.

Teoreticky lze návrhem stavového regulátoru ve zpětné vazbě měnit dynamiku uzavřeného obvodu libovolným způsobem. Smysl, že n parametry regulátoru lze libovolně měnit polohu n vlastních čísel matice dynamiky uzavřeného regulačního obvodu $\mathbf{M}_R - \mathbf{N}_R \mathbf{R}_R$. Ale prakticky jsme omezeni možnostmi reálných převodníků, akčních členů, rozsahem použitelných signálů a i robustností obvodu. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Robustnost je vlastně citlivost regulačního obvodu. Je to nejslabší místo stavové regulace. Robustnost souvisí s nepřesností matematického modelu a představuje citlivost na odchylku mezi jeho dynamickým chováním a chováním skutečné reálné soustavy. S rostoucími požadavky na rychlost regulačních pochodů a kvalitu regulace, se nároky na přesnost matematického modelu zvyšují. Metodou návrhu regulátoru a délkou regulačního kroku lze teoreticky libovolně zkracovat délku regulačního pochodu s tím, že ale hrozí nestabilní chování regulačního pochodu. Pokud ale zpomalíme regulační pochod, tak může naopak dojít k zvýšení robustnosti.

Požadavek nulové trvalé regulační odchylky zajistíme návrhem stavového regulátoru s respektováním rozšířené dynamiky regulované soustavy o astatický člen. Popsaným rozšířením jsme zajistili potřebný astatický charakter uzavřené regulační smyčky.

Návrhem stavového regulátoru ovlivňujeme jen jmenovatel obrazového přenosu celého obvodu, jeho čítenel na regulátoru vůbec nezávisí.

Přenosová funkce uzavřeného SISO regulačního obvodu je vyjádřena vztahem:

$$F(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{A}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{NR})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{NR})}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{NR})} \mathbf{N} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{C} \text{adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{NR})\mathbf{N} \quad (2.39)$$

Lze ukázat zajímavou skutečnost, že čítenel tohoto přenosu nezávisí v obecném případě vůbec na parametrech regulátoru. Dynamika uzavřeného regulačního obvodu je proto jednoznačně určena pouze rozložením kořenů jmenovatele přenosu (charakteristického polynomu), tedy vlastních čísel jeho systémové matice $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$. Jejich rozložení v Gaussově rovině určujeme při návrhu regulátoru buď přímo řešením Ackermannovy formule (poles placement) nebo nepřímo prostřednictvím návrhu podle minima kvadratické regulační plochy.

„Nejtvrdějším“ možným regulátorem je regulátor operující v konečném a minimálním počtu kroků regulace, který odpovídá volbě nulových všech vlastních čísel matice $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$. Naopak „nejměkčího“ regulátoru dosáhneme volbou vlastních čísel matice $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$ shodných s vlastními čísly matice \mathbf{M} s tím, že její vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ (které jsme získali rozšířením dynamiky obvodu o astatickou složku) nahradíme vlastním číslem nulovým. Přizpůsobíme tak dynamiku celého uzavřeného regulačního obvodu, přesně přirozené dynamice regulované soustavy. Pokud bychom tuto záměnu neprovedli, dostaneme nutně regulátor nulový. Regulační pochod s takto navrženým regulátorem spočívá v jediném vhodném akčním zásahu (změně akční veličiny) na jeho začátku a následně volné reakci regulované soustavy bez jakýchkoliv korekčních zásahů v následujících krocích. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

3.1.1 Normalizace stavového popisu

Nevyváženost stavového popisu neovlivňuje teoreticky kvalitu, ani robustnost regulačního obvodu, ale může se projevat v reálné aplikaci významnou odchylkou chování skutečného obvodu od chování teoretického. Může se stát, že vzhledem k technické realizaci regulátoru a zaokrouhlovacím chybám bude tento algoritmus nepřijatelný. Zaokrouhlovací chyby při výpočtu se sníženou přesností můžou znehodnocovat řídicí algoritmus a vedly by k numerické nestabilitě celého obvodu. Tyto okolnosti mohou být příčinou velmi malé robustnosti regulační smyčky. Jednoduchý princip odstranění tohoto nedostatku je normalizace euklidovské normy stavového vektoru regulované soustavy. Jednotlivé stavové složky normujeme prostým dělením jejich odhadnutou maximální hodnotou. Přizpůsobíme tak v podstatě jen jejich měřítkové faktory a normalizujeme bázi stavového vyjádření. Technicky toho dosáhneme jednoduchou lineární transformací původního stavového vyjádření.

3.1.2 Vliv periody vzorkování

Perioda vzorkování obecně ovlivňuje nejen rychlost a délku regulačního pochodu, ale i informační obsah navzorkovaného spojitého signálu. Ovlivňuje i robustnost uzavřeného regulačního obvodu. Podle Shannonova teorému je nutné volit vzorkovací frekvenci alespoň dvakrát vyšší než je nejvyšší frekvence systému. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

3.1.3 Vliv nastavení regulátoru

Existují dvě extrémní varianty nastavení stavového regulátoru. Jednou z nich je extrémně tvrdý regulátor, zajišťující v referenčním případě regulační pochod v konečném počtu

regulačních kroků bez kmitavých složek. Jeho návrh je realizován volbou nulových všech vlastních čísel systémové matice uzavřeného obvodu. Druhým extrémem je extrémně měkký regulátor, realizovaný volbou vlastních čísel systémové matice uzavřeného obvodu shodných s vlastními čísly matice dynamiky regulované soustavy. Regulační pochod je v referenčním případě realizován jediným optimálním akčním zásahem s volným dozríváním reakce podle přirozené dynamiky regulované soustavy. Také se můžeme velmi rychle dostat v odchýlených situacích do nestability regulačního obvodu. Důsledek, že v návrhu regulátoru touto volbou vlastních čísel nutíme obvodu aperiodický průběh, který regulátor v odchýlených situacích se slábnoucí silou zpětné vazby není schopen zajistit. Čerpáno z (Slapnička, 2010).

S ohledem na robustnost obvodu je mnohem rozumnější netrvat na aperiodickém charakteru regulačních pochodů a přizpůsobit návrh regulátoru přirozené dynamice regulované soustavy. Vhodnou strategií je například návrh regulátoru minimalizaci kvadratického kritéria, která se zvyšující se vahou na akční veličinu k této dynamice konverguje.

3.2 NÁVRH REGULÁTORU V KONEČNÉM POČTU REGULÁČNÍCH KROKŮ

Při návrhu regulátoru končí regulační pochody v konečném čase. Jsou generovány obrovské akční zásahy, regulace bývá rychlá. Obvykle je počet kroků úměrný řádu soustavy, což je v praxi obtížně realizovatelné. Navržený regulátor vykazuje nízkou robustnost a již malá změna na soustavě může vést k nestabilitě. Výhodou návrhu je jednoduchost.

Princip návrhu:

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{M} + \mathbf{NR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{Nw}(k) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{C} - \mathbf{DR})\mathbf{x}(k) + \mathbf{Dw}(k) \quad (2.41)$$

V předchozí rovnici uvažujeme regulaci v záporné zpětné vazbě, proto vzniklo mínus

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &\neq 0 & \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{x}(1) &= (\mathbf{M} - \mathbf{NR})\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= (\mathbf{M} - \mathbf{NR})\mathbf{x}(1) = (\mathbf{M} - \mathbf{NR})^2\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(n) &= (\mathbf{M} - \mathbf{NR})^n\mathbf{x}(0) = \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{Nu}(k)$$

$$\mathbf{x}(k + 2) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k + 1) + \mathbf{Nu}(k + 1) = \mathbf{M}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{MNu}(k) + \mathbf{Nu}(k + 1)$$

⋮

$$\mathbf{x}(k+N) = \mathbf{M}^n \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}^{n-1} \mathbf{N} \mathbf{u}(k) + \mathbf{M}^{n-2} \mathbf{N} \mathbf{u}(k+1) + \dots + \mathbf{M} \mathbf{N} \mathbf{u}(k+n-2) + \mathbf{M}^0 \mathbf{N} \mathbf{u}(k+n-1)$$

$$\mathbf{x}(k+N) = \mathbf{M}^n \mathbf{x}(k) + [\mathbf{N}, \mathbf{M}\mathbf{N}, \dots, \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k+n-1) \\ \mathbf{u}(k+n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$[\mathbf{N}, \mathbf{M}\mathbf{N}, \dots, \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N}]$ se nazývá matice říditelnosti a označuje se písmenem \mathbf{G} . Jestliže se jedná o systém SISO a návrh řízení v konečném počtu regulačních kroků, dostaneme:

$$\mathbf{M}^n \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k+n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.43)$$

Je-li systém říditelný, matice \mathbf{G} je regulární a můžeme jednoduše vyjádřit celou sekvenci akční veličiny v jednotlivých krocích pochodu.

Upravíme a vyjádříme $\mathbf{u}(k)$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k+n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}^n \mathbf{x}(k) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u}(k) = -[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}^n \mathbf{x}(k) \quad (2.45)$$

Jestliže $\mathbf{u}(k) = \mathbf{R} \mathbf{x}(k)$, bude matice regulátoru.

$$\mathbf{R} = -[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}^n \quad (2.46)$$

Čerpáno z (Kupka, 2014).

3.2.1 Ackermanova formule

Systémy **SISO**:

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}^n + a_{n-1} \mathbf{M}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{M} + a_0 \mathbf{E} \quad (2.67)$$

$$\Delta \lambda = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.48)$$

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ volíme.

$$\mathbf{R} = -[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{G}^{-1} \Delta(\mathbf{M}) \quad (2.49)$$

Systémy **MIMO**:

$$\mathbf{R} = -[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \mathbf{E}] \mathbf{G}^{-1} \Delta(\mathbf{M}) \quad (2.50)$$

\mathbf{E} je jednotková matice

Pomocí \mathbf{R} lze ovlivnit všechna vlastní čísla.

\mathbf{G} - obecně není čtvercová

\mathbf{G}^{-1} - čtvercová matice získaná výběrem n lineárně nezávislých sloupců matice \mathbf{G}

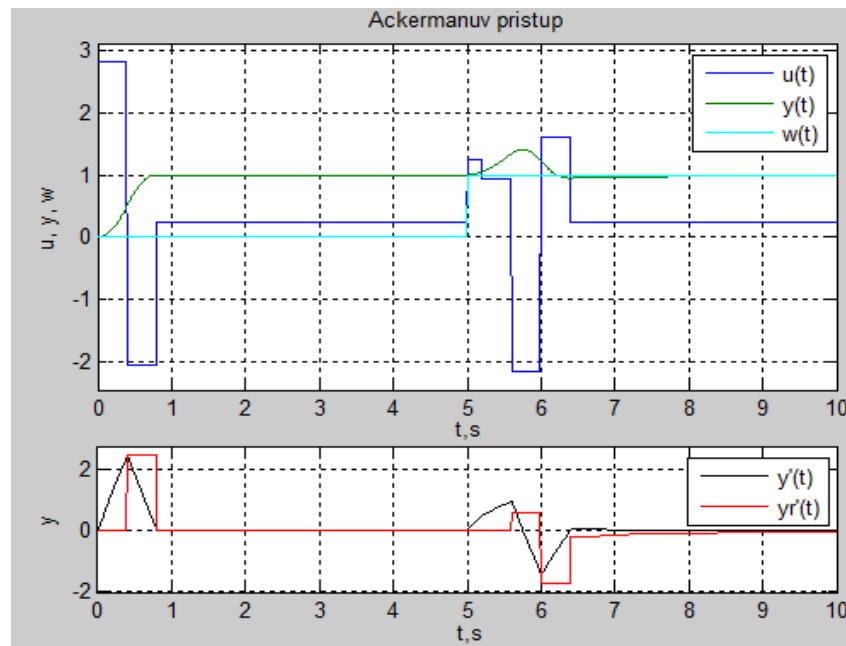
Řešení není v tomto případě jednoznačné. Konečný počet kroků regulace se dá zajistit různými způsoby.

V Matlabu slouží k výpočtu regulátoru funkce „acker“. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Uvažujme stejný systém jako v odstavci 2.4 a vyjádřeme opět matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0], \mathbf{D} = 0$$

Nyní použijí schéma zapojení v Simulinku, které je na obrázku 3.2. Výsledný průběh, je vidět na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3 – Ackermanův přístup

3.3 NÁVRH REGULÁTORU PODLE KVADRATICKÉHO KRITERIA

Toto kritérium se využívá velmi často. Pracuje s hodnotami součtu druhých mocnin odchylek stavových a akčních veličin v konečném počtu n regulačních intervalů. Aby hodnota dobře vystihovala celý průběh regulačního procesu, musí být použit dostatečně velký počet krokovacích intervalů vyvolaných určitým počátečním stavem $x(0)$.

V tomto návrhu se využívá Riccatiho rovnice pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem. Důvodem je najít posloupnost regulačních, neboli akčních zásahů, ze kterých se z libovolného stavu ve stavovém prostoru, dostaneme do počátku v minimálním počtu kroků.

Kvadratické kritérium představuje způsob vyjádření kvality regulačního pochodu. Patří do třídy tzv. integrálních kritérií, které pro diskrétně pracující regulační obvody jsou nahrazeny součtem kvadrátů regulované a akční veličiny. Čerpáno z (Balátě, 2004).

Pro stavové regulační obvody je kritérium obecně rozšířeno i o penalizaci všech složek stavového vektoru. Kvalita regulačního pochodu je často posouzena pouze na konečném časovém intervalu, na kterém dojde k ustálení reakce obvodu. Obecný tvar kvadratického kritéria lze psát ve tvaru:

$$J = \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{x}^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j) + \mathbf{u}^T(j) \mathbf{L} \mathbf{u}(j) + \mathbf{x}^T(N) \mathbf{P} \mathbf{x}(N)) \quad (2.51)$$

Analytické vyjádření a optimalizace tohoto kritéria bylo historicky vytvořeno matematickými metodami.

\mathbf{Q} , \mathbf{L} , \mathbf{P} jsou symetrické, pozitivně definitní matice, to znamená, že vlastní čísla jsou kladná. Matice \mathbf{L} je pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO) skalárem, má tedy pouze jeden řádek a jeden sloupec. Při návrhu regulátoru volíme váhové matice \mathbf{Q} , \mathbf{L} , \mathbf{P} a ovlivňujeme tak rychlost a kvalitu regulačních pochodů.

Pro návrh regulátoru lze využít prostředí Matlab, konkrétně funkci *dlqr*, která úlohu řeší podle obecnějšího kritéria:

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j) + \mathbf{u}^T(j) \mathbf{L} \mathbf{u}(j) + 2\mathbf{x}^T(j) \mathbf{P} \mathbf{u}(j)) \quad (2.52)$$

Tato rovnice se musí minimalizovat. Čerpáno z (Kupka, 2014).

Kvadratické kritérium jakosti regulace dává regulační pochody teoreticky vždy nekonečně dlouhé a to i v případě, že horní hranice je v součtu nekonečná. Žádá-li se ustálení v konečné době, lze použít upravený funkcionál. Čerpáno z (Balátě, 2004).

