Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Některé ekonomické aplikace teorie her

Bc. Veronika Školníková

Diplomová práce
2013

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: **2012/2013**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Veronika Školníková**
Osobní číslo:	**E11544**
Studijní program:	**N6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Ekonomika a management podniku**
Název tématu:	**Některé ekonomické aplikace teorie her**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je ukázat některé možnosti ekonomických aplikací teorií her. Práce bude obsahovat:
- historii a vývoj,
- základní pojmy,
- rozdělení,
- možnosti využití,
- ekonomické aplikace.

Rozsah grafických prací: —

Rozsah pracovní zprávy: **cca 50 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

MAŇAS, M., DLOUHÝ M.: Games and economic decisions, Praha: Oeconomica, 2009, ISBN 978-80-245-1610-3.
MAŇAS, M.,: Teorie her a její ekonomické aplikace, Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1988.
PANKAJ, G.: Games businesses play: cases and models, Cambridge: MIT Press, 2000, ISBN 0-262-07182-7.
VOLEK, J.: Modelování a řešení rozhodovacích situací, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010, ISBN 978-80-7395-311-9.
VOLEK, J.: Operační výzkum IV: teorie her a optimálního rozhodování, Pardubice : Univerzita Pardubice, 2003, ISBN 80-7194-621-4.

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **30. září 2012**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2013**

L.S.

doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.
děkanka

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. října 2012

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Hradci Králové dne Bc. Veronika Školníková

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce panu doc. RNDr. Jaroslavu Seibertovi, CSc. za jeho odbornou pomoc a cenné rady, které mi pomohly při zpracování diplomové práce.

Dále bych chtěla poděkovat také panu doc. Ing. Josefu Volkovi, CSc. za cenné rady a poskytnuté materiály, jež mi pomohly při vypracování praktické části práce.

Poslední poděkování patří rodině a přátelům, kteří mě podporovali během doby studia.

ANOTACE

Diplomová práce se věnuje vědní disciplíně teorie her a ukázce některých jejích ekonomických aplikací. Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola se věnuje vzniku a vývoji teorie her. Druhá kapitola vysvětluje hlavní charakteristiky teorie her. Ve třetí kapitole jsou již uvedeny jednotlivé ekonomické aplikace teorie her a čtvrtá kapitola je podrobněji zaměřena na jednu možných aplikací teorie her, obálkovou metodu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Teorie her, hra, hráč, strategie, optimální strategie, výplatní matice, obálková metoda

TITLE

Some Economic Applications of Game Theory

ANNOTATION

This master's thesis concentrates on game theory and shows some of its economic applications. The thesis is divided into four chapters. The first chapter centers on the creation and development of game theory. The second one explains the main characteristics of game theory. The various economic applications are outlined in the third chapter. The final and fourth chapter focuses on one specific possible application of game theory, sealed bid auction.

KEYWORDS

Game theory, game, player, strategy, optimal strategy, payoff matrix, sealed bid auction

OBSAH

SEZNAM TABULEK

SEZNAM OBRÁZKŮ

ÚVOD

Teorie her je vědní obor řazený do matematické ekonomie, ale také do teorie rozhodování a operačního výzkumu. Teorie her se zabývá modelováním a rozborem širokého spektra rozhodovacích situací s více účastníky (hráči), kteří mají rozdílné zájmy. Cílem je nalézt optimální řešení, resp. takovou strategii, která bude vyhovovat všem hráčům rozhodovací situace.

Pojem „hra“ má v moderní teorii velmi obecný význam. Nezahrnuje pouze salónní hry typu šachy či poker, jde v podstatě o jakoukoli konfliktní situaci mezi jedinci, podniky, armádami, státy, politickými stranami, biologickými druhy. Tato vědní disciplína nachází využití v mnoha oborech: matematika, ekonomie, sociologie, politologie, biologie, informatika, zemědělství a dalších.

„Co tedy můžeme rozumně očekávat od teorie he? Je rozhodně mnohem jednodušší než taková teorie, která by pokryla všechny vojenské, ekonomické i sociální situace. Na druhé straně je dostatečně obecná, aby ospravedlnila očekávání, že vysvětlí některé kritické stránky mnoha zajímavých konfliktních situací.“ [33]

Diplomová práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola se věnuje vzniku a vývoji teorie her. Jsou zde uvedeny nejvýznamnější osobnosti, které v souvislosti s touto vědní disciplínou získali Nobelovu cenu. U každého z nich je krátce popsán jejich osobní i profesní život a hlavní přínos teorii her. Druhá kapitola se věnuje hlavním charakteristikám teorie her. Nejprve jsou vysvětleny základní pojmy, následuje dělení her, bližší popis jednotlivých druhů her, principy jejich řešení. Ve třetí kapitole jsou již uvedeny jednotlivé ekonomické aplikace teorie her. Nechybí zde popis principu řešení ani následné výsledky příkladů. Čtvrtá kapitola je zaměřena na obálkovou metodu, jako jednu z možných aplikací teorie her.

Cílem práce je ukázat některé možnosti ekonomických aplikací teorie her. Práce obsahuje vznik a vývoj teorie her, charakteristiky teorie her, principy řešení některých typů her v ekonomických souvislostech. Hlavní zaměření praktické části je na ekonomickou aplikaci obálkové metody.

1 HISTORIE TEORIE HER

První zmínky o teorii her učinil již v roce 1838 francouzský matematik A. Cournot, který se zabýval stanovením rozsahu výroby na trhu, kde existují pouze dvě konkurenční firmy (duopol). Na počátku 20. století se matematici snažili nalézt odpověď na otázku, zda je možné spočítat optimální strategii pro šachy. Základy současné teorie her vznikaly v pracích E. Zermela (1913), E. Borela (1921) publikující práci zabývající se formulací matematických problémů motivovými herními situacemi, a J. von Neumanna, který v roce 1928 dokázal základní větu teorie her – větu o minimaxu. Později se dodatečně ukázalo, že i některé práce publikované s ekonomickou problematikou měly blízko k oblasti vznikající teorii her. Příkladem jsou práce Leona Walrasa publikované kolem roku 1877 zabývající se pojmem rovnovážného řešení a rovnovážného stavu. Dále je to také pojem nedominovanosti, tzv. Paretovská optimalita, z prací Vilfreda Pareta počátkem 20. století, nebo teorie konfliktů od H. von Stackelberga publikovaná v roce 1934.

1.1 Vznik teorie her

Teorie her se do povědomí ekonomie a společenských věd dostala až v roce 1944, kdy vyšla kniha Johna von Neumanna a Oskara Morgensterna „Theory of Games and Economic Behavior“. Tato kniha se stala základním dílem teorie her a ustanovila tak novou vědní disciplínu.