3.3.1 Riccatiho rovnice

Pro systémy SISO. Hledáme posloupnost regulačních akčních zásahů, pomocí kterých se z libovolného stavového prostoru dostaneme do jeho počátku v minimálním počtu kroků.

$$J = \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{x}_j^T \cdot \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{L} \mathbf{u}_j) + \mathbf{x}_N^T \cdot \mathbf{P}_N \cdot \mathbf{x}_N \quad (2.53)$$

\mathbf{Q} , \mathbf{L} – symetrická pozitivně definitivní (v každé symetrické matici jsou její vlastní čísla kladná)

Regulátor:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_j^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{M} = -(\mathbf{L} + \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{M} \quad (2.54)$$

Riccatiho rovnice:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{Q} + \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{G}_j^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P}_{j+1} \cdot \mathbf{M} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}\mathbf{x}(k) \quad (2.56)$$

a) Tvrdý regulátor (bez penalizace) – příklad volby matic

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = [0] \quad \mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{L} ... bez penalizace $\mathbf{u} = (0)$

\mathbf{P}_N ... volíme velké číslo, aby došlo k rychlému zklidnění regulačního pochodu

$$\mathbf{J} = \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{x}_3^2(j) + 100\mathbf{x}_2(N)) \rightarrow \text{MIN} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{x}_2(k) = \mathbf{y}(k) \quad (2.58)$$

b) Měkký regulátor (s výraznou penalizací) – příklad volby matic

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = [1] \quad \mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

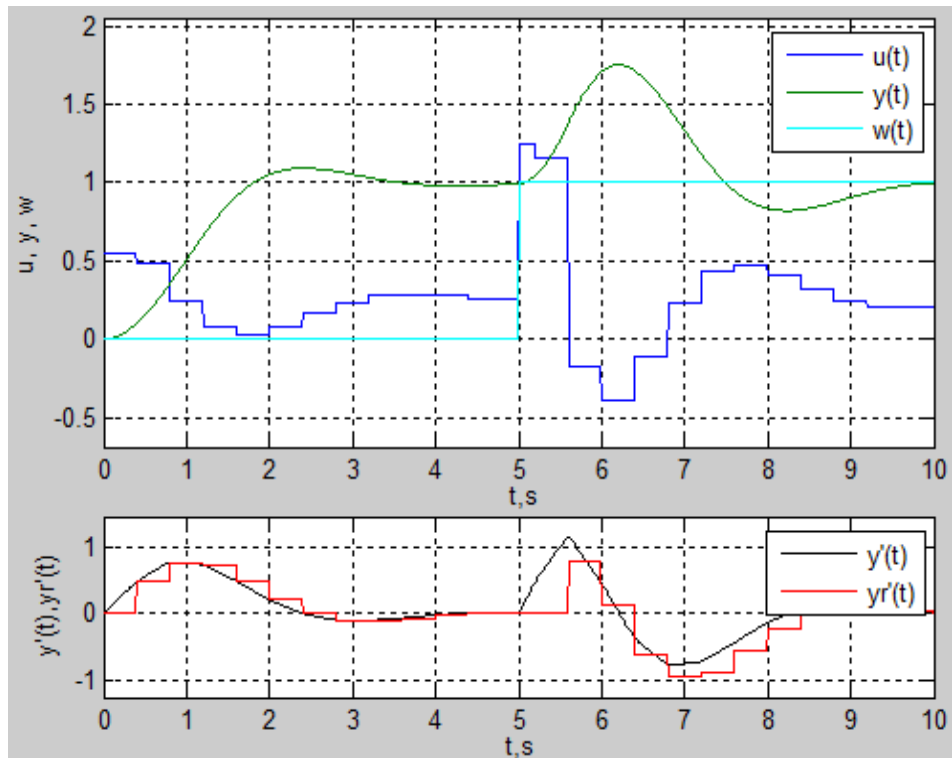
$$\mathbf{J} = \sum_{j=1}^{N-1} [\mathbf{x}_3^2(j) + \mathbf{u}^2(j)] + 100\mathbf{x}_2(N) \rightarrow \text{MIN} \quad (2.59)$$

Čerpáno z (Kupka, 2014).

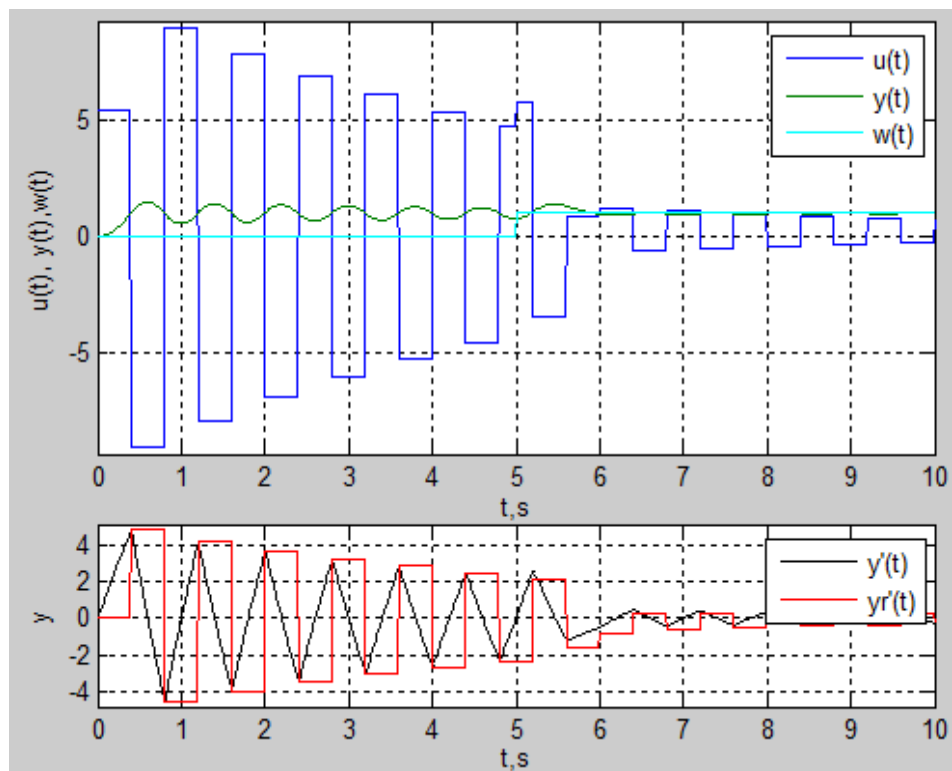
Pokud budu mít opět takto zadanou soustavu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2,5}{s^2 + 0,5s + 0,6}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = 0$$

Nyní použijí schéma zapojení, které je uvedeno na obrázku 3.2. Pro měkký regulátor s penalizací dostanu výsledný průběh, který je na obrázku 3.4 a pro tvrdý regulátor bez penalizace dostanu výsledný průběh, který je na obrázku 3.4

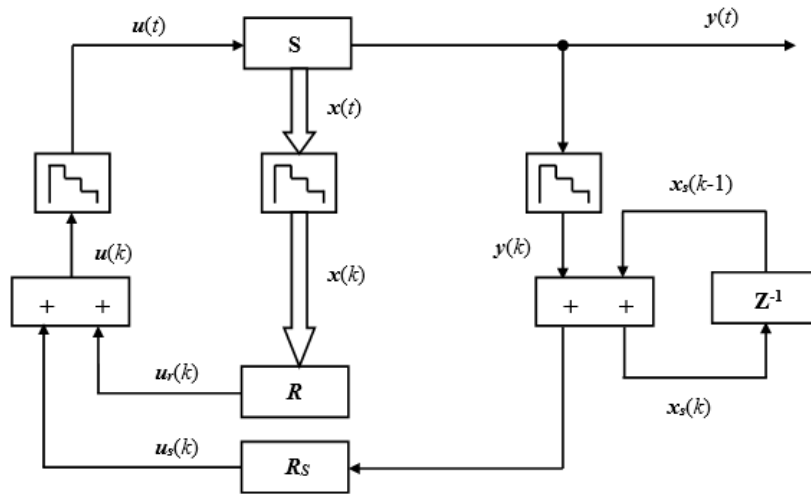


Obrázek 3.4 – Měkký regulátor



Obrázek 3.5 – Tvrdý regulátor

3.4 POPIS REGULAČNÍHO OBVODU S ASTATICKÝM ČLEMEM



Obrázek 3.6 - Stavový regulační obvod s astatickým členem

Nevýhodou stavového regulačního obvodu je, že nedokáže zcela eliminovat vnější poruchy. Podobně, jako v obyčejném regulačním obvodu s proporcionálním regulátorem, zůstává po odeznění přechodového děje trvalá regulační odchylka. Proto zavádíme astatický člen, který ji eliminuje. Zavedený astatický člen chápeme jako součást regulované soustavy. Tento člen dynamiku rozšiřuje a zvyšuje její řád.

$$\dot{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \text{ – ryze dynamický systém SISO} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.61)$$

Pro jednoduchost uvažujeme pouze regulované soustavy ryze dynamické, pro které je $\mathbf{D} = 0$.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{x}_s(k) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{x}_s(k-1) \quad (2.64)$$

Převodní indikace:

$$\mathbf{x}_s(k+1) = \mathbf{y}(k+1) + \mathbf{x}_s(k) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{N}\mathbf{u}(k) + \mathbf{x}_s(k) \quad (2.65)$$

$$\text{SR: } \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{C}\mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (2.66)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{C}\mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}_R = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \quad (2.70)$$

Tvar stavového popisu rozšířené dynamiky regulované soustavy:

$$\mathbf{X}_R(k+1) = \mathbf{M}_R \cdot \mathbf{X}_R(k) + \mathbf{N}_R \mathbf{u}(k) \quad (2.71)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{X}_R \quad (2.72)$$

\mathbf{X}_R – rozšířený stavový vektor o astatickou stavovou složku

Ackermanova formule – rozšířená matice říditelnosti:

$$\mathbf{R}_R = [\mathbf{R} \quad \mathbf{R}_S] = -[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1} \Delta(\mathbf{M}_R) \quad (2.73)$$

$$\mathbf{G}_R = [\mathbf{N}_R \ \mathbf{M}_R \ \mathbf{N}_R \ \dots \ \mathbf{M}_R^{n-1} \ \mathbf{N}_R] \quad (2.74)$$

$$\text{KPK: } \Delta(\mathbf{M}_R) = \mathbf{M}_R^{n+1} \quad (2.75)$$

Vlivem astatického členu je regulátor schopen regulovat na nulovou regulační odchylku na rozdíl od klasického stavového regulátoru. Čerpáno z (Kupka, 2014).

4 SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU SE STAVOVÝM REGULÁTOREM

Jedním z hlavních cílů této práce je navrhnout a ověřit regulační obvod se stavovým regulátorem. Za tímto účelem předpokládáme využití programu MATLAB a Simulink.

4.1 MATLAB SKRIPT

Nejdůležitější částí celé aplikace je Matlab skript. Pro výpočet estimátoru a stavového regulátoru je nutné zadat matice A , B , C a D a vzorkovací periodu T_S . Pomocí skriptu se musí dále převést spojitý stavový popis do diskretní podoby ve tvaru (1.7) a (1.8).

Neznámé matice M a N je potřeba vypočítat z matic A , B a vzorkovací periody T_S . M a N se vypočítají pomocí vztahů.

$$M = e^{AT}, N = A^{-1}(M - E)B \quad (3.3)$$

Příkazy v Matlabu:

`M=expm(A*T);`

Pro diskretní estimátor je rovnice

$$x(k + 1) = M_E \cdot x(k) + N_E \cdot u(k) + H_E \cdot y(k) \quad (3.4)$$

V této rovnici jsou neznámé M_E , N_E a H_E . K jejich určení je nutné nejprve určit Q . Poté, co se získá Q , tak lze dopočítat M_E , N_E a H_E z těchto vzorců:

$$M_E = M_{22} - QM_{12}; N_E = N_2 - QN_1 \quad (3.5)$$

$$H_E = M_{21} + QM_{22} - QM_1 - QM_{12}Q \quad (3.4)$$

Jedná se o systém druhého řádu, tedy jde o konkrétní příklad.

Příkazy v Matlabu:

`He=M(2,1)+M(2,2)*Q-Q*M(1,1)-Q*M(1,2)*Q;`

`Me=M(2,2)-Q*M(1,2);`

`Ne=N(2)-Q*N(1);`

Pro výpočet hodnot stavového regulátoru je převeden diskretní stavový popis na rozšířený diskretní stavový popis.

Hodnoty M_R , N_R a C_R jsou počítány ve skriptu takto:

`Mr=[M E;C*M 1];`

`Nr=[N;C*N];`

$C_r = [C \ 0]$

Pokud jsou spočítány tyto hodnoty, tak lze spočítat hodnotu vektoru G_R , kde jeho první složka je rovna N_R , druhá se spočítá $M_R \cdot N_R$ a třetí hodnota se spočítá $M_R^2 \cdot N_R$. Výpočet je zapsán následovně: $G_r = [N_r \ M_r \cdot N_r \ M_r^2 \cdot N_r]$.

Hodnoty pro měkký regulátor $L = 0$, tvrdý regulátor $L = 1$ a hodnoty matic Q_1 a P , které jsou připravené pro výpočet stavového regulátoru pomocí kvadratického kritéria. Matice Q_1 je definována: $Q_1 = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$ a matice P takto: $P = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 100 \ 0; 0 \ 0 \ 0]$.

4.2 POPIS A ZDŮVODNĚNÍ ZVOLENÉHO ZPŮSOBU ŘEŠENÍ

Tato kapitola bude popisovat, jakým způsobem byl v Simulinku implementován vlastní stavový regulátor s estimátorem.

Postupy odvozené v teoretické části budou aplikovány na dvě různé laboratorní soustavy. Uvedena je identifikace první soustavy motor – generátor s pevnou spojkou, u druhé soustavy motor – generátor s pružnou spojkou byl přenos identifikován obdobným způsobem. V praktické části bude realizováno diskrétní stavové řízení soustavy motor – generátor s pevnou spojkou (normovaný přenos druhého řádu) a s pružnou spojkou (přenos čtvrtého řádu). U obou případů je zkoumán vliv šumu působícího na výstupu soustavy na průběh regulace. Obě soustavy jsou vlastně nelineární, což je vidět na jejich statických charakteristikách. Vybrána je vždy pak jen část z celého pracovního rozsahu tak, aby volba pracovního bodu byla v lineární oblasti.

Soustava motor – generátor s pevnou spojkou je nekmitavá soustava s malou dobou průtahu. Pro aproximaci lze volit systém prvního řádu, ale lepší je systém druhého řádu s reálnými kořeny, což vyplývá z matematicko-fyzikální analýzy. Soustava motor – generátor s pružnou spojkou je soustava kmitavá, volíme tedy jiný model. Přenos čtvrtého řádu je obecnější, póly mohou být reálné a komplexní nebo jen komplexní, v čitateli je konstanta.

K měření na první soustavě byla použita karta NI USB-6009. Pomocí programu Measurement & Automation eXplorer byla nejprve ověřena funkčnost karty. Uvažoval jsem, že budou postupně čteny dva analogové vstupy a ovládány dva analogové výstupy karty. Karta je napájena prostřednictvím USB sběrnice, takže maximální napětí, které lze generovat na jejím výstupu je 5 V. Soustava motor – generátor s pevnou spojkou se ke kartě připojuje prostřednictvím terminálové desky a plochého kabelu. S kartou je tato soustava propojena přes vstup AI0 a výstup AO0. Vlastnosti karty, jako jsou napěťové rozsahy vstupů a výstupů, jsou v tabulce 4.1.