1.1.1 John von Neumann

John Ludwig von Neumann, jehož původní jméno bylo János, se narodil 28. prosince 1903 v Budapešti do rodiny bohatého židovského maďarského bankéře. Již jako dítě projevoval znaky geniality – měl jazykové nadání, neobyčejnou paměť, díky které zvládnul po pouhém jednom přečtení citovat dlouhé části textu, také vynikal v matematice. Otec jeho nadání podporoval tím, že mu zaplatil nejlepší školu ve městě, kupoval mu knihy a od dvanácti let ho soukromě učil nejlepší profesor matematiky z budapešťské univerzity, který pro něj připravil individuální plán studia, jelikož rozpoznal jeho neobyčejné nadání.

Svou první vědeckou práci publikoval v sedmnácti letech a o rok později se zapsal na budapešťskou univerzitu, obor chemické inženýrství. Studium pro něj bylo tak snadné, že ve volném čase napsal doktorskou práci z matematiky. Na univerzitu v Berlíně nastoupil ve dvaadvaceti letech jako nejmladší asistující profesor v historii. Zde se zabýval kvantovou teorií a teorií neutronových sítí. Od roku 1928 se začal zabývat teorií her. V roce 1929 spolu s Albertem Einsteinem založili nový Institut for Advanced Study v Princetonu, kde se stal vedoucím oddělení matematiky.

Začátkem druhé světové války se dostal von Neumann do pozornosti vlády a armádních činitelů. V roce 1943 se stal jednou z hlavních postav tajného vývoje atomové bomby, tzv. Projektu Manhattan. Úkolem bylo určit množství explozivního materiálu, které obalí plutonium, aby došlo k nejúčinnějšímu výbuchu. Špičkový vědci si s tímto problémem lámali hlavy, ale von Neumann jej vyřešil během krátké chvíle. Jeho závěry pak byly použity k sestrojení bomb, které Američané použili v Hirošimě a Nagasaki. Mezi spolupracovníky si tímto vytvořil spoustu nepřátel. Po druhé světové válce spolupracoval na vývoji vodíkové bomby, kde mu až v roce 1950 pomohl s výpočty počítač. V roce 1952 byl testem v Tichém oceánu zničen jeden malý ostrov. Poté se stal von Neumann poradcem americké vlády.

Zásadní význam udělal von Neumann pro výpočetní techniku svým Prvním náčrtem zprávy o EDVACu, kde popsal koncepci, která dala základ raným počítačů EDVAC a MANIAC. V roce 1945 von Neumann navrhnul architekturu samočinného počítače, který používáme dodnes. Ten se skládá z pěti hlavních komponent: procesoru, řadiče, operační paměti, vstupního a výstupního zařízení.

John von Neumann byl za svůj život dvakrát ženatý. Jeho první manželka se jmenovala Mariette Kovesi, s níž měl dceru Marinu, ale brzy se rozvedli. Von Neumann se rok po rozvodu znovu oženil, tentokrát s Klarou Dan. John von Neumann zemřel 8. února 1957 ve věku 53 let na rakovinu. Za svůj život podstatně přispěl do mnoha oborů - matematiky, kvantové fyziky, počítačových věd, hydrodynamiky, ekonomie a dalších. Tvrdí se o něm, jako o jediném vědci, že byl chytřejší než Albert Einstein. [15], [22], [23]

1.1.2 Oscar Morgenstern

Oscar Morgenstern se narodil 24. ledna 1902 v Görlitzu v Německu. Některé zdroje uvádějí, že jeho matka byla nelegitimní dcera německého císaře Fridricha III. Oscar vyrostl ve Vídni, kam chodil do školy. V roce 1925 promoval na univerzitě ve Vídni, získal zde doktorát z politických věd a v roce 1935 se zde stal profesorem ekonomie, kde zůstal až do svého odchodu do důchodu v roce 1970. Je také známý pro svou skepsi ohledně měřitelnosti ekonomie, kterou popsal roku 1950 ve své knize „On the Accuracy of Economic Observations“ (O přesnosti ekonomického pozorování). V roce 1970 přijal pozici profesora ekonomie na New York University, kde zůstal až do své smrti. V roce 1948 si vzal za manželku Dorothy Young. Zemřel v Princetonu 26. července 1977. [25], [26]

1.2 Vývoj teorie her

Po roce 1945 se teorie her začala rychle vyvíjet. Významné práce byly vydány ve čtyřech sbornících Princetonské university. V roce 1952 J. C. C. McKinsey vydal učebnici přispívající k rozšíření teorie her i mimo oblast specializovaných pracovníků. Populárnější prací se stala kniha J. Williamse z roku 1953, která bohužel končí právě v místech, kde začíná být teorie her užitečná pro aplikace. Roku 1965 publikoval významnou práci R. Isaacs, který se zabýval novým odvětvím teorie her, tzv. teorií diferenciálních her. Tyto hry zkoumají konfliktní situace, které probíhají v čase. Strategie hráče je zaznamenána konkrétní funkcí času zadanou pomocí diferenciální rovnice. Od roku 1971 vychází časopis International Journal of Game Theory, který je hlavním periodikem odrážející vývoj teorie her. [5]

Nejvýznamnější osobnosti, které přispěly k rozvoji teorie her a jejího uplatnění v ekonomických vědách, byly oceněny Nobelovou cenou za ekonomii. Nobelovy ceny se udělují 10. prosince na výročí dne úmrtí Alfreda Bernharda Nobela. Tyto ceny se předávají ve Stockholmu i v Oslu zároveň. Udělování cen začalo již v roce 1901 cenami za fyziku, chemii, lékařství či fyziologii, za literaturu a za mír. Od roku 1969 zavedla Centrální Švédská banka novou cenu, „Cenu Švédské národní banky za ekonomii na památku Alfreda Nobela“, která je obdobou Nobelovy ceny. Tato cena se začala udělovat při příležitosti třísetletého výročí založení banky, byla udělena již 44 krát 71 laureátům mezi roky 1969 a 2012.

V následující části jsou uvedeni laureáti Nobelovy ceny za ekonomii v oblasti teorie her. U každého nositele je uveden krátký životopis, který byl zpracován ze zdrojů: [1], [10], [14], [24], [27], [28], [32] . Seznam osobností je veden podle roku, ve kterém získali Cenu Švédské národní banky za ekonomii na památku Alfreda Nobela.

1.2.1 Paul Anthony Samuelson

Nobelovu cenu získal Paul Anthony Samuelson v roce 1970 za vědecký příspěvek k rozvoji statické a dynamické ekonomické teorie a aktivní přispění ke zvýšení analytické úrovně ekonomické vědy. Jeho příspěvky lze rozdělit do čtyř oblastí: dynamická teorie a analýza stability, teorie spotřeby, teorie všeobecné rovnováhy a teorie kapitálu.

Paul Anthony Samuelson se narodil v Gary ve státě Indiana 15. května 1915. V roce 1935 získal titul bakalář svobodných umění na Chicagské univerzitě, v roce 1936 obdržel titul mistr svobodných umění a v roce 1941 získal doktorát z filozofie na Harvardu. Jako asistent začal v roce 1941 na Massachusettském technologickém institutu (MIT), kde se v roce 1947 stal profesorem. Toho roku mu byla udělena medaile Johna Batese jako žijícímu ekonomovi mladšímu čtyřiceti let, jehož práce představuje vynikající přínos hlavnímu proudu ekonomického myšlení a vědění. Jeho práce „Economics: An Introductory Analysis“, poprvé vydaná v roce 1948, se stala nejúspěšnější učebnicí ekonomie všech dob. Ve spolupráci s R. Dorfmanem a R. Solowem napsal knihu „Linear Programming and Economic Analysis“, kde se zabývá matematickou ekonomií. Ta se využívá především k řešení praktických problémů v mezinárodním obchodě, v dopravě a marketingu, v otázkách konkurenční strategie v soukromém podnikání i ve vládním sektoru, v průmyslové výrobě a při plánování obrany.

Působil jako ekonomický poradce různých soukromých i vládních institucí, byl také ekonomickým poradcem prezidenta J. F. Kennedyho a napsal velké množství odborných článků do všech významných časopisů. Jeho přínos pro ekonomii je obrovský a jistě patří mezi největší postavy ekonomické vědy uplynulého 20. století. Paul A. Samuelson zemřel 13. prosince 2009 v Belmontu, Massachusetts, ve věku 94 let.

1.2.2 Kenneth Joseph Arrow

Kenneth Joseph Arrow získal Nobelovu cenu v roce 1972 společně s J. R. Hicksem za průkopnické příspěvky k teorii všeobecné rovnováhy a za teorii blahobytu.

Kenneth Joseph Arrow se narodil 23. srpna 1921 v New Yorku. V roce 1940 byl promován na bakaláře společenských věd, avšak jeho hlavní zájem upoutala matematika. V dalším studiu pokračoval na Kolumbijské univerzitě, kde v roce 1941 získal titul M. A. v oboru matematika. Toto studium bylo přerušeno druhou světovou válkou, když musel sloužit jako důstojník meteorologické služby. V letech 1948 – 1949 zastával na Chicagské univerzitě post docenta ekonomie. Inspirací pro něj byly letní pobyty od roku 1948 financované korporací RAND, kde se seznámil s teorií her a matematickým programováním. Od roku 1949 působil na Stanfordské univerzitě, kde setrval až do roku 1968, aby zde nakonec dosáhl titulu profesora ekonomie, statistiky a operačního výzkumu. V roce 1968 přijal jmenování profesorem ekonomie na Harvard University.

K. J. Arrow je vědec širokého rozhledu a záběru. Na svém kontě má významná díla z oblasti ekonomické teorie, publikace z oborů teorie řízení, matematického programování a statistiky, ale i četné přehledové monografie a empirické studie. Jeho hlavní přínos je v obohacení ekonomické metodologie o nové pojmy a instrumenty, především při řešení problému všeobecné rovnováhy a v otázce veřejné volby.

1.2.3 John Charles Harsanyi, John Forbes Nash, Reinhard Selten

Nobelovu cenu získal J. C. Harsanyi v roce 1994 společně s J. F. Nashem a R. Seltenem. Ta jim byla udělena za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her.

John Charles Harsanyi se narodil 29. května 1920 v Budapešti. Jeho rodiče vlastnili lékárnu a jako jedináček převzal rodinný podnik. On však měl více zájem o filozofii a matematiku. Na budapešťské univerzitě získal doktorát filozofie, ale v roce 1950 musel emigrovat do Austrálie. Zde v Sydney studoval ekonomii a od roku 1964 pracoval na Univerzity of California v Berkeley jako profesor. Teorii her, kterou se převážně zabýval, přispěl prohloubením zpracování přístupů pro analýzu her při neúplné informovanosti účastníků. Tím poskytl teoretické základy pro aktivní výzkumy oblasti ekonomie informací, kde jsou rozebírány strategické situace, v nichž jednotlivé ekonomické subjekty neznají cíle jiných ekonomických subjektů. J. C. Harsanyi koncem 60. let vytvořil metodu, jak převést hry s neúplnými informacemi na hry s úplnými informacemi, které pak mohou být analyzovány s pomocí standardních nástrojů. Odstranil tak druhý hlavní nedostatek konceptu Nashovy rovnováhy, kde jednotliví účastníci hry mají úplné informace o preferencích ostatních hráčů.

John C. Harsanyi pracoval nejen v oblasti výzkumu teorie her, ale také svým způsobem přispěl k základům teorie blahobytu a věnoval se i filozofii morálky. Zemřel 9. srpna 2000 v Berkeley.

John Forbes Nash se narodil 13. června 1928 v Bluefield v Západní Virgínii. Vystudoval na univerzitě v Princetonu matematiku, v roce 1950 zde získal doktorát a na univerzitě působí dodnes. Jeho nejznámější úspěch je zavedení pojmu Nashova rovnováha, která se uplatňuje nejen v teorie her, ale i v některých částech teoretické ekonomie. Tento pojem zformuloval v roce 1951. Rovnováhu představuje soubor strategií nekooperativní hry, při které ani jeden z hráčů nemůže zlepšit svou strategii, pokud ostatní hráči nezmění svou strategii.

Od roku 1959 trpěl mentálními poruchami, avšak po zlepšení zdravotního stavu se vrátil k vědecké práci. O jeho životě, práci i schizofrenii byl natočen v roce 2001 americký film Čistá duše, který získal čtyři Oscary.

Reinhard Selten se narodil 10. října 1930 ve Vratislavi v tehdejším Německu. V roce 1961 získal doktorát na Frankfurtské univerzitě, kde se následně v roce 1968 habilitoval. Poté působil na Svobodné univerzitě v Berlíně, kde pracoval jako profesor. Od roku 1972 přešel na univerzitu do Bielefeldu a od roku 1984 je profesorem na Rheinische Friedrich-Wilhelm-Universität v Bonnu. Zpočátku se R. Selten zabýval oligopolním modelem. V roce

1965 absolvoval seminář z teorie her v Jeruzalémě, kterého se účastnily špičky oboru a kde se seznámil s Harsanyim. Teorii her poté aplikoval nejen na průmyslové podniky, ale i do jiných oblastí: zkoumal evoluční stabilitu a konstruoval teoretický model opylení rostlin včelami.