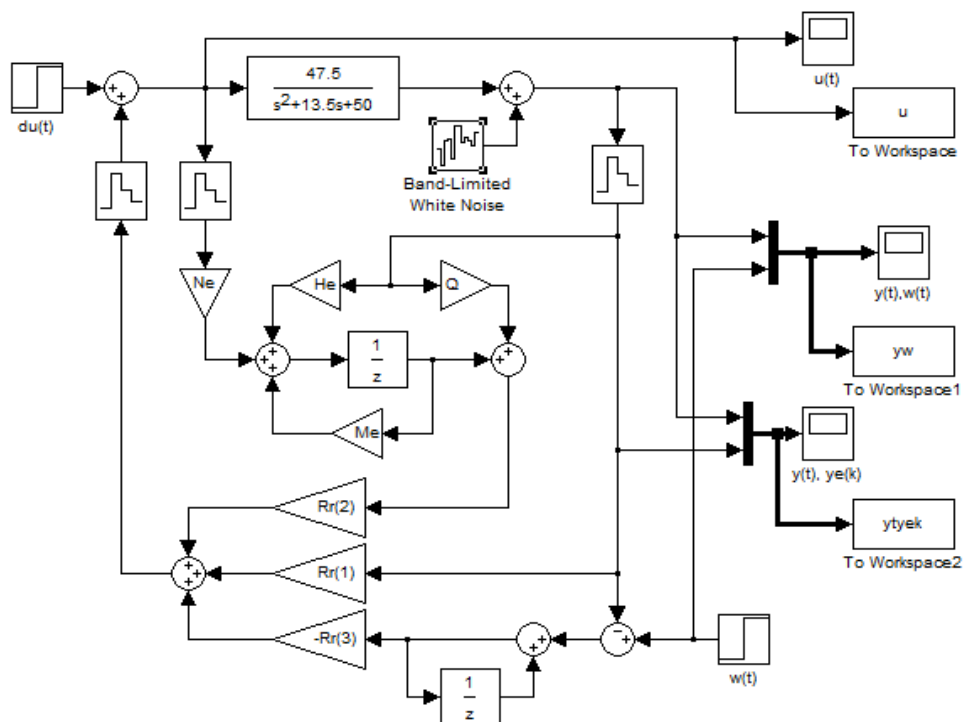
Tabulka 4.1 – Základní vlastnosti karty NI USB-6009

Typ	Počet	Vlastnosti	
AI	8 (SE)	14-bit, 48 kS/s impedance 144 kΩ	vstupní rozsah ± 10 V
	nebo 4 (diff)		vstupní rozsah ± 20 V, ± 10 V, ± 5 V, ± 4 V, ± 2.5 V, ± 2 V, ± 1.25 V, ± 1.0 V
AO	2	12-bit, max. 150 Hz (SW timed), 0 až 5 V, impedance 50 Ω, proud 5 mA	
DIO	8	(P0.0-7), CMOS, TTL, LVTTTL, každý kanál samostatně nastavitelný	
DIO	4	(P1.0-3), CMOS, TTL, LVTTTL, každý kanál samostatně nastavitelný	
counter	1	čítá náběžné/sestupné hrany, 32 bit, max. 5 MHz	
napájení		USB (4.10 – 5.25 VDC), typicky 80 mA, max. 500 mA	



Obrázek 4.1 – Měřicí karta NI USB-6009 jen pro analogové vstupy/výstupy

4.3 ŘÍZENÍ SOUSTAVY MOTOR – GENERATOR S PEVNOU SPOJKOU

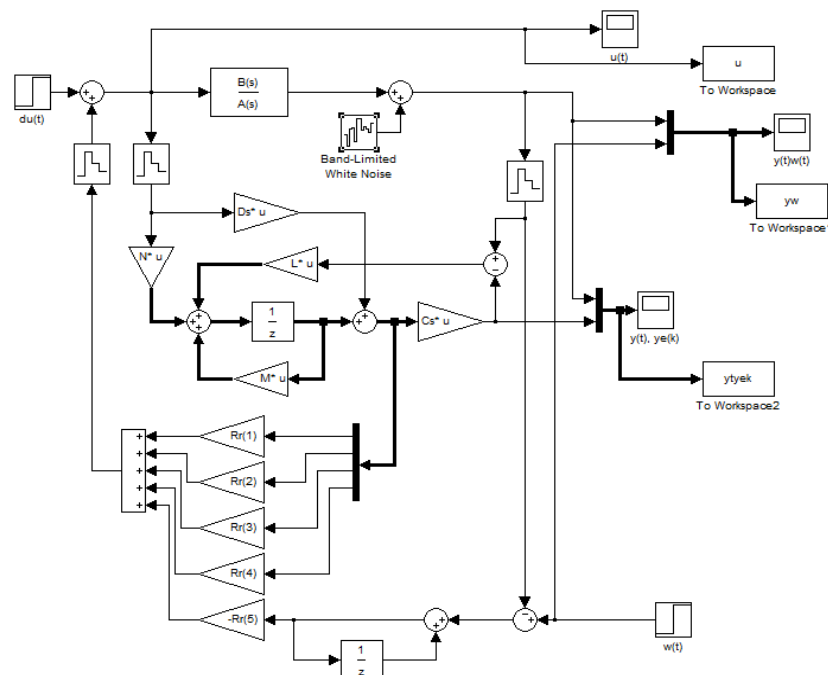


Obrázek 4.2 – Schéma simulace regulátoru s pevnou spojkou

Uvedené schéma, umožňuje simulaci řízení soustavy motor–generátor s pevnou spojkou a s diskretním stavovým regulátorem. Součástí regulačního obvodu je deterministický estimátor redukovaného řádu, který umožňuje odhad průběhu derivace regulované veličiny. Vycházíme z aproximace soustavy přenosem druhého řádu. Přenos je normovaný, aby u nejvyšší mocniny polynomu jmenovatele byl koeficient jedna. Přejít do stavového vyjádření lze realizovat pomocí funkce Matlabu `tf2ss`, ale problém je v tom, že výsledné matice neodpovídají Frobeniovým kanonickým tvarům. Také to lze realizovat přímým zadáním matic popisu. Diskretizaci spojitého stavového popisu provedeme výpočtem vztahů. Lze využít i zpětnou kontrolu pomocí příkazu `ss2tf`. Návrh estimátoru a regulátoru provedeme v Matlabu a k nalezení optimálních parametrů stavového regulátoru použijí příkaz `acker`. Při návrhu regulátoru v minimálním počtu kroků regulace je pouze nutné zvolit nulová vlastní čísla. Aby bylo dosaženo nulové regulační odchylky, bude navržen stavový regulátor s astatickým členem. Součástí jsou průběhy regulačních pochodů, které zajišťují optimální regulaci při změně žádané hodnoty a při působení poruchy na akční veličině.

4.4 ŘÍZENÍ SOUSTAVY MOTOR – GENERATOR S PRUŽNOU SPOJKOU

Uvedené schéma umožňuje simulaci řízení soustavy motor–generátor s pružnou spojkou a s diskretním stavovým regulátorem. Vycházím z aproximace soustavy systémem čtvrtého řádu. Estimátor je navržen pomocí funkce `acker` a je úplného řádu. Regulátor je navržený v minimálním počtu kroků a je též navržen pomocí funkce `acker`.



Obrázek 4.3 – Schéma simulace regulátoru s pevnou spojkou

5 DOSAŽENÉ VÝSLEDKY

V této práci je použit systém, který je nazván systém1:

Přenos soustavy motor – generátor s pevnou spojkou

$$\text{Normovaný přenos 2. řádu: } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,9507}{0,01759s^2 + 0,2653s + 1} = \frac{47,5}{1s^2 + 13,5s + 50}$$

Matice u tohoto systému vychází takto:

K výpočtu následujících parametrů diskrétního stavového regulátoru byl použit skript, viz příloha A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -13,5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 47,5 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \ 0), \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,5763 & 0,0503 \\ -2,5164 & -0,1031 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,4025 \\ 2,3906 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = -2,0494$$

$$\mathbf{H}_e = -1,3354, \mathbf{M}_e = 0, \mathbf{N}_e = 3,2155$$

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 0,5763 & 0,0503 & 0 \\ -2,5164 & -0,1031 & 0 \\ 0,5763 & 0,0503 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_r = \begin{pmatrix} 0,4025 \\ 2,3906 \\ 0,4025 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_r = (1 \ 0 \ 0), \mathbf{R}_r = (-1,2274 \ -0,1112 \ -1,7719)$$

Další systém je nazván systém2:

Přenos soustavy motor – generátor s pružnou spojkou

$$\text{Normovaný přenos 4. řádu } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3877}{s^4 + 74s^3 + 472s^2 + 1753s + 6418}$$

Matice u tohoto systému vychází takto

$$\mathbf{A} = (1 \ 74 \ 472 \ 1753 \ 6418),$$

$$\mathbf{B} = (3877)$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6418 & -1753 & -472 & -74 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s = [3877 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D_s = [0]$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,9262 & 0,1761 & 0,0134 & 0,0002 \\ -1,0476 & 0,6400 & 0,0991 & 0,0013 \\ -8,5114 & -3,3724 & 0,0140 & 0,0009 \\ -5,9299 & -10,1311 & -3,8085 & -0,0543 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0013 \\ 0,0009 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,0004 \\ 0,0001 \\ -0,0063 \\ 0,0019 \end{bmatrix}$$

$$M_E = \begin{bmatrix} -0,5997 & 0,1761 & 0,0134 & 0,0002 \\ -1,3869 & 0,6400 & 0,0991 & 0,0013 \\ 15,7593 & -3,3724 & 0,0140 & 0,0009 \\ -13,3967 & -10,1311 & -3,8085 & -0,0543 \end{bmatrix}$$

$$N_E = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0013 \\ 0,0009 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0,6 & 1 & 0 & 0 \\ -8,5 & -3,4 & 0 & 0 & 0 \\ -5,9 & -10,1 & -3,8 & -0,1 & 0 \\ 3590,7 & 68,28 & 52 & 0,6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_r = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0013 \\ 0,0009 \\ 0,0446 \end{bmatrix}$$

$$C_r = [3877 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

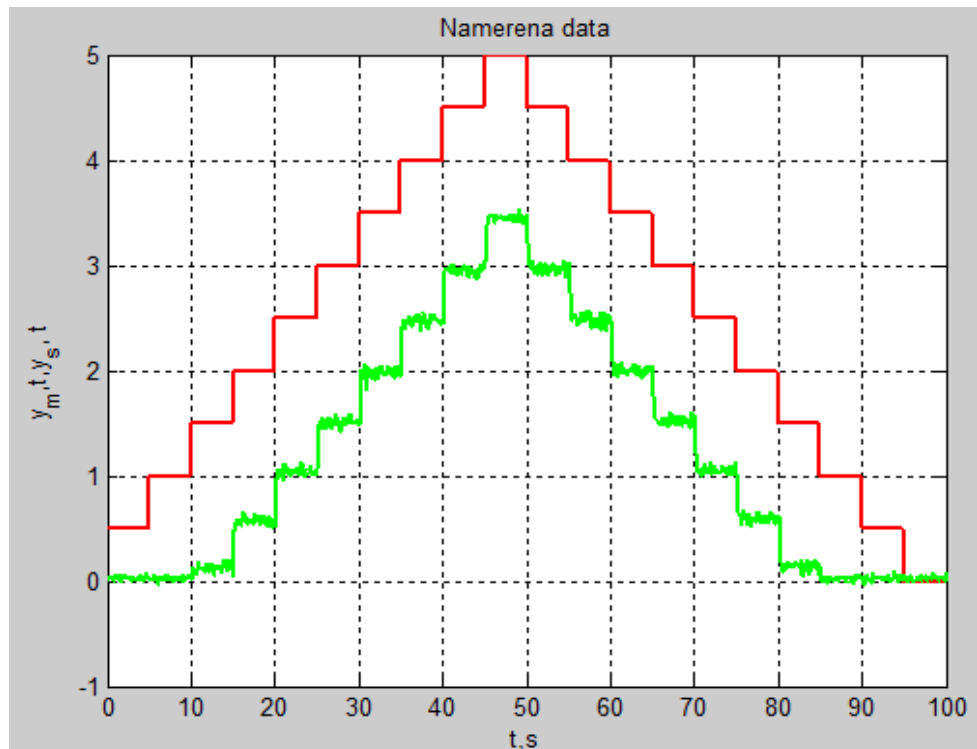
$$R_r = [-26002 \ -6842 \ -687 \ -9 \ -4]$$

Vzorkovací perioda pro oba systémy je $T_s = 0,2$ s.

5.1 VÝSLEDNÉ PRŮBĚHY

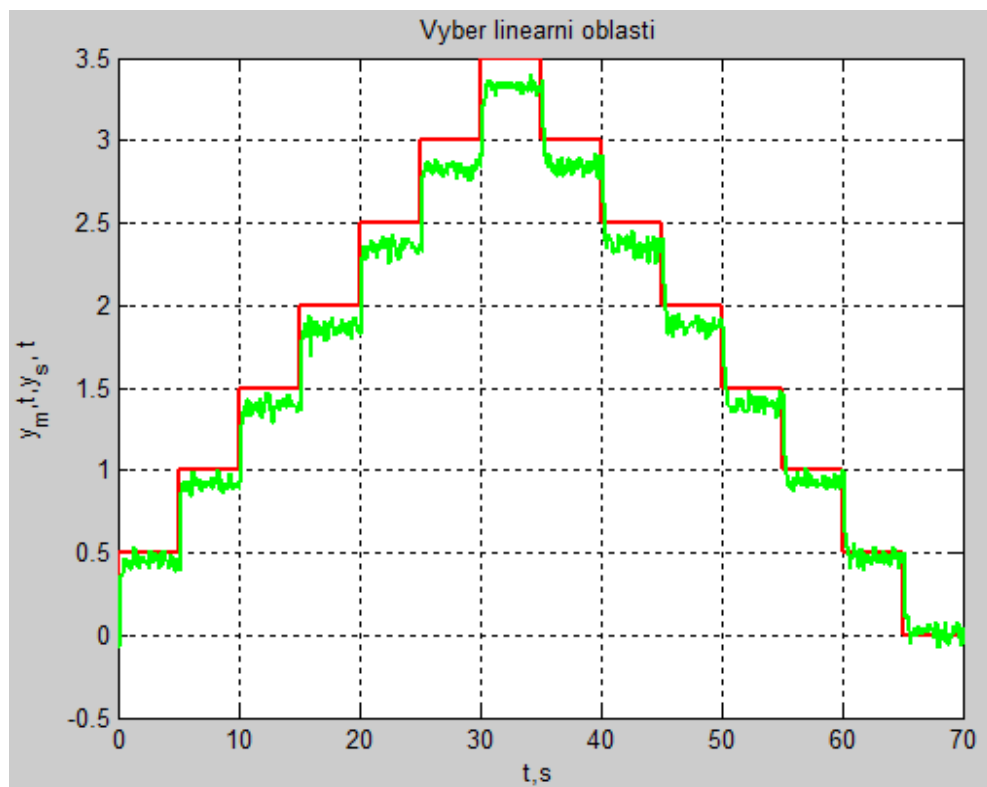
Tato kapitola zahrnuje výsledné průběhy pro soustavy motor – generátor s pevnou spojkou a motor – generátor s pružnou spojkou.

5.1.1 Systém1: Motor – generátor s pevnou spojkou



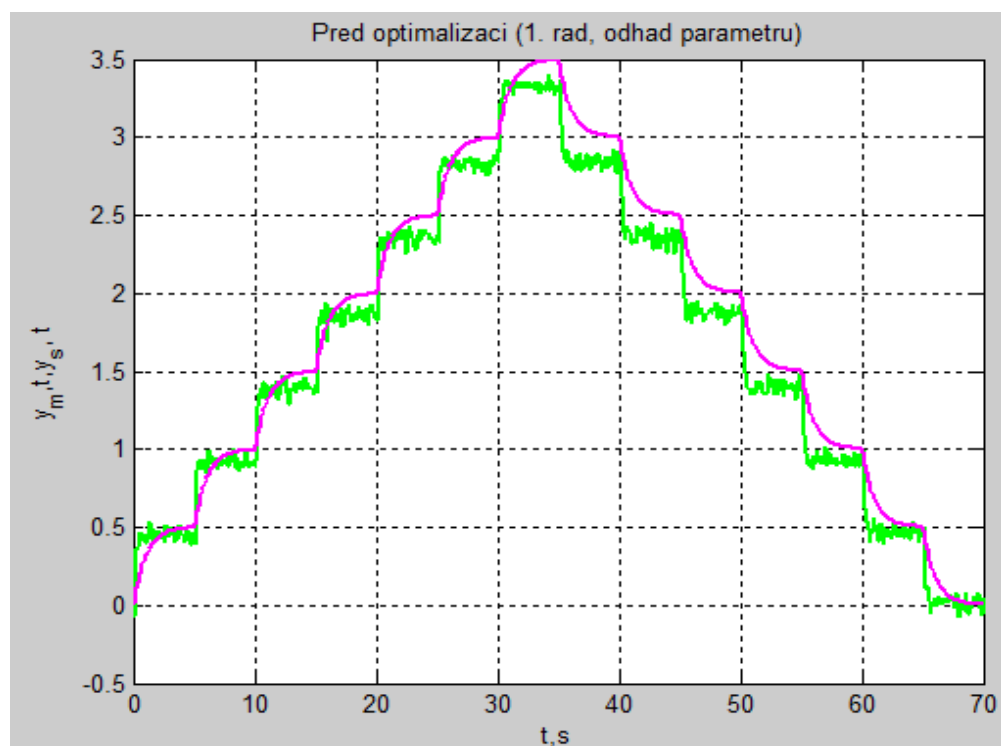
Obrázek 5.1 – Naměřená data pro soustavu motor – generátor s pevnou spojkou

Soustava motor – generátor s pevnou spojkou zjednodušeně aproximujte jednak přenosem prvního řádu a také přenosem druhého řádu s různými časovými konstantami. Uvažuj kvadratické kritérium, které představuje v tomto případě druhou mocninu rozdílu $e = y_m - y$. Pro identifikaci lineárním modelem je u soustavy motor – generátor nutné vybrat pouze data odpovídající lineární části statické charakteristiky. Soustava motor – generátor vykazuje v části rozsahu vstupního napětí nelineární chování. Statická charakteristika tohoto systému bude tedy lineární jen v určité oblasti, kterou je třeba zjistit. Je vhodnější rozdělit vstupní napěťový rozsah na více menších částí a vykonat sérii tomu odpovídajících skokových změn. Uvažovány byly skokové změny napětí po 0,5 V. K realizaci více následujících skokových změn je možno v Simulinku využít blok Repeating Sequence Stair. V bloku je nutné zadat vektor požadovaných hodnot skoků. Zadávají se požadované napěťové úrovně, nikoliv změny oproti předchozí hodnotě. Také je nutné prostřednictvím parametru sample time zadat dobu trvání skoků. Z naměřených dat stanovíme následně průběh statické charakteristiky.

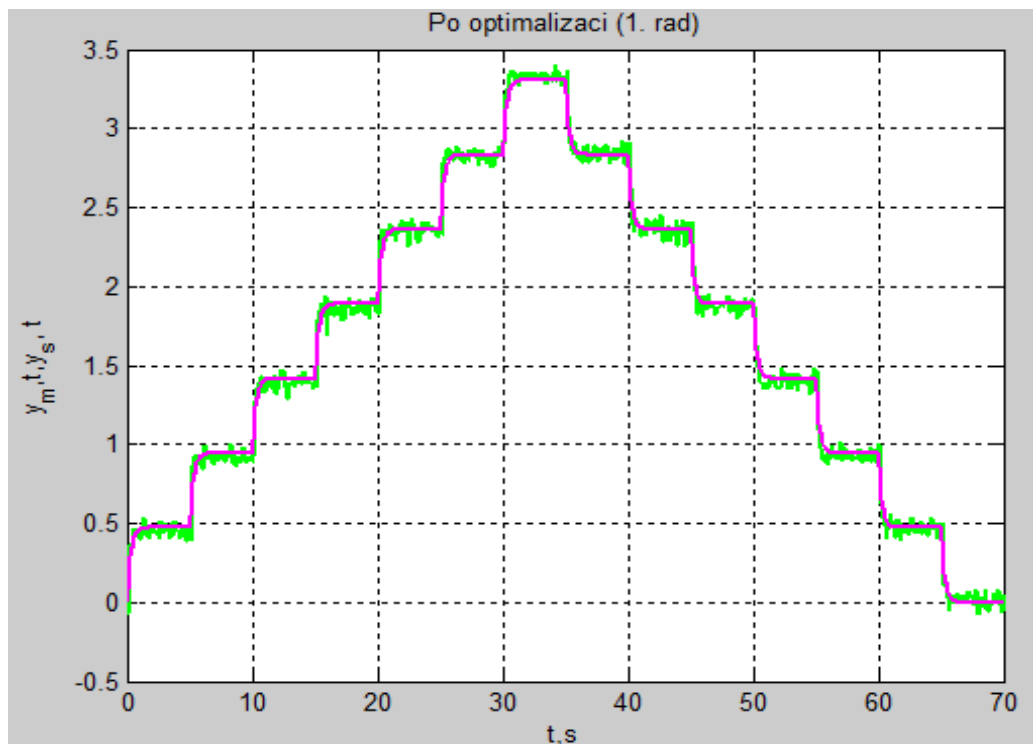


Obrázek 5.2 – Lineární oblasti statické charakteristiky

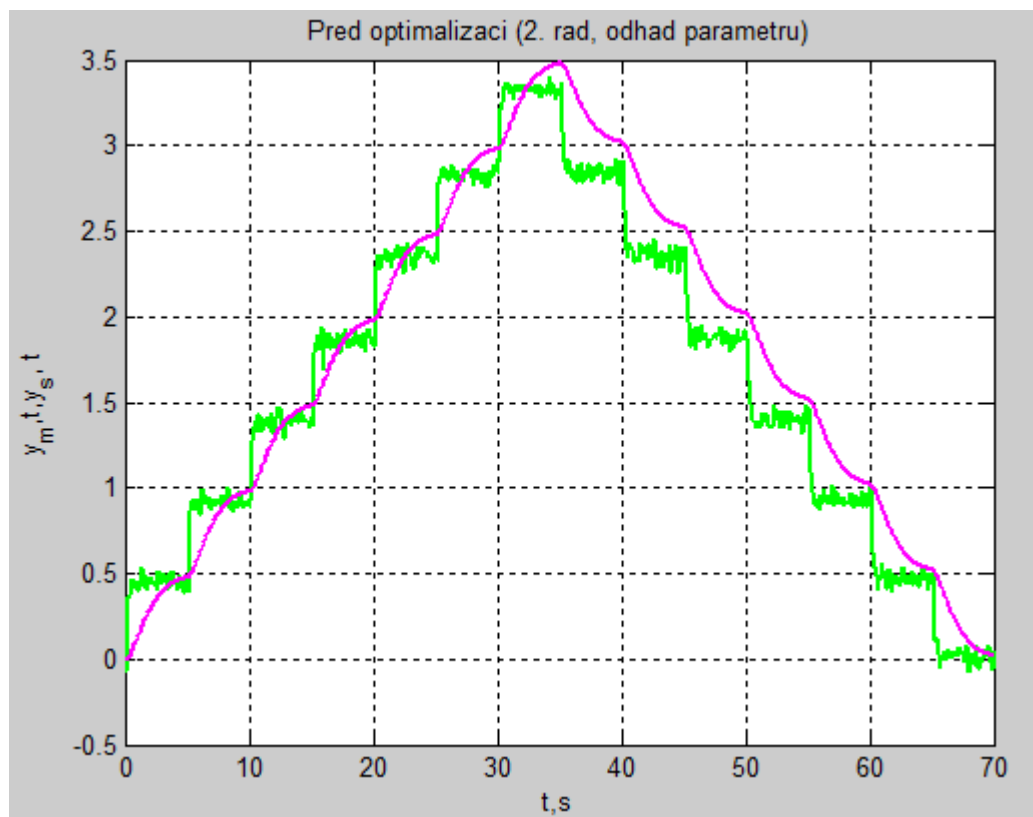
Součástí jsou nalezené aproximační přenosy. Pro soustavu motor – generátor aproximace přenosem prvního a druhého řádu.



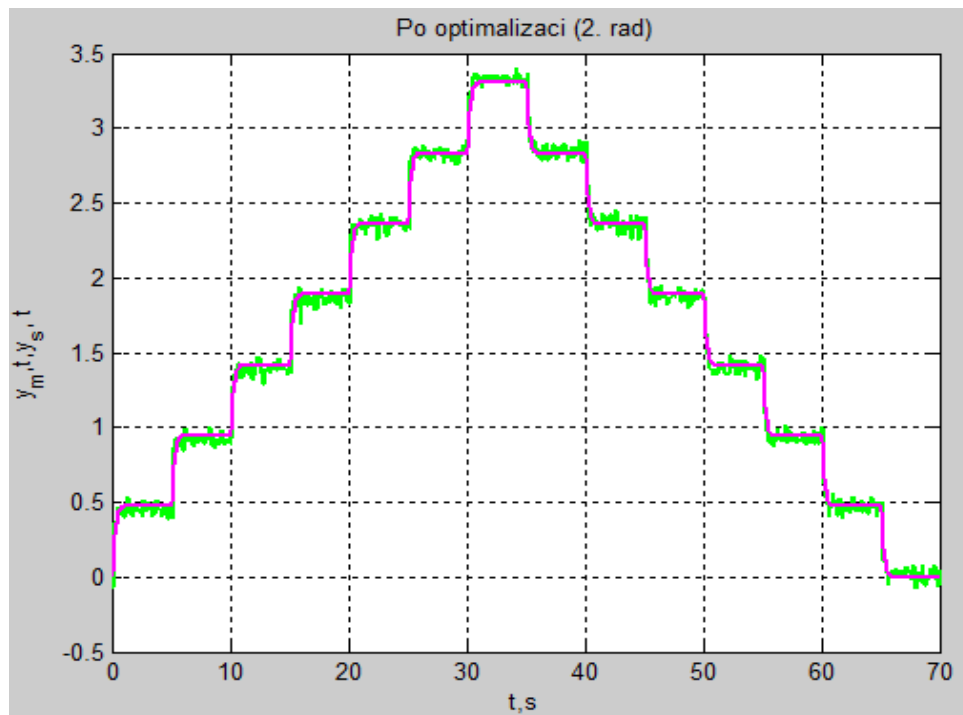
Obrázek 5.3 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou. S přenosem 1. řádu



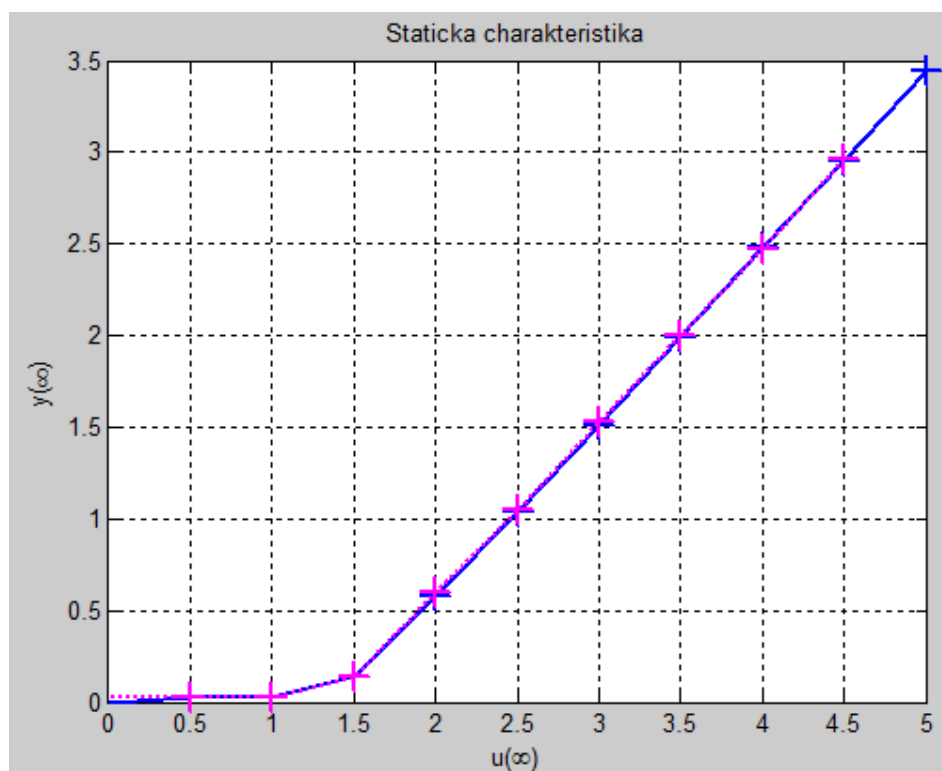
Obrázek 5.4 – Aproximace soustavy motor – generátor. S přenosem 1. řádu.



Obrázek 5.5 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou. S přenosem 2. řádu.



Obrázek 5.6 – Aproximace soustavy motor – generátor. S přenosem 2. řádu



Obrázek 5.7 – Statická charakteristika motor – generátor s pevnou spojkou

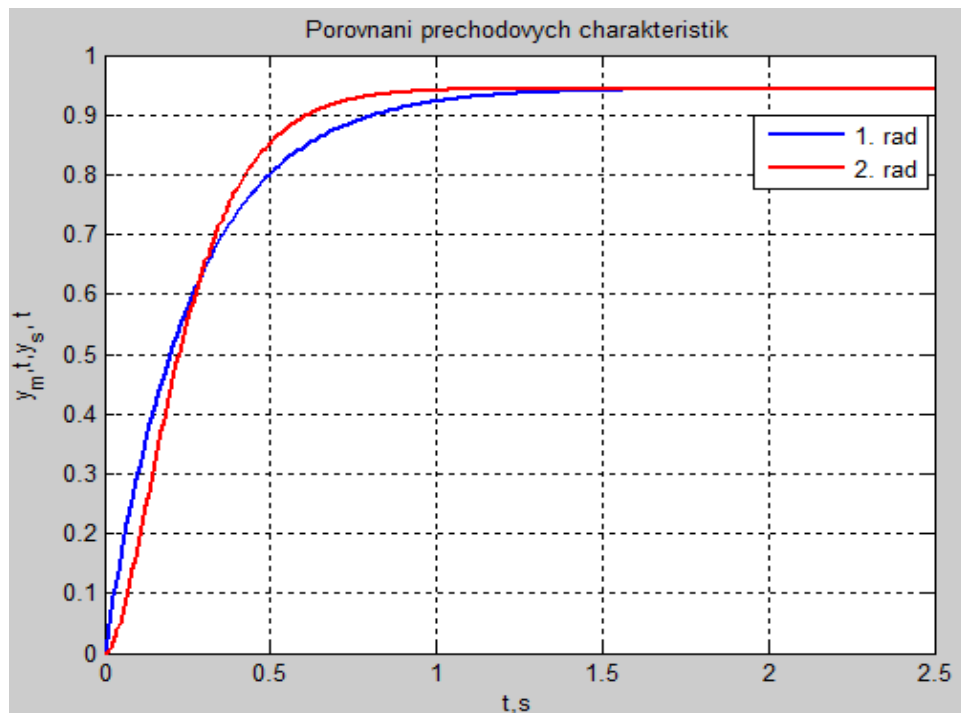
V grafu jsou naměřená data a pak pomocí skriptu stanovím ustálené hodnoty veličin $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$ pro každou skokovou změnu. Tyto hodnoty pak představují statickou charakteristiku systému. Ustálené hodnoty $u_i(\infty)$ jsou hodnoty jednotlivých napětí i -tého skoku, ustálené hodnoty $y_i(\infty)$ je vzhledem k šumovému signálu nutné stanovit jako střední hodnotu na vybraném časovém intervalu obvykle od okamžiku ustálení do vykonání dalšího skoku, občas stačí i kratší úsek. Je vhodné využít funkci Matlabu mean; výpočet pro všechny skoky je pak výhodné realizovat pomocí cyklu.

```
d=20/dt;
for i=1:5
y1(i) = mean(ym((2*i-1)*d:(2*i)*d));
u1(i) = um((2*i-1)*d);
end
y1 = [0 y1]; u1 = [0 u1];
```

Proměnné (vektory) y_1 a u_1 představují body statické charakteristiky – lze ji v tuto chvíli vykreslit.

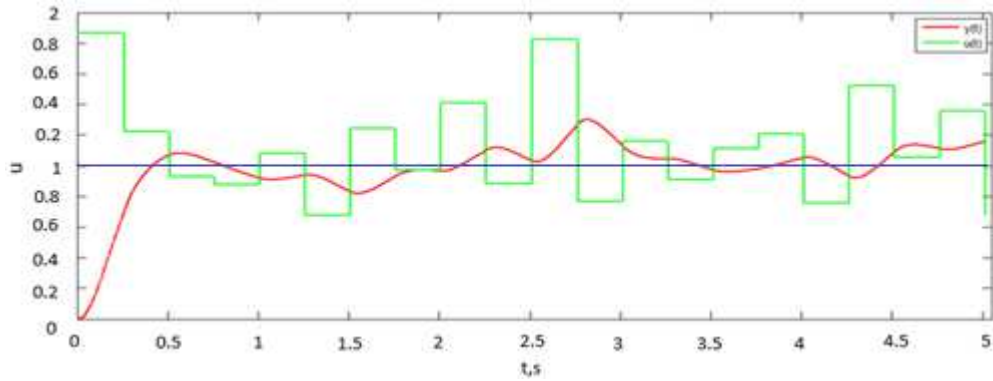
Statická charakteristika, která je z části nelineární, je na obrázku 5.19. Výpočet byl proveden pro všechny zaznamenané skoky, tedy pro skokově zvyšující se i snižující se napětí. Rozdíly v obou těchto charakteristikách jsou jen minimální.