Podle slov samotného R. Seltena, se dá teorie her aplikovat na kdeco - na politiku hospodářské konjunktury, kartelové zákonodárství, konkurenční boj, rozhodovací proces v podnicích, ale také na politický a volební zápas a fungování politických stran.

1.2.4 William Spencer Vickrey

W. S. Vickrey získal v roce 1996 Nobelovu cenu společně s J. A. Mirrleesem za zásadní přispění k ekonomické teorii pobídek v podmínkách asymetrických informací.

William Spencer Vickrey se narodil 21. června 1914 v kanadské Victorii. V roce 1935 získal na univerzitě v Yale titul bakaláře, v roce 1937 se stal magistrem na Columbia University v New Yorku a v roce 1947 zde získal doktorát. Od roku 1946 vyučoval ekonomii. V roce 1958 se stal řádným profesorem ekonomie, v roce 1971 profesorem politické ekonomie a od roku 1982 byl emeritním profesorem. Ve vědecké činnosti se zabýval především teorií daňových systémů a optimální výší zdanění. Zkoumal nejlepší způsoby rozhodnutí ekonomických subjektů, pokud mají neúplné či nerovnoměrné rozdělení informací. Věnoval se výzkumu informační nejistoty dražeb a jeho jménem byl pokřtěn nový způsob dražení. Podle něj neplatí „odklepnutá“ nabídka ceny vítěze, ale cena druhé nejvyšší nabídky. Tato teoretická doporučení se prakticky uplatnila také v pojišťovnictví a při poskytování úvěrů.

W. S. Vickrey proslul také jako kritik měnové unie v rámci Evropské unie. Zemřel náhle 11. října 1996.

1.2.5 Robert John Aumann, Thomas Crombie Schelling

R. J. Aumann získal Nobelovu cenu spolu s Thomasem C. Schellingem v roce 2005 za zvýšení porozumění konfliktům a spolupráci prostřednictvím analýzy teorie her.

Robert John Aumann se narodil 8. června 1930 ve Frankfurtu nad Mohanem. V roce 1938 se s rodiči odstěhoval do USA. Na Massachusetts Institute of Technology získal v roce 1955 doktorát. V roce 1968 získal profesuru na Hebrew University of Jerusalem a v současné době má titul emeritního profesora. V době udílení ceny se zabýval teorií „nekonečně opakovaných her“, která usiluje o odhadnutí výsledků dlouhodobých procesů a vztahů. Spolu s T. Schellingem se pokoušeli odpovědět na otázku, proč některé skupiny, organizace a země spolupracují, zatímco jiné ovládají konflikty. Aumann byl členem např. Econometric Society a American Economic Association. Dostal také mnohá významní ocenění za svou vědeckou práci – např. Israel Prize in Economics, EMET Prize in Economics.

V roce 1955 se Robert J. Aumann oženil s Esther Schlesinger, se kterou měl pět dětí. Jeho nejstarší syn Shlomo roku 1982 tragicky zahynul během výkonu služby v izraelské armádě. Aumann ovdověl roku 1988 a v roce 2005 se znovu oženil. Manželkou se stala ovdovělá sestra jeho zemřelé ženy, Batya Cohn. V současnosti má R. Aumann 19 vnoučat a dvě pravnoučata.

Thomas Crombie Schelling se narodil 14. dubna 1921 v Oakland v Kalifornii. V roce 1951 získal doktorát na Harvard University. Než začal akademickou dráhu, pracoval v americké administrativě. Následně působil na Harvard University, kde má čestnou profesuru. V současnosti přednáší na University of Maryland, kde je profesorem na katedře ekonomie. Ve svých pracích se Schelling zabýval mj. konflikty mezi státy, které mají možnost zbrojit oba či nezbrojit. Závěry prací naznačily cestu pro řešení konfliktů a snahu, jak se vyhnout válkám. Svoji teorii vyvíjel v padesátých letech, aby nalezl optimální strategii Spojených států ve studené válce. Dále se Schelling věnuje v rámci ekonomické teorie i dalším tématům, od ekologie až po organizovaný zločin.

1.2.6 Leonid Hurwicz, Eric Stark Maskin, Roger Bruce Myerson

L. Hurwicz získal v roce 2007 společně s E. S. Maskinem a R. B. Myersonsem Nobelovu cenu za položení základů teorie vytváření mechanismů.

Leonid Hurwicz se narodil 21. srpna 1917 v Moskvě a pocházel z polské židovské rodiny. Za několik měsíců po jeho narození se rodina odstěhovala zpět do Varšavy, kde L. Hurwicz studoval práva na Varšavské universitě. V roce 1939 začal studovat na London School of Economics a poté se dostal do Ženevy. Ve svých studiích dále pokračoval na Harvard University a University of Chicago. V roce 1980 získal titul doktor věd na Northwestern University. Hurwicz se ve svém díle zabýval zejména matematikou v souvislostech s ekonomií, modelováním a teorií firem.

Leonid Hurwicz zemřel 24. června 2008 v Minneapolis v Minnesotě.

Eric Stark Maskin se narodil v New York City 12. prosince 1950. Na Harvard University získal titul A.A. z matematiky, A.M. z aplikované matematiky a Ph.D. také z aplikované matematiky. V současné době je profesorem v Princetonu na Institute for Advanced Study a vyučuje na Princeton University. Je členem např. Game Theory Society, American Economic Association a také European Economic Association.

Roger Bruce Myerson se narodil 29. března 1951 v Bostonu v Massechusetts. V roce 1973 získal na Harvard University titul A. B. z aplikované matematiky, v roce 1976 v tomto oboru získal titul Ph.D. Na Northwestern University přednášel v letech 1976 – 2001 a od roku 2001 je profesorem na University od Chicago. Mimo jiné je R. B. Myerson vicepresidentem Econometric Society a členem American Academy of Arts. Je autorem několika knižních publikací a mnoha příspěvků do odborných periodik. Dále je autorem užitečných softwarových aplikací, které jsou kompatibilní se softwarem firmy Microsoft.

1.2.7 Alvin Eliot Roth, Lloyd Stowell Shapley

A. E. Roth dostal spolu s L. S. Shapleym Nobelovu cenu v roce 2012 za teorii stabilních alokací a praktické návrhy podoby trhů.

Alvin Eliot Roth se narodil 18. prosince 1951 v New Yorku. Zabýval se operačním výzkumem na Columbia University, kde studoval. V roce 1974 získal titul Ph.D. za operační výzkum na Stanford University. Přednášel na University of Illinois, na University of Pittsburgh a na Stanford University. Na Harvard University přednáší jako emeritní profesor. Roth se věnoval především teorii her, návrhu trhů a experimentální ekonomice. Vypracoval např. nové postupy pro optimální přijímání absolventů základních škol do středních škol s aplikací pro New York a Boston. Je členem American Academy of Arts and Sciences a Econometric Society.

Lloyd Stowell Shapley se narodil 2. června 1923 v Cambridge. Na Harvardu začal studovat matematiku. V roce 1943 však musel během studií odejít do armády, kde byl v roce 1944 vyznamenán medailí Bronzová hvězda, zejména za rozluštění japonského meteorologického kódu. Po ukončení II. světové války se vrací na Harvard a v roce 1948 zde získává titul A.B. v oboru matematika. V roce 1953 získal titul Ph.D. a v roce 1981 se stává profesorem. Ve svých pracích se věnuje především teorii her a přiřazovacím postupům. Vytvořil např. algoritmus, který zajišťuje vždy stabilní párování. Známý je též tzv. Galeův-Shapleyho algoritmus, čili „problém stabilních manželství“. Je členem Econometric Society, členem American Academy of Arts and Sciences a čestným členem American Economic Association.

2 CHARAKTERISTIKA TEORIE HER

Předmětem teorie her jsou rozhodovací situace, které tato vědní disciplína modeluje a řeší. Cílem teorie her je nalezení optimální strategie, což je strategie zajišťující co nejvyšší výhru nezávisle na tom, jakou strategii volí protihráč. Takovýto přístup poskytuje všem hráčům výběr nejlepšího, nejpřijatelnějšího řešení.

2.1 Vymezení základních pojmů

Původně se teorie her zabývala společenskými hrami, jako jsou šachy, poker, bridž nebo kostky, což se odrazilo i v odlišném názvosloví, než jsou ekonomové zvyklí. Teoreticko-herní terminologie má výhodu ve své obecnosti, kdy se při popisu situace nezaměřujeme na specifický druh konfliktu. Maňas [18] uvádí jako příklad naprogramování simulátorů pro piloty vojenských stíhaček, jejichž cílem je cvičit se v likvidaci protivníka. Zde může být nepraktické mluvit o konfliktu zájmů.

Tabulka 1 stručně charakterizuje jednotlivé základní pojmy používané v teorii her.

Tabulka 1: Základní pojmy teorie her

Teorie her	Ekonomická realita
Hra	Rozhodovací situace, konflikt
Hráč	Účastník konfliktu, rozhodovatel, firma, jedinec, politická strana
Strategie	Konkrétní alternativa, kterou může hráč zvolit
Optimální strategie	Hráčem zvolená alternativa, která je pro něj nejvýhodnější
Prostor strategií	Seznam všech možných alternativ, které jsou hráči dostupné
Výplatní funkce	Výsledek hry, výhra či zisk hráče v závislosti na zvolených strategiích

Zdroj: [3]

Jednotlivé charakteristiky následujících pojmů jsou převzaty z Volka [29] a upraveny.

Hra je souborem pravidel a podmínek, které určují, jaké alternativy mohou volit jednotliví hráči, v jakém pořadí je volí a jaká je jejich výhra, která závisí na uskutečněné volbě. Dále můžeme hrou rozumět matematický model rozhodovací situace. Dle [31] je hra jednoduše souhrn pravidel, které ji popisují.

Hráč je každý jednotlivý účastník rozhodovací situace. Je to také nositel práva na volbu závazných rozhodnutí. Hráči se dělí dle cílevědomosti chování na hráče inteligentní, do této skupiny patří vždy člověk, a hráče neinteligentní, neboli náhodný mechanismus, zástupcem je příroda. Některé prameny uvádějí i p-inteligentního rozhodovatele, který se chová jako inteligentní rozhodovatel s pravděpodobností p a jako neinteligentní rozhodovatel s pravděpodobností $1 - p$. Inteligentní hráči se vždy snaží maximalizovat svůj příjem, užitek.

Partie hry je označení pro realizaci souboru pravidel a podmínek hry. Podle [31] je to každý jednotlivý případ, kdy je hra hrána od začátku do konce.

Tah je moment hry, ve kterém se uskutečňuje volba jedné alternativy z množiny možných alternativ. Tahy se dále dělí na osobní tah, kdy je volba jedné alternativy volbou racionálního hráče, a náhodný tah, kdy je volba realizována náhodným mechanismem.

Platba (výplata, výhra) se uskutečňuje vždy na konci každé partie a je závislá na volbě každého hráče a na pravidlech hry.

Strategie označuje způsob rozhodování hráče v rozhodovacích situacích.

Optimální strategie je taková, která zajišťuje hráči v dané konfliktní situaci (hře) nejvyšší dosažitelnou hodnotu výplatní funkce.

Výplatní funkce závisí na rozhodnutí hráče samotného, ale i na rozhodnutí ostatních hráčů.

2.2 Klasifikace her podle různých kritérií

Podle Volka [29] existuje několik charakteristik, podle kterých klasifikujeme hry.

Podle *počtu účastníků* je dělíme na hry:

- jednoho hráče,
- dvou hráčů,
- *n* hráčů.

Podle *počtu alternativ* v každém tahu jsou hry:

- s konečným počtem alternativ (konečné hry),
- s nekonečným počtem alternativ (nekonečné hry).

Podle příslušnosti rozhodovacího problému k *oblasti společenské praxe* dělíme hry na:

- salonní,
- ekonomické,
- vojenské.

Podle *možnosti a stupně spolupráce* rozlišujeme hry:

- kooperativní,
- nekooperativní.

Podle *charakteru plateb* hovoříme o hrách s:

- konstantním součtem,
- nekonstantním součtem.

Podle *množství informací*, které mají hráči o předchozích tazích k dispozici, mluvíme o hrách:

- s dokonalou informací,
- s nedokonalou informací.

Podle *pravděpodobnosti výhry* jednotlivých hráčů dělíme hry na:

- spravedlivé/korektní (matematická naděje na výhru je pro všechny účastníky stejná),
- nespravedlivé/nekorektní.