Porovnání přechodových charakteristik obou nalezených aproximačních modelů

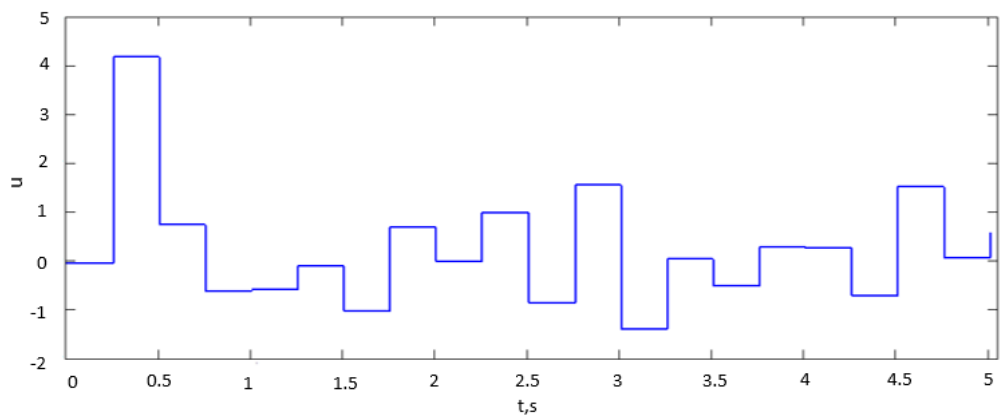


Obrázek 5.8 – Porovnání přechodových charakteristik aproximačních modelů

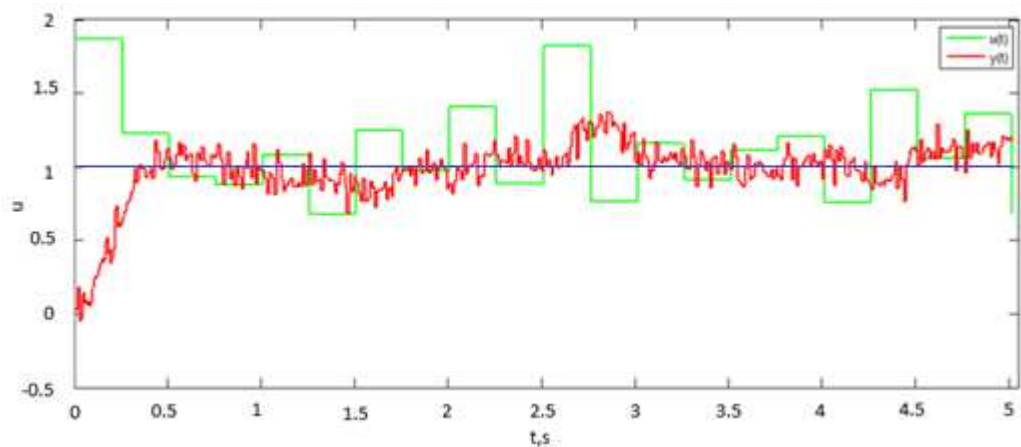
Průběhy estimované derivace regulované veličiny, simulace vlivu aditivního šumového signálu - různé úrovně na robustnost regulačních pochodů. Je sledován vliv signálu na průběh estimované derivace regulované veličiny.



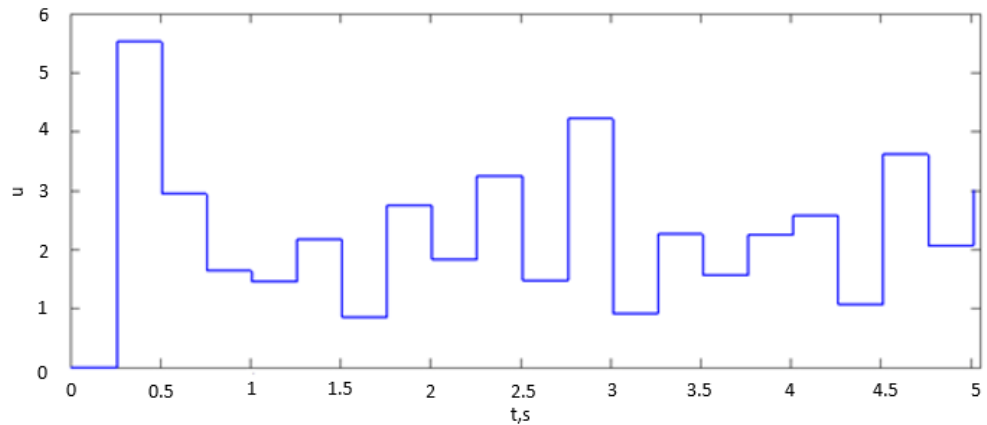
Obrázek 5.9 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou, přidaný šum nižší úrovně



Obrázek 5.10 – Průběh estimované derivace s přidaným šumem nižší úrovně



Obrázek 5.11 – Soustava motor – generátor s pevnou spojkou, přidaný šum vyšší úrovně

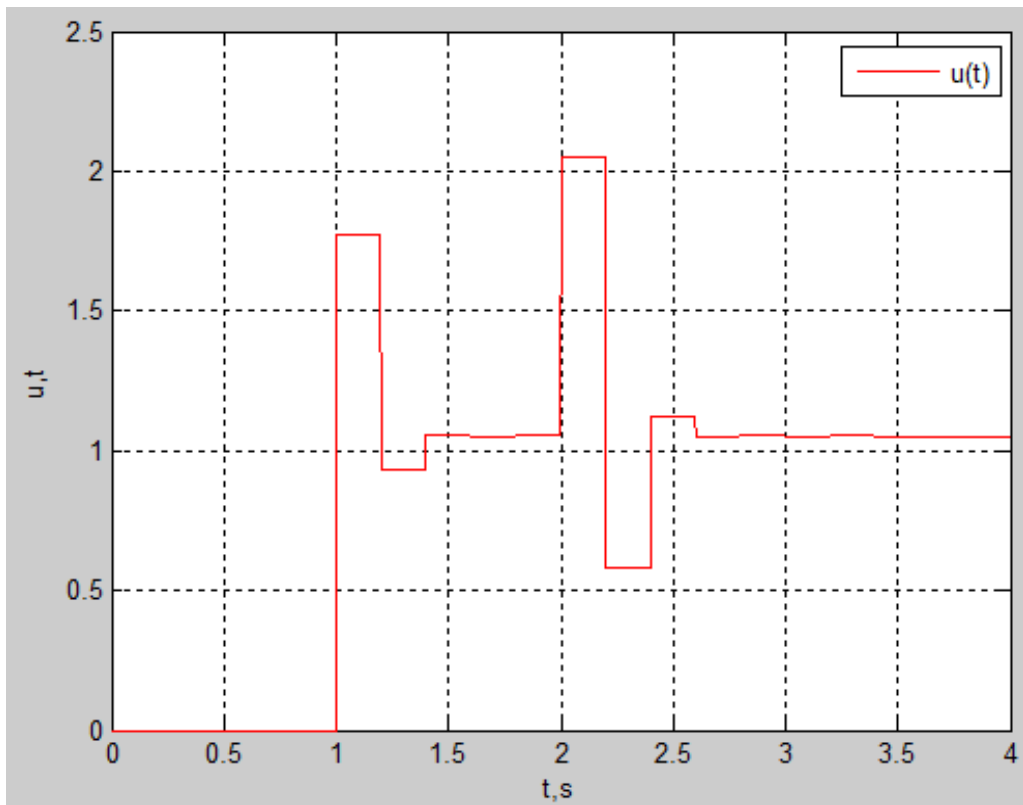


Obrázek 5.12 – Průběh estimované derivace s přidaným šumem vyšší úrovně

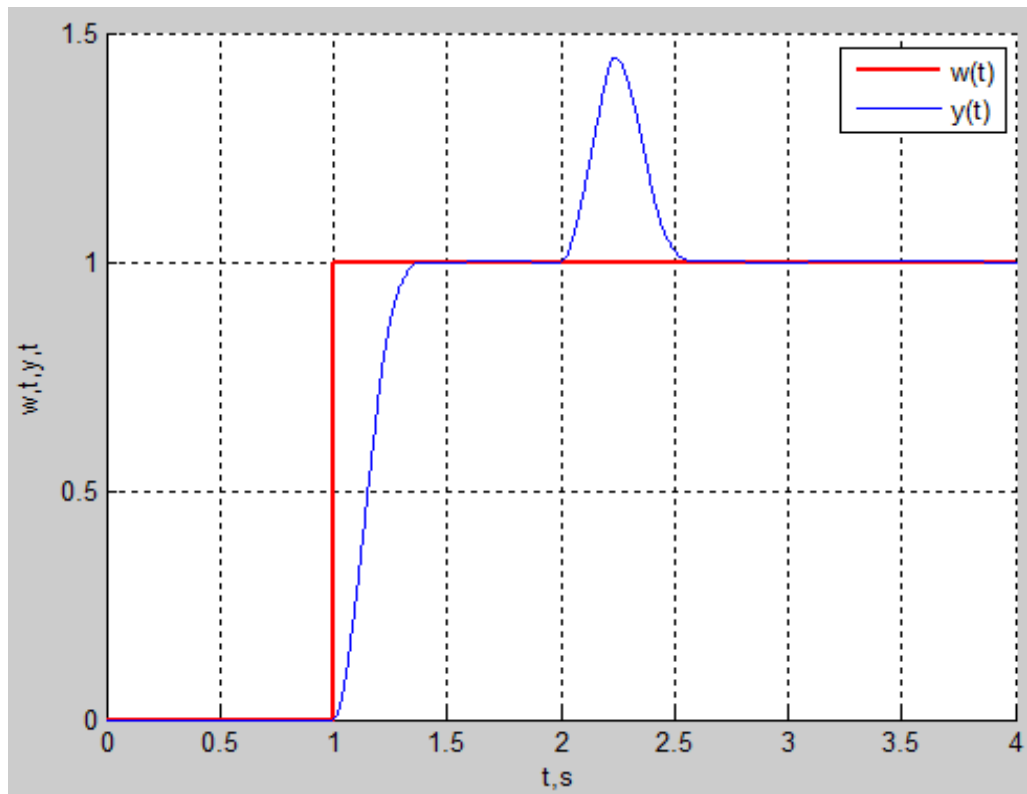
U řízení soustav motor – generátor s diskretním stavovým regulátorem s astatickým členem je využití těchto typů regulátoru pro řízení systémů zatížených šumem problematické z toho důvodu, že přidaný šum působí na stavové veličiny a tím pádem je estimace (odhad stavového vektoru) vstupu a výstupu zkreslena.

Při použití zapojení, které je uvedeno na obrázku 4.2. Postupně budu měnit úroveň šumu a zkoumat, jak působí na danou soustavu.

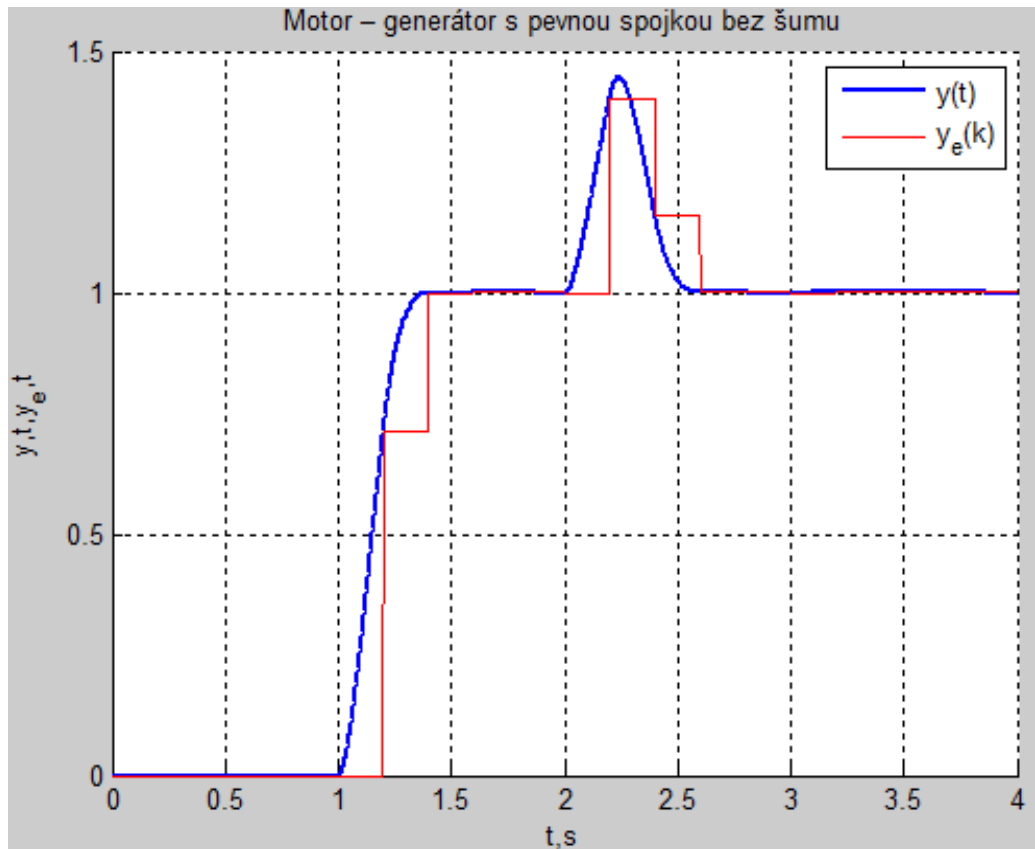
Pokud je šum zcela potlačen:



Obrázek 5.13 – Reakce vstupu soustavy bez šumového signálu

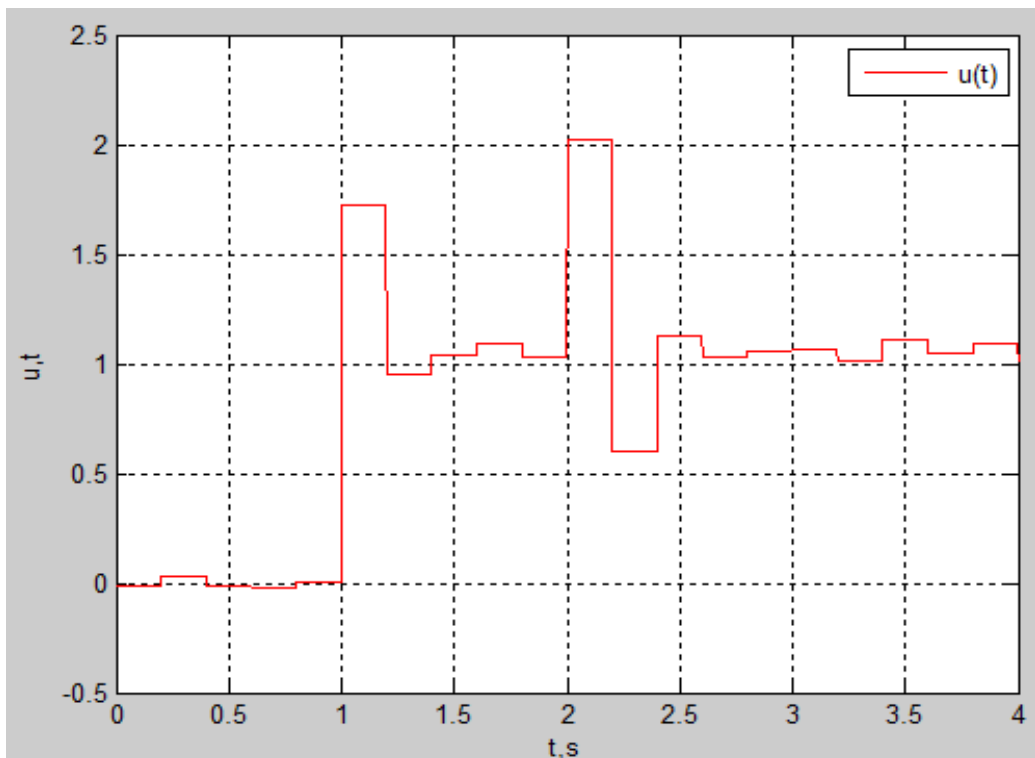


Obrázek 5.14 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy bez šumového signálu