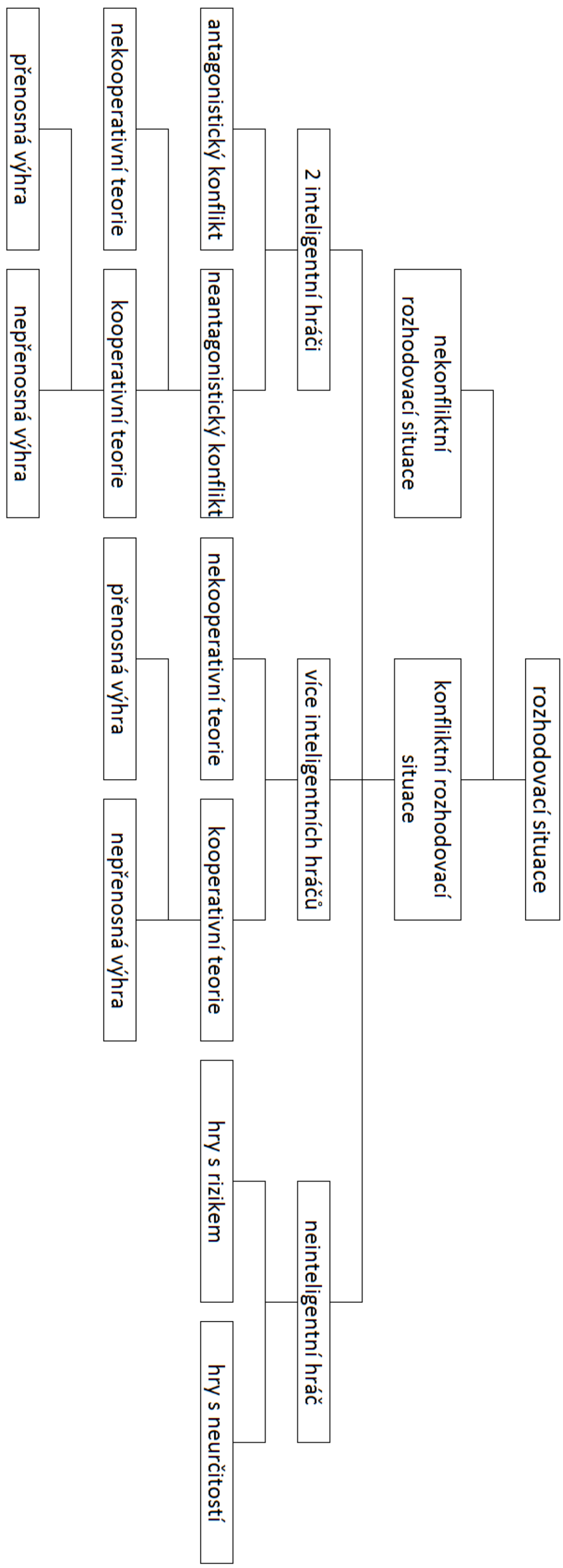
Podle *složení množiny hráčů* rozlišujeme hry:

- inteligentních hráčů,
- s neinteligentním hráčem, tzv. hry proti přírodě.

Hry s neinteligentním hráčem dále dělíme podle *znalosti mechanismu volby tahů neinteligentním hráčem* na hry:

- s neurčitostí (není znám mechanismus volby tahů neinteligentního hráče),
- s rizikem (známe zákon, který rozdělí pravděpodobnosti volby tahů neinteligentního hráče).

Na obrázku 1 je schematicky uvedena klasifikace rozhodovacích situací.



Obrázek 1: Schéma rozhodovacích situací

Zdroj: [29]

Maňas [5] se odkazuje při členění na klasifikaci používanou mezinárodními referátovými časopisy, v jejímž čele uvádí časopis Mathematical Review. Teorie her se podle této kategorizace dělí takto:

1. hry dvou hráčů
2. hry n hráčů nekooperativní
3. hry n hráčů kooperativní
4. nekonečné hry
5. víceetapové hry stochastické
6. víceetapové hry rekursivní
7. diferenciální hry
8. herní modely pronásledování a úniku
9. teorie užitku
10. teorie rozhodování
11. teoreticko herní modely
12. poziční hry
13. aplikace teorie her

2.3 Rozhodovací situace

V rozhodovací situaci se provádí výběr jedné z možných alternativ. Nutnou podmínkou pro správné rozhodnutí je dosažení určitého cíle.

2.3.1 Nekonfliktní rozhodovací situace

Nekonfliktní rozhodovací situace nastává tehdy, pokud v ní vystupuje pouze jeden účastník. Zápis takové situace je následující:

$$\{Q = \{1\};\ X;\ M_1(x)\}. \quad (1)$$

kde: $Q = \{1\}$ je množina hráče,

X je prostor strategií,

$M_1(x)$ je výplatní funkce hráče, $x \in X$.

Příkladem takových situací jsou dopravní úlohy, přiřazovací problémy, určování výrobní kapacity.

2.3.2 Konfliktní rozhodovací situace

Dle Volka [29] je významnou skupinou rozhodovacích situací skupina konfliktních rozhodovacích situací, které vyhovují následujícím podmínkám:

- účastníci rozhodovací situace jsou alespoň dva,
- každý účastník rozhodovací situace zná množinu možných strategií svého chování a zná i množinu možných strategií svého protivníka/protivníků,
- každý účastník rozhodovací situace dovede zhodnotit efektivnost své volby ve všech možných případech, které mohou nastat (při libovolných strategiích, které zvolí protivníci),
- každý účastník rozhodovací situace rozhodne o své strategii z množiny možných alternativ nezávisle na volbách protivníků (nemá informace o strategiích, které zvolí protivníci),
- nejméně jeden z účastníků rozhodovací situace je inteligentní hráč, to znamená, že jedná rozumně a svou volbou se snaží dosáhnout stanoveného cíle.

Účastníkem konfliktní rozhodovací situace může být i neinteligentní hráč, tedy příroda nebo též náhodný mechanismus. V takové situaci tento hráč nesleduje určitý cíl a jeho jednání je možné považovat za neurčité nebo nepředvídatelné s jistou pravděpodobností. Takové hry označujeme za hry proti přírodě.

2.3.3 Matematický model rozhodovací situace

K popisu a řešení rozhodovací situace využívá teorie her tři různé modely:

- hra v normálním tvaru,
- hra ve tvaru charakteristické funkce,
- hra v explicitním tvaru.

2.3.4 Hra v normálním tvaru

Základním modelem je hra v normálním tvaru. Popis konfliktu je určen množinami:

- účastníků,
- prostorů strategií,
- výplatních funkcí.

Účastníkem rozhodovací situace mohou být fyzické osoby, instituce, či jiné elementy, na jejichž rozhodnutí a chování je závislý výsledek dané situace. Je vhodné označovat účastníky pořadovými čísly.

Prostor strategií značí všechny možná rozhodnutí určitého hráče.

Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostorů strategií a udávají výši výhry určitého hráče. Pokud je tato hodnota záporná, je to prohra, tedy částka, kterou musí určitý hráč zaplatit.

Matematicky lze hru v normálním tvaru zapsat následovně:

$$\{Q;\ X_i;\ M_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}, \tag{2}$$

kde: $Q = \{1,2,\ldots, n\}$ je množina hráčů,

X_i, $i = 1,2,\ldots,n$ jsou prostory strategií,

$M_i(x_1,x_2, \ldots,x_n)$, $i = 1,2,\ldots,n$ jsou výplatní funkce hráčů, $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.