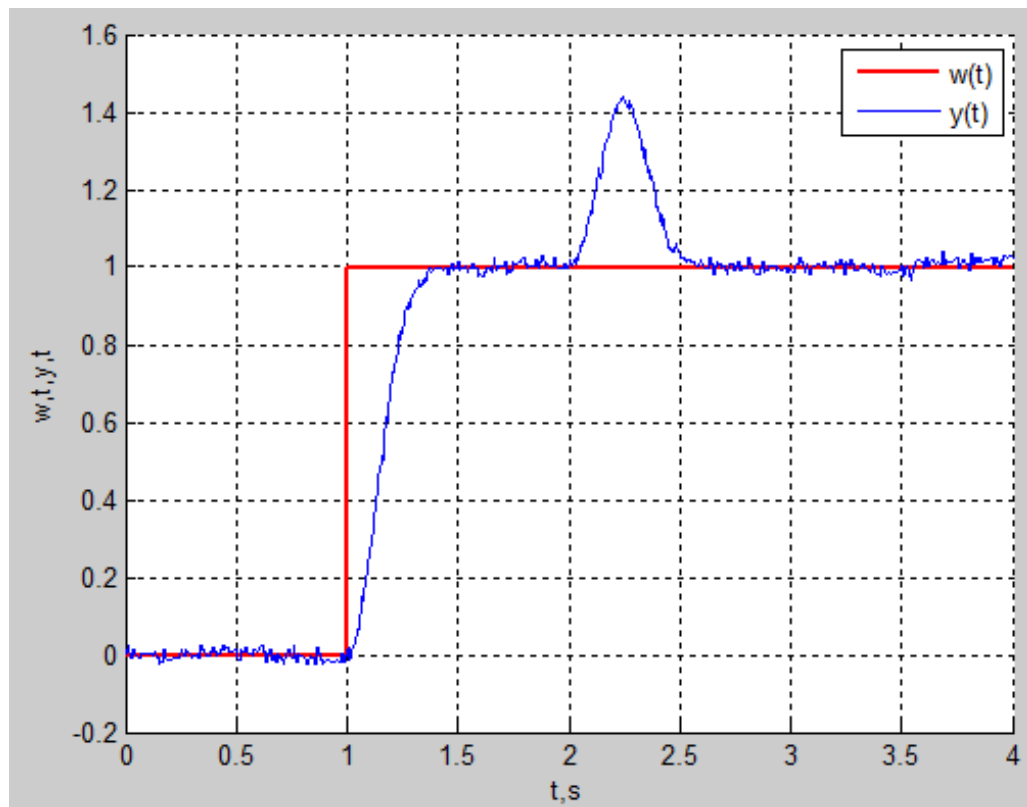


Obrázek 5.15 – Výsledný graf signálu bez šumu

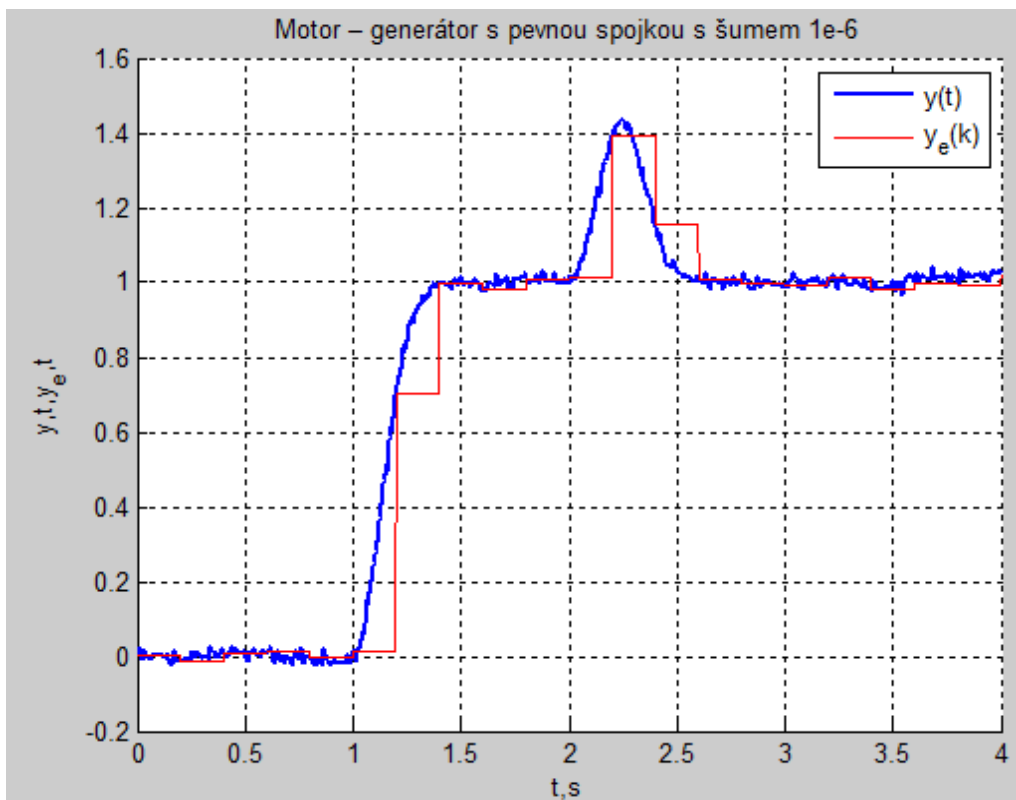
Pokud je přidán šum $1e-6$:



Obrázek 5.16 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-6$

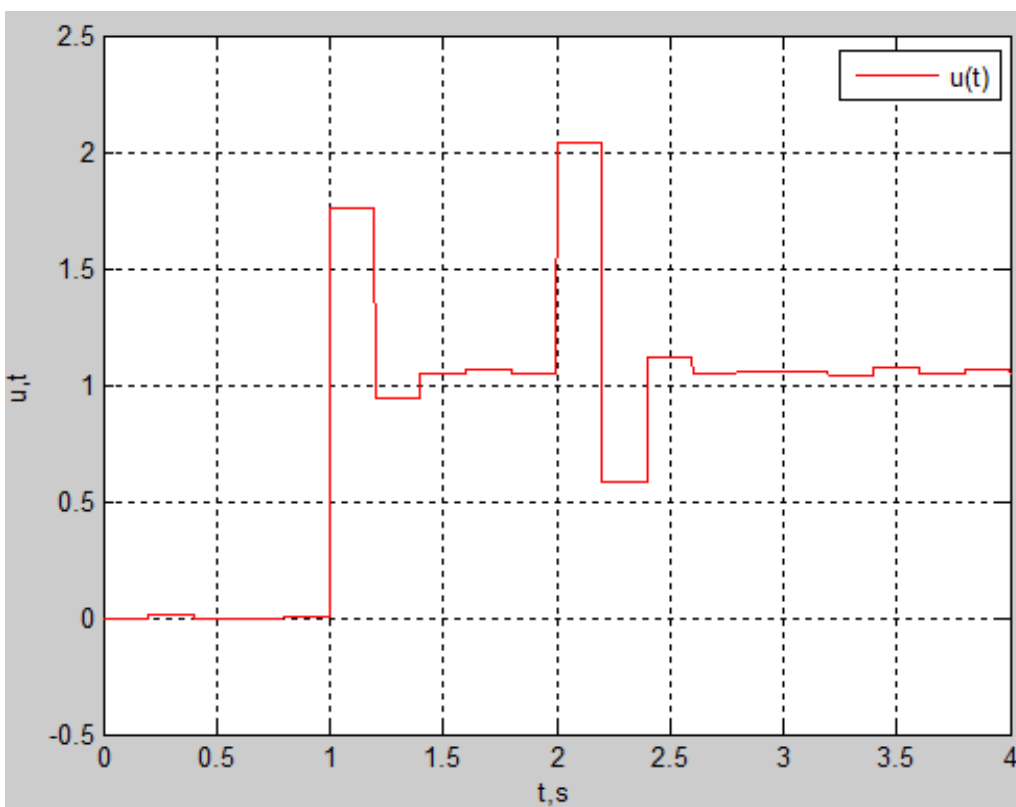


Obrázek 5.17 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-6$

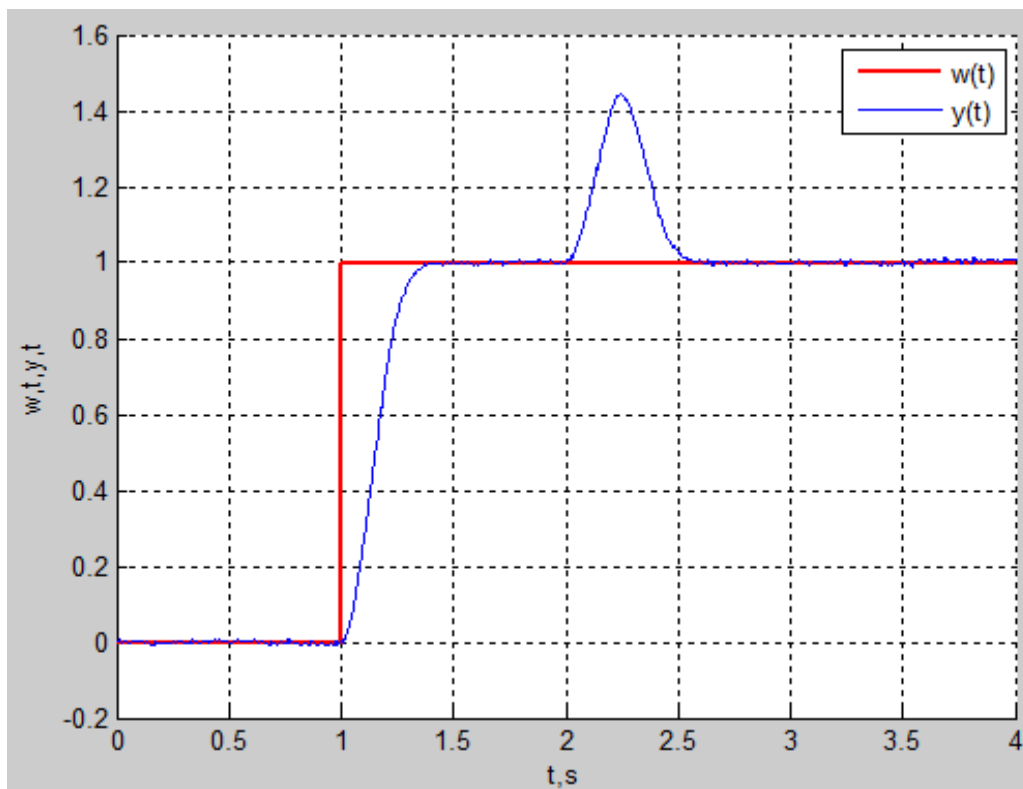


Obrázek 5.18 – Výsledný graf signálu s šumem 1e-6

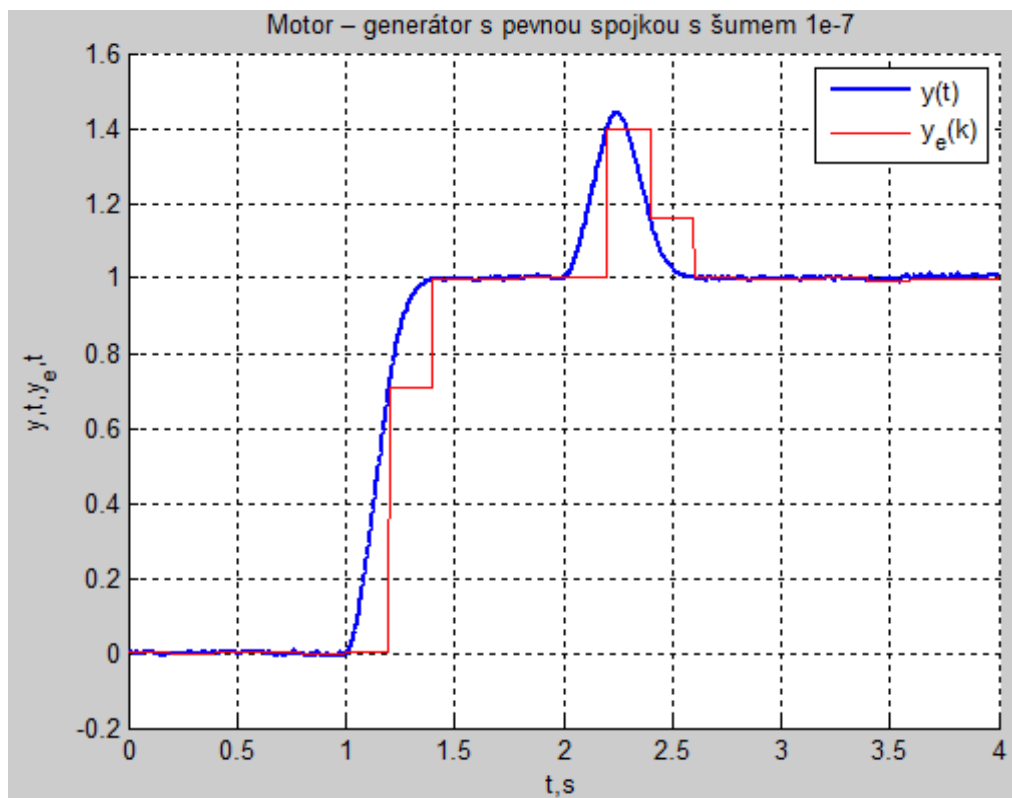
Pokud je přidán šum 1e-7:



Obrázek 5.19 – Reakce vstupu soustavy s šumem 1e-7

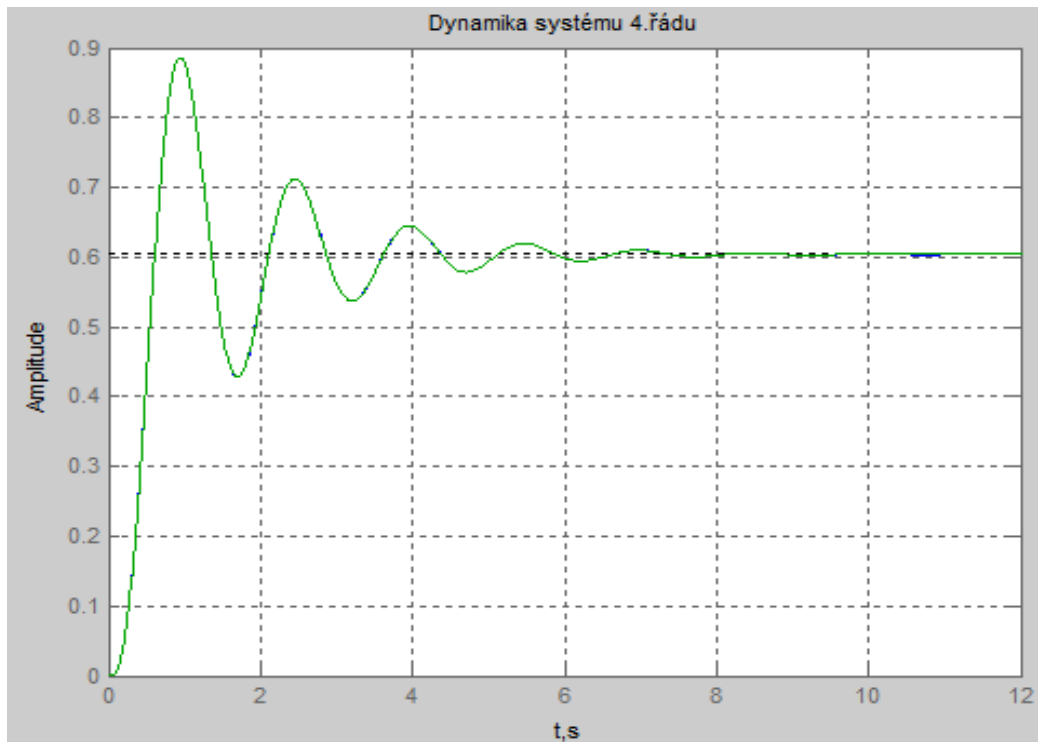


Obrázek 5.20 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-7$



Obrázek 5.21 – Výsledný graf signálu s šumem $1e-7$

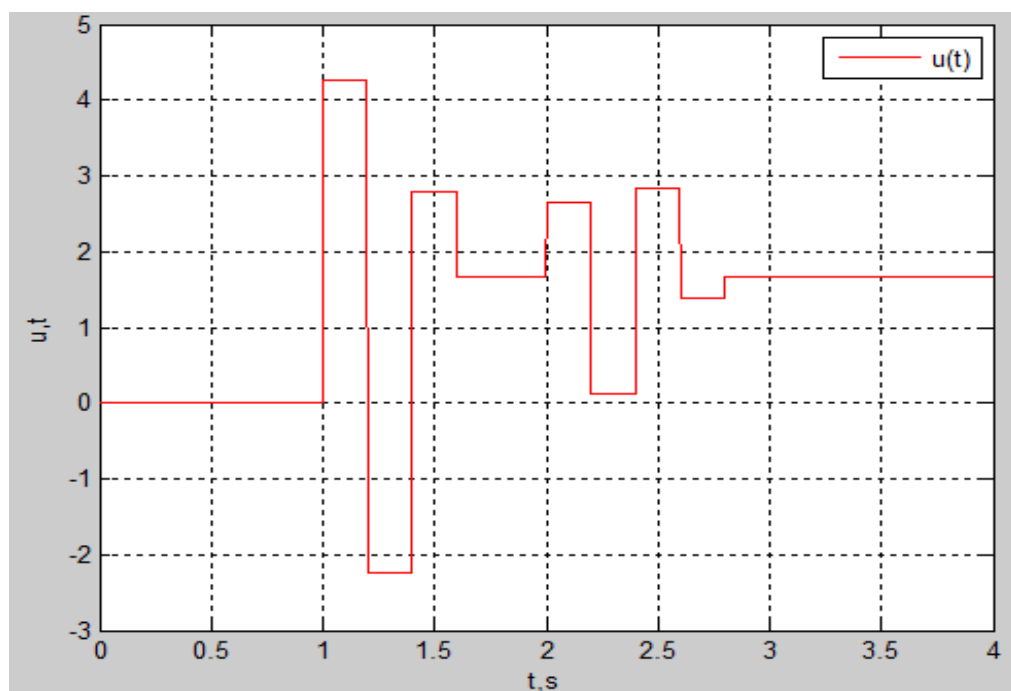
5.1.2 Systém2: Motor – generátor s pružnou spojkou