2.3.5 Hra ve tvaru charakteristické funkce

Podle Maňase [18] je v některých případech rozhodovací situace výhodné dohodnout se v určité skupině hráčů na spolupráci, která zlepší jejich výsledek v konfliktní situaci. Taková skupina hráčů tvoří tzv. koalici. Při posuzování síly a výhodnosti jednotlivých koalic pro jednotlivé členy je nutné znát hodnotu úhrnné výhry koalice, kterou koalice může získat již bez spolupráce s nečleny koalice. Charakteristická funkce hry, je taková funkce, která každé z potenciálně možných koalic přiřazuje jejich celkovou možnou výhru, tedy reálné číslo.

2.3.6 Hra v explicitním tvaru

Většina salónních her a některé rozhodovací situace jsou založené na realizaci postupných tahů. Taková hra se nazývá tahová. Cílem hráče je dosáhnout vítězství nebo alespoň podílu na výhře. Popis rozhodovací situace, která probíhá formou postupně prováděných tahů, lze modelovat hrou v explicitním tvaru. Tento model je založen na znázornění rozhodovací situace a všech možných tahů pomocí grafu, který má tvar stromu. Strom hry tedy zachycuje všechny možné situace, do kterých se může hra dostat. Každá situace je charakterizována uzlem, ze kterého vychází určitý počet hran, které odpovídají možným rozhodnutím, čili tahům daného hráče.

2.4 Antagonistické hry

O antagonistické hře mluvíme v případě, kdy jsou zájmy hráčů v přímém protikladu. Hráči se snaží maximalizovat svou výhru na úkor jiného či jiných hráčů. Jeden účastník ztrácí to, co získává druhý účastník. V této situaci nemají spolupráce nebo dohody mezi účastníky význam.

Maňas [17] uvádí: „Antagonistické konflikty jsou charakteristické pro situace, s nimiž se setkáváme v oblasti politických nebo vojenských střetnutí. V oblasti ekonomického rozhodování jde o případy do důsledku dovedené konkurence dvou firem. Takovýto typ konkurence se dnes vyskytuje většinou pouze v učebnicích, takže teorie antagonistických konfliktů se v ekonomickém rozhodování aplikuje přímo jen zřídka. Její zásadní význam spočívá v tom, že prvků této teorie se využívá pro řešení řady složitějších konfliktů.“ Jde o historicky nejstarší část teorie her a v jistém smyslu i nejjednodušší.

2.4.1 Hry s konstantním součtem

Antagonistického konfliktu dvou hráčů se účastní dva inteligentní hráči, kteří se snaží maximalizovat svoji výhru na úkor protihráče. Součet výplatní funkce je roven konstantě K. Je tedy zřejmě možné omezit se na jednu výplatní funkci, neboť pro všechna $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ platí

$$M_1(x_1,x_2) = - M_2(x_1,x_2) + K.$$

Pokud tedy známe $M_1(x_1,x_2)$ a K, známe i hodnotu výplatní funkce hráče 2. K je předem dané číslo.

O hře s nulovým součtem mluvíme tehdy, když součet výher je nula bez ohledu na volbu strategií. Pro tuto hru platí:

$$M_1(x_1,x_2) = - M_2(x_1,x_2), \text{ resp. } M_1(x_1,x_2) + M_2(x_1,x_2) = 0.$$

Hru můžeme pomocí matematického modelu zapsat v normálním tvaru takto:

$$\{Q = \{1,2\};\ X,\ Y\ ;\ M_1(x,y),\ M_2(x,y)\},\qquad (3)$$

kde: Q je množina hráčů,

X, Y jsou prostory strategií prvního a druhého hráče,

$M_1(x,y)$, $M_2(x,y)$ jsou výplatní funkce hráčů 1 a 2.

2.4.2 Optimální strategie

Definice 2.1 *Optimální strategií hráče 1 ve hře (3) nazveme takovou strategii $\bar{x} \in X$, ve které existuje strategie $\bar{y} \in Y$ tak, že*

$$M_1(x,y) \leq M_1(\bar{x},\bar{y})$$

$$M_2(x, y) \leq M_2(\bar{x},\bar{y})\qquad (4)$$

pro všechna $x \in X$, $y \in Y$. Strategii $\bar{y}$ potom nazveme optimální strategií hráče 2.

Je-li

$$\{Q = \{1,2\};\ X,\ Y\ ;\ M(x,y)\}\qquad (5)$$

hra s nulovým součtem, můžeme nerovnosti (4) napsat ve tvaru

$$M(x,\bar{y}) \leq M(\bar{x},\bar{y}) \leq M(\bar{x},y).\qquad (6)$$

Dvojici strategií $(\bar{x},\bar{y})$ s vlastnostmi požadovanými v (4), popř. v (6), nazveme řešení hry v normálním tvaru (3), popř. (5). U her s nulovým součtem se číslo $M(\bar{x},\bar{y})$ nazývá cena hry. [17]

2.4.3 Maticové hry

„Maticová hra je matematickým modelem této základní situace: je dána matice reálných čísel typu m x n. První hráč volí řádek matice, druhý hráč nezávisle na něm volí sloupec matice. Potom své volby zveřejní a první hráč dostane od druhého hráče částku rovnou prvku na průsečíku zvoleného řádku a sloupce. Je-li vybraný prvek záporný, jde platba obráceným směrem. Hlavním úkolem teorie maticových her je objasnit, podle jakých pravidel mají hráči provést své volby tak, aby maximalizovali své výhry, případně minimalizovali své ztráty. [5]

Definice 2.2 *Konečnou hru s nulovým součtem*

$$\{Q = \{1,2\};\ X = \{1,2,\dots,m\}\ ,\ Y = \{1,2,\dots,n\};\ M(i,j) = a_{ij},\ i \in X,\ j \in Y\}, \tag{7}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

je daná matice, nazveme maticovou hrou. [17]

Konečnou hru s nulovým součtem $\{Q = \{1,2\};\ X,\ Y\ ;\ M(i,j) = (a_{ij})\}$, kde X a Y jsou konečné množiny tahů hráčů, nazveme maticovou hrou. Maticová hra je určena maticí A typu m × n, kde prvky matice jsou reálná čísla. Matice se nazývá maticí plateb/výher pro prvního hráče. [29]

Jestliže cena hry (hodnota hry) $v \neq 0$ je hra nekorektní (nespravedlivá), což znamená, že jeden z hráčů má větší pravděpodobnost výhry. Při korektní (spravedlivé) hře mají všichni hráči stejnou pravděpodobnost výhry.

Nerovnosti znázorněné v (6) vyjadřují fakt, že pokud se jeden z hráčů odchýlí od své optimální strategie, zatímco jeho soupeř se jí bude držet, jeho výhra se sníží. Takto definované optimální strategie se nazývají Nashovy rovnovážné strategie.

Definice 2.3 *Budiž (7) daná maticová hra. Hru dvou hráčů s nulovým součtem, jejíž prostory strategií jsou*

$$(X) = \{x^T = [x_1,\ \dots,\ x_m];\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x \geq 0\}, \tag{9}$$

$$(Y) = \{y^T = [y_1,\ \dots,\ y_n];\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y \geq 0\}, \tag{10}$$

a výplatní funkce

$$M(x,y) \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T Ay,$$

nazveme smíšeným rozšířením maticové hry (7).[17]

Věta 2.1 Základní věta maticových her *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení.* [17]

Praktický způsob, jak najít optimální smíšené strategie pro danou maticovou hru, je použití lineárního programování. [20]

2.4.4 Princip minimaxu

Nashovy rovnovážné strategie získáme tak, že nalezneme sedlový prvek matice A. Pro každou matici platí nerovnost:

$$\max_i (\min_j a_{ij}) \leq \min_j (\max_i a_{ij}).$$

Jestliže platí

$$\max_i (\min_j a_{ij}) = \min_j (\max_i a_{ij}),$$

pak mluvíme o tom, že matice má sedlový prvek. Sedlový prvek matice je číslo největší ve svém sloupci a zároveň nejmenší ve svém řádku. Je-li a_{ij} sedlový prvek, pak i-tá strategie prvního hráče optimální a j-tá strategie druhého hráče jsou optimální. Hodnotu a_{ij} nazýváme cenou hry. [3]

Při hledání sedlového prvku v matici můžou nastat následující tři možnosti:

1. Matice má pouze jeden sedlový prvek, který je Nashovým rovnovážným řešením.
2. Matice má několik sedlových prvků a hodnoty těchto prvků jsou si rovny, pak tyto sedlové prvky určují alternativní optimální strategie.
3. Matice nemá žádný sedlový prvek. V tomto případě se nepodařilo nalézt optimální řešení daným způsobem. Hra tedy nemá řešení v oboru čistých strategií. [3]

2.4.5 Čistá a smíšená strategie

Smíšená strategie hráče 1 je řádkový vektor $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, který obsahuje nezáporné složky $0 \leq x_i \leq 1$, tak že $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Smíšená strategie hráče 2 je sloupcový vektor $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ s nezápornými složkami $0 \leq y_i \leq 1$, tak že $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Smíšená strategie hráče 1, jejíž i-tá složka je rovna jedné a ostatní složky jsou rovny nule, se nazývá **čistou strategií** hráče 1. Analogicky pro hráče 2 nazýváme čistou strategii tu, jejíž j-tá složka je rovna jedné a ostatní složky jsou rovny nule. [29]

2.4.6 Dominance

Dominance znamená redukce matice plateb. Tuto metodu použijeme, pokud matice neobsahuje sedlový bod, a tudíž nemůžeme použít čistou strategii, ale pouze smíšenou. Tato metoda vyřadí tedy strategie, které nemá smysl volit a můžeme tak zmenšit rozměr matice. „První hráč nebude volit ten řádek matice, ve kterém jsou všechny prvky menší než odpovídající prvky v jiném řádku. Druhý hráč nebude volit ten sloupec matice, ve kterém jsou všechny prvky větší (prvky značí jeho prohru) než odpovídající prvky v jiném sloupci. Jde o tzv. silně dominovanou strategii a platí, že hráč nikdy nezvolí silně dominovanou strategii. Pokud platí, že v jednom řádku (sloupci) jsou všechny prvky menší nebo rovny prvkům druhého řádku (sloupce) jde o slabě dominovanou strategii.“ [3]

2.5 Neantagonistické hry

Neantagonistické hry jsou v praxi mnohem častější, než hry antagonistického typu. Neantagonistické hry představují takovou situaci, kdy každý z účastníků sleduje své vlastní zájmy, které však nemusejí být v přímém protikladu ostatních. V takovýchto případech dále rozlišujeme hry podle toho, zda hráči mají či nemají možnost uzavírat před volbou dohodu o tom, jakou volbu zvolí. Tyto neantagonistické konflikty dělíme podle možnosti spolupráce do dvou skupin:

- nekooperativní hry,
- kooperativní hry.

Kooperativní hry dělíme dále podle možnosti rozdělení výhry mezi hráče:

- kooperativní hry s přenosnou výhrou,
- kooperativní hry s nepřenosnou výhrou.

2.5.1 Nekooperativní hry

Definice 2.4 *Mějme dánu hru dvou hráčů s nekonstantním součtem*

$$\{Q = \{1,2\};\ X, Y;\ M_1(x,y), M_2(x,y)\}. \tag{10}$$

Dvojici strategií $\bar{x}$, $\bar{y}$ nazveme rovnovážným bodem této hry, jestliže platí současně

$$M_1(x,\bar{y}) \leq M_1(\bar{x},\bar{y})$$

$$M_2(\bar{x}, y) \leq M_2(\bar{x},\bar{y}) \tag{11}$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. Strategie $\bar{x}$ se nazývá rovnovážná strategie hráče 1 a $\bar{y}$ se nazývá rovnovážná strategie hráče 2.[20]

Při srovnání vztahů (4) a (11) lze vidět jistou analogii, která však není dokonalá. „Poškodí-li se totiž u hry s konstantním součtem jeden hráč nevhodnou volbou strategie, je jeho protihráč automaticky zvýhodněn právě o tu částku, o kterou se chybující hráč poškodil. U her s nekonstantním součtem tomu tak není. Je dokonce možné, že hráč, který nevolí rovnovážnou strategii, vyhraje sice méně, než kdyby ji volil, ale současně může poškodit i hráče, který rovnovážnou strategii volil, a to třeba i více než sebe. Je tedy stupeň vynucování volby rovnovážného bodu podstatně slabší než u optimálních strategií ve hrách s konstantním součtem. Tato skutečnost je příčinou toho, proč zatím mluvíme o rovnovážných, a nikoli o optimálních strategiích.“ [17]

2.5.2 Dvojmaticové hry

Konečnou hru s nekonstantním součtem můžeme popsat dvěma následujícími maticemi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Tyto matice lze spojit do jedné tabulky tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11},b_{11} & a_{12},b_{12} & \dots & a_{1n},b_{1n} \\ a_{21},b_{21} & a_{22},b_{22} & \dots & a_{2n},b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1},b_{m1} & a_{m2},b_{m2} & \dots & a_{mn},b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Číslo v řádku dvojmatice koresponduje s číslem strategie hráče