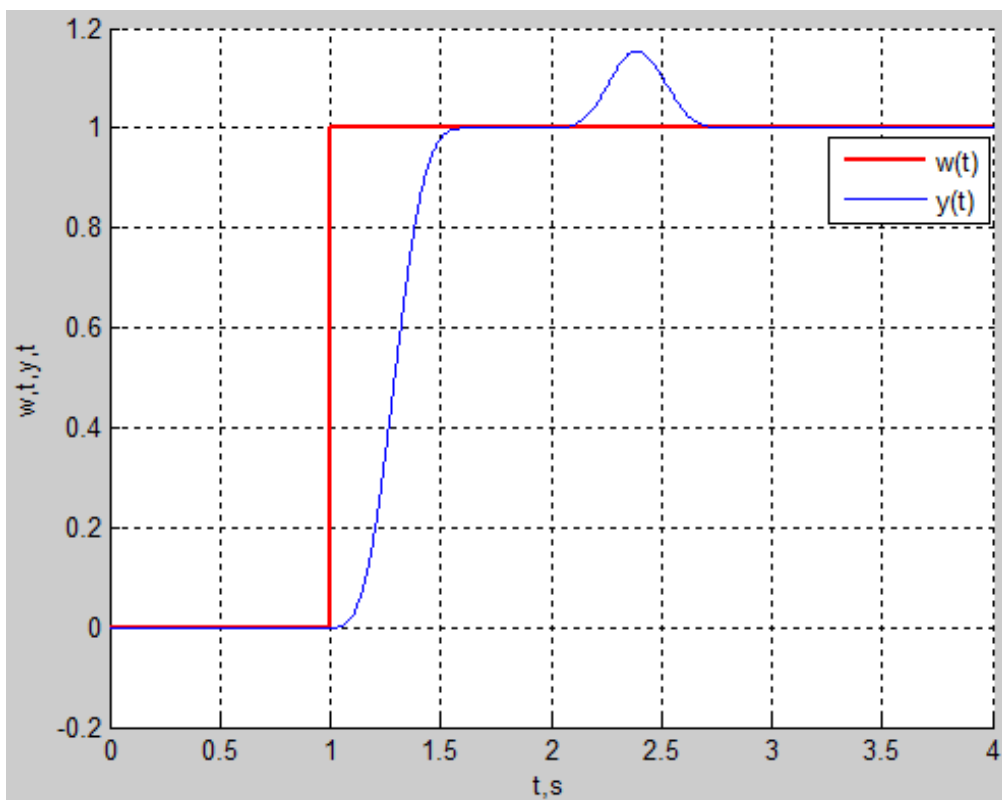
Obrázek 5.22 – Systém 4. řádu

Při použití zapojení, které je uvedeno na obrázku 4.3. Postupně budu měnit úroveň šumu a zkoumat, jak působí na danou soustavu.

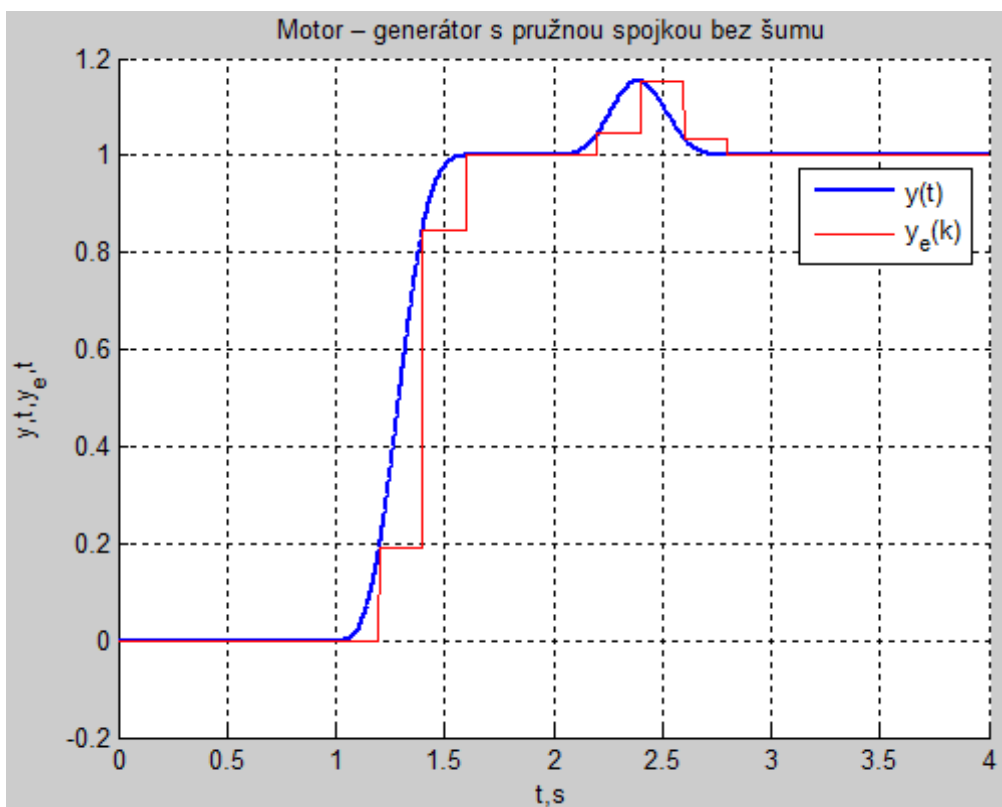
Pokud je šum zcela potlačen:



Obrázek 5.23 – Reakce vstupu soustavy bez šumového signálu

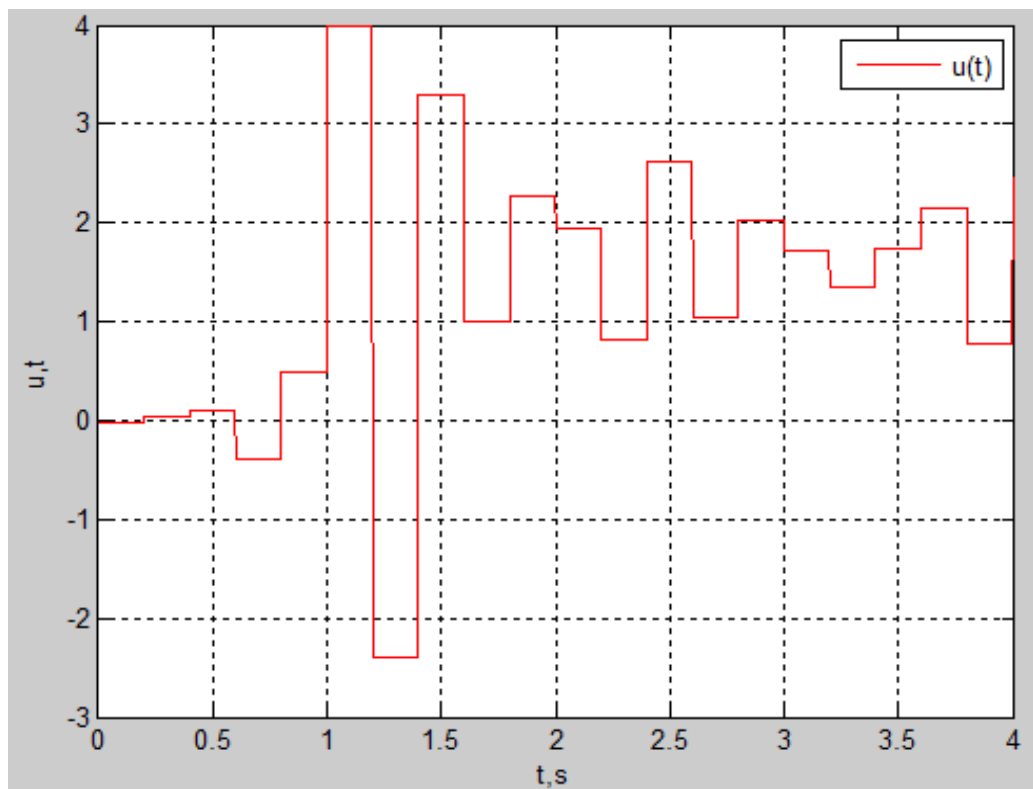


Obrázek 5.24 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy bez šumového signálu

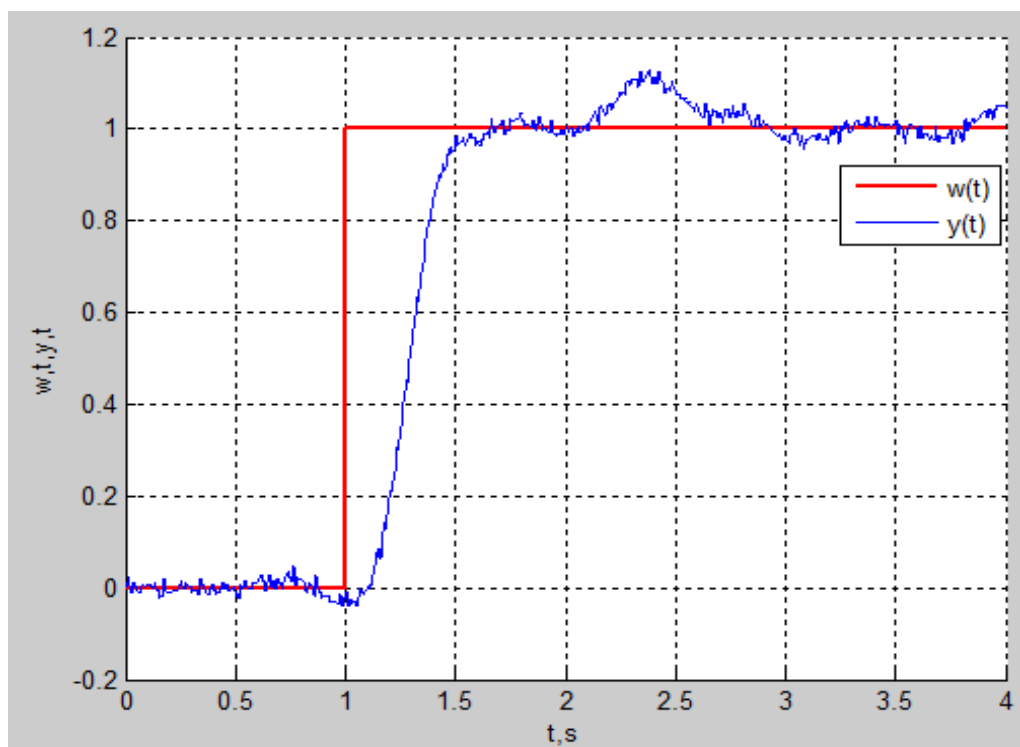


Obrázek 5.25 – Výsledný graf signálu vzorkování estimovaného signálu bez šumu

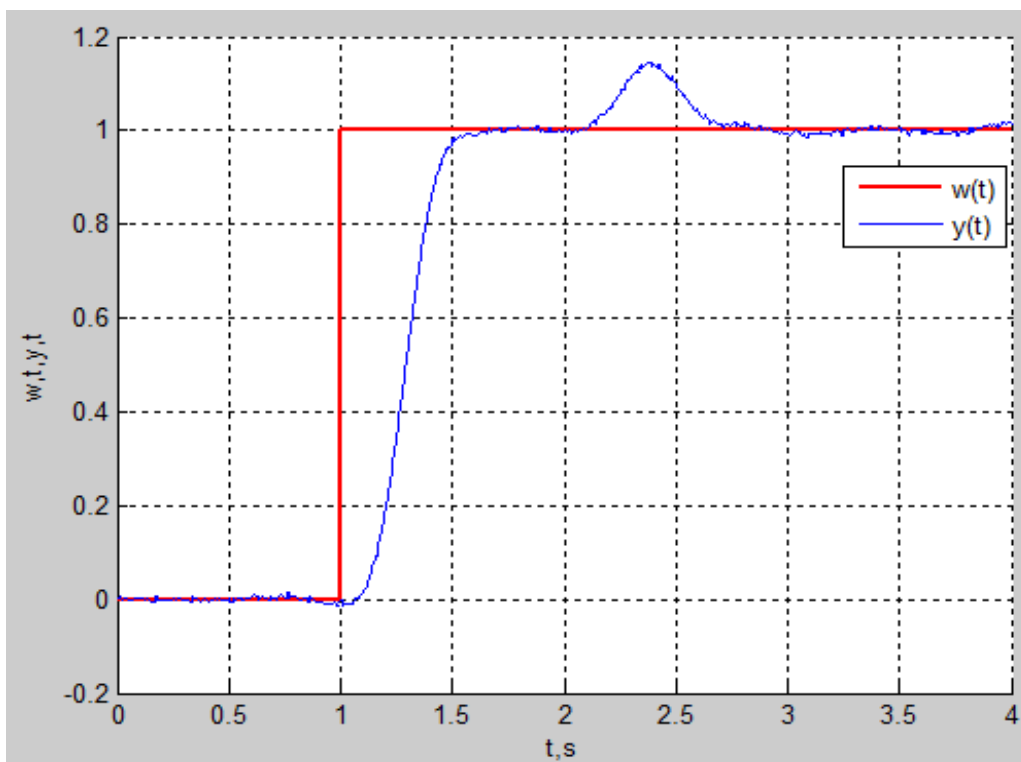
Pokud je přidán šum $1e-6$:



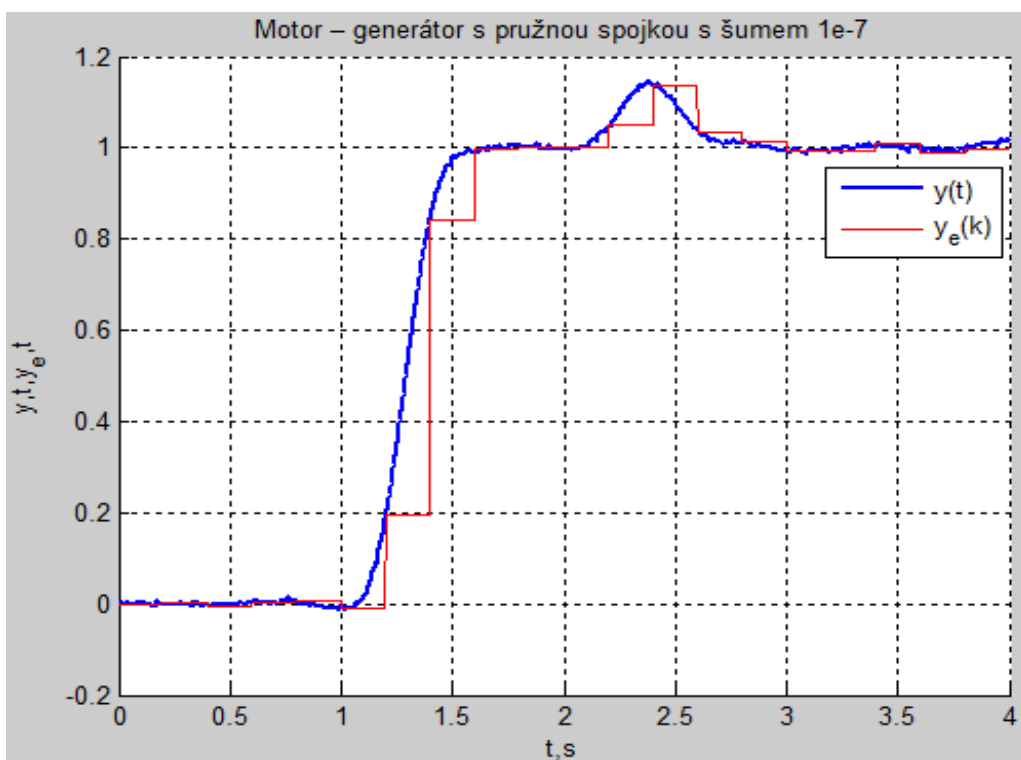
Obrázek 5.26 – Reakce vstupu soustavy s šumem $1e-6$



Obrázek 5.27 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-6$



Obrázek 5.30 – Reakce žádané hodnoty a výstupu soustavy s šumem $1e-7$



Obrázek 5.31 – Výsledný graf vzorkovaného estimovaného signálu s šumem $1e-7$

ZÁVĚR

V práci jsem se zabýval teoretickým návrhem a simulačnímu ověření činnosti stavových regulátorů pro řízení dvou vybraných dynamických systémů a to pro systém s pevnou spojkou, který byl druhého řádu a pro systém s pružnou spojkou, ten byl čtvrtého řádu. Následně jsem se zabýval ověřením robustnosti navržených regulačních algoritmů.

Hlavně jsou v kapitolách popsány estimátory, stavový regulátor a vztahy mezi stavovým a diskrétním popisem soustavy. Také jsem se v práci zabýval normální formou pozorovatelnosti a říditelnosti. Tyto poznatky jsou využity v praktické části.

Praktická část je vypracována v prostředí Matlab a Simulink. Cílem bylo vypracovat v prostředí Matlab skript a ověřit vlastnosti syntézy regulačního obvodu se stavovým regulátorem. V práci bylo nutné nalézt vhodný pracovní bod, protože regulátor s estimátorem je určen vždy pro řízení v určitém pracovním bodě, musel jsem tedy vybrat jen část z celého pracovního rozsahu, aby volba pracovního bodu byla v lineární části. Ve výsledcích jsem zobrazil průběhy motor – generátor s pevnou a pružnou spojkou. U obou případů jsem ověřoval i zatížení výstupu soustavy šumem a vliv na průběh regulace. Tedy aplikoval jsem postupy odvozené z teoretické části na zadané soustavy. Skripty se dají do budoucna i rozšířit.

Skripty by mohly sloužit studentům jako ukázkové příklady, pro dané soustavy druhého a čtvrtého řádu, a také jako praktická ukáзка toho, jak se navrhují stavové regulátory s estimátory úplného resp. redukovaného řádu.

Literatura

- BALÁTĚ, J. 2004. *Automatické řízení, 2. vydání*. Praha: BEN – Technická literatura. 663 s. ISBN 80-7300-148-9.
- DUŠEK, F. 2000. *Matlab&Simulink: úvod do používání*. Vyd. 1. Pardubice: Univerzita Pardubice. 146 s. ISBN 80-7194-273-1.
- DVOŘÁČEK, M. 2008. *Estimátor v systému regulace s proměnlivou strukturou*. Diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta Elektrotechniky a komunikačních technologií. 73s.
- JANEČEK, J. 2014. *Matlab: úvod do použití*. 1. vydání. Liberec: Technická univerzita v Liberci. 121 s.
- KUPKA, L., 2014. *Teorie automatického řízení II*. Pardubice: Osobní sdělení.
- KUPKA, L. 2008. *Matlab&Simulink: studijní materiály pro základy kybernetiky*. 1. vydání. Liberec: Technická univerzita v Liberci. 224 s.
- SLAPNÍČKA, M. 2010. *Syntéza regulačního obvodu se stavovým regulátorem s ohledem na jeho robustnost*. Diplomová práce. Liberec: Technická Univerzita v Liberci, Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií. 82s.

Přílohy

A - Matlab Script

B - Obsah CD

Příloha k diplomové práci

Syntéza regulačního obvodu se stavovým regulátorem

Bc. Radovan Svatoš

MATLAB SCRIPT

Příloha A – Matlab Script

Zde se nachází zdrojový kód:

Motor – generátor s pevnou spojkou

```
clear all; close all; clc; format compact
%% Identifikovaný přenos soustavy motor - generator
%           0.9507
% Ga(s) = -----
%           0.01759 s^2 + 0.2653 s + 1
sysn=tf(0.9507,[0.01759 0.2653 1])
%% přenos po zaokrouhlení koeficientu
sys=tf(0.95,[0.02 0.27 1])
%% normovaný přenos
sys=tf(47.5,[1 13.5 50])
step(sysn,sys)
%% Stavový popis (spojitý a diskrétní)
T=0.2;
%[A,B,C,D]=tf2ss(47.5,[1 13.5 50])
A = [0 1;-50 -13.5], B = [0;47.5], C = [1 0], D = 0
M=expm(A*T); N=inv(A)*(M-eye(2))*B
%[Bp,Ap]=ss2tf(A,B,C,D)
%% Diskrétní estimator redukovaného řádu
Q=M(2,2)/M(1,2); He=M(2,1)+M(2,2)*Q-Q*M(1,1)-Q*M(1,2)*Q
Me=M(2,2)-Q*M(1,2); Ne=N(2)-Q*N(1);
%% Diskrétní stavový regulátor (v minimálním počtu kroku)
% rozšířený stavový popis
Mr=[M [0;0];C*M 1]; Nr=[N;C*N]; Cr=[C 0];
%% Ackermannův přístup
Pr=[0 0 0]; Rr=-acker(Mr,Nr,Pr)
load('u.mat')
u1=(u.signals.values(:,1));
% u2=(u.signals.values(:,2));
t=(u.time(:,1));
%t=(u.signals.values(:,2));
```

```

% y1=(u.signals.values(:,2));
% t1=(u.time(:,1));
figure(2); plot(t,u1,'r'),grid on;
title('Namerena data'); xlabel('t,s'); ylabel('u'); legend('u(t)');
load('y.mat')
y1=(y.signals.values(:,1));
t=(y.time(:,1));
figure(3); plot(t,y1,'b','LineWidth', 2),grid on;
title('Namerena data'); xlabel('t,s'); ylabel('y'); legend('y(t)');
load('ytyek.mat')
yte1=(ytyek.signals.values(:,1));
yte2=(ytyek.signals.values(:,2));
t=(ytyek.time(:,1));
figure(4);hold on;
plot(t,yte1,'b','LineWidth', 2),plot(t,yte2,'r'),grid on
title('Motor – generátor s pevnou spojkou bez šumu')
xlabel('t,s'); ylabel('y,t,y_e,t'); legend('y(t)','y_e(k)');

```

Motor – generátor s pružnou spojkou

```

close all; clear all; clc;
% soustava motor-generator s pruznou spojkou
%      3877
%-----
%  $s^4 + 74 s^3 + 472 s^2 + 1753 s + 6418$ 
st=4;
B=3877; A=[1 74 472 1753 6418];
Gs=tf(B,A)
step(Gs,12), hold on
As=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;-6418 -1753 -472 -74]
Bs=[0;0;0;1], Cs=[3877 0 0 0], Ds=0
[b,a]=ss2tf(As,Bs,Cs,Ds), Gs2=tf(b,a), step(Gs2) %kontrola shody
T=0.2; M=expm(As*T); N=inv(As)*(M-eye(4))*Bs
% navrh estimatoru (netypicky, pomoci Ackermannovy formule)
LambdaE=[0 0 0 0]; % vlastni cisla estimacniho procesu

```

```

L=acker(M',Cs',LambdaE); L=L'; Me=M-L*Cs, Ne=N-L*Ds
%diskretni stavovy regulator s astat. clenem (v minimalnim poctu kroku)
Mr=[M [0;0;0;0];Cs*M 1]; Nr=[N;Cs*N]; Cr=[Cs 0]
%Ackermannuv pristup
LambdaR=[0 0 0 0]; %vlastni cisla pro navrh regulatoru
Rr=-acker(Mr,Nr,LambdaR)
load('u.mat')
u1=(u.signals.values(:,1));
t=(u.time(:,1));
%t=(u.signals.values(:,2));
% y1=(u.signals.values(:,2));
% t1=(u.time(:,1));
figure(2); plot(t,u1,'r'),grid
title('Namerena data'); xlabel('t,s'); ylabel('u'); legend('u(t)');
load('y.mat')
y1=(y.signals.values(:,1));
t=(y.time(:,1));
figure(3); plot(t,y1,'b','LineWidth', 2),grid
title('Namerena data'); xlabel('t,s'); ylabel('y'); legend('y(t)');
load('ytyek.mat')
ytyek1=(ytyek.signals.values(:,1));
ytyek2=(ytyek.signals.values(:,2));
t=(ytyek.time(:,1));
figure(4); hold on;
plot(t,ytek1,'b','LineWidth', 2),plot(t,ytek2,'r'),grid on
title('Motor – generátor s pružnou spojkou bez šumu')
xlabel('t,s'); ylabel('y,t,y_e,t'); legend('y(t)','y_e(k)');

```

Normální forma říditelnosti a normální forma pozorovatelnosti:

```

clear all;clc;close all;
%system
b0=47.5; a2=1; a1=13.5; a0=50;
sys=tf(b0,[1 a1 a0])
%Normalni forma riditelnosti

```

```

An=[0 1;-a0 -a1]; Bn=[0; b0]; Cn=[1 0]; Dn=0;
%Normalni forma pozorovatelnosti
Af=[-a1 1;-a0 0]; Bf=[0; b0]; Cf=[1 0]; Df=0;
st=10
sim NFP2; sim NFR2
figure; plot(NFP1(:,1),NFP1(:,2),NFP1(:,1),NFP1(:,3)),grid
title('NF pozorovatelnosti prechodova charakteristika')
ylabel('x_1, x_2'); xlabel('t,s'); legend('x_1','x_2')
figure; plot(NFP1(:,3),NFP1(:,2)),grid
title('NF pozorovatelnosti stavova trajektorie'); xlabel('x_1'); ylabel('x_2')
figure; plot(NFR1(:,1),NFR1(:,2),NFR1(:,1),NFR1(:,3)),grid
title('NF riditelnosti prechodova charakteristika')
ylabel('x_1, x_2'); xlabel('t,s'); legend('x_1','x_2')
figure; plot(NFR1(:,3),NFR1(:,2)),grid
title('NF riditelnosti stavova trajektorie'); xlabel('x_1'); ylabel('x_2')
%diskretni stav. popis
A1=An; B1=Bn; C1=Cn; D1=Dn;
T = 0.2; M = expm(A1*T); N = inv(A1)*(M-eye(2))*B1
%diskretni obrazovy popis
[Bq Aq]=ss2tf(M,N,C1,D1);
sysDO=tf(Bq,Aq,T)
%spojity estimator-simulace chovani
lambda=0.1; pp=1.5; %dynamicke chovani-zmena p.p. a lamda
Q=(A1(2,2)-lambda)/A1(1,2); He=A1(2,1)+A1(2,2)*Q-Q*A1(1,1)-Q*A1(1,2)*Q
Me=A1(2,2)-Q*A1(1,2); Ne=B1(2)-Q*B1(1)
sim Estimator2Spojity
figure; subplot(2,1,1);
plot(Estim1(:,1),Estim1(:,2),Estim1(:,1),Estim1(:,3),Estim1(:,1),Estim1(:,4),'r'),grid
title('Spojity Estimator - lambda=0.1, p.p.=1.5')
xlabel('t,s'); ylabel('u, y'); legend('u','y','yr','t');
subplot(2,1,2)
plot(Estim2(:,1),Estim2(:,2),'k',Estim2(1:10:end,1),Estim2(1:10:end,3),'rx'),grid
xlabel('t,s'); ylabel('y'); legend('y','t','yr','t')
%Diskretni estimator redukovaneho radu

```

```

lambda=0.1; pp=2;
Q=(M(2,2)-lambda)/M(1,2); He=M(2,1)+M(2,2)*Q-Q*M(1,1)-Q*M(1,2)*Q
Me=M(2,2)-Q*M(1,2); Ne=N(2)-Q*N(1)
sim estimator2
figure; subplot(2,1,1);
plot(Estim1(:,1),Estim1(:,2),Estim1(:,1),Estim1(:,3),Estim1(:,1),Estim1(:,4),'r'),grid
title('Diskrétní Estimátor - lambda=0.1, p.p.=2')
xlabel('t,s'); ylabel('u, y'); legend('u','y','yr','k');
subplot(2,1,2)
plot(Estim2(:,1),Estim2(:,2),'k',Estim2(:,1),Estim2(:,3),'r'),grid
xlabel('t,s'); ylabel('y'); legend('y','t','yr','k');
%diskretni stavovy regulator
noise=0;%sum
% rozsireny stavovy popis
Mr=[M [0;0];C1*M 1]; Nr=[N;C1*N]; Cr=[C1 0]
% Ackermanuv princip
Pr=[0 0 0]; Rr=-acker(Mr,Nr,Pr)
%Diskretni stavovy regulator Riccati-Tvrký,Mekky
Qr=[0 0 0; 0 0 0; 0 0 1]; L=1; PN=[0 0 0; 0 100 0; 0 0 0]; %L=0 tvrdy L=1 mekky
P=PN;
for i=1:1:10
    Pi=Qr+Mr'*P*Mr-Mr'*P*Nr*inv(L+Nr'*P*Nr)*Nr'*P*Mr;
    R=inv(L+Nr'*P*Nr)*Nr'*P*Mr;
    P=Pi;
end;
%Rr=-R
%%
sim estimator2_reg
figure;subplot(3,1,1:2);plot(EstimReg1(:,1),EstimReg1(:,2),EstimReg1(:,1),EstimReg1(:,3),Es
timReg1(:,1),EstimReg1(:,5),'c')
title('Estimátor s regulátorem Riccati-Měkký'); xlabel('t,s'); ylabel('u,t, y,t,v,t');
legend('u,t','y,t','v,t');
axis([0 max(EstimReg1(:,1)) min(min([EstimReg1(:,2) EstimReg1(:,3) EstimReg1(:,5)]))-0.3
max(max([EstimReg1(:,2) EstimReg1(:,3) EstimReg1(:,5)]))+0.3 ])

```



```
subplot(3,1,3); plot(EstimReg2(:,1),EstimReg2(:,2),'k',EstimReg2(:,1),EstimReg2(:,3),'r')
xlabel('t,s'); ylabel('y",t,yr",t'); legend('y",t','yr",t');
axis([0 max(EstimReg2(:,1)) min(min([EstimReg2(:,2) EstimReg2(:,3)]))-0.3
max(max([EstimReg2(:,2) EstimReg2(:,3)]))+0.3] )
```

Příloha k diplomové práci

Syntéza regulačního obvodu se stavovým regulátorem

Bc. Radovan Svatoš

OBSAH CD

Příloha B - Obsah CD

Přílohy diplomové práce se nacházejí na přiloženém CD. Nachází se zde:

1. elektronická verze (SvatošRadovan_SyntezaRegObvodu_LK_2015.pdf),
2. zdrojové kódy v Matlabu (.m) a návrhy obvodu v Simulinku(.mdl),
3. uložené obrázky a výsledné průběhy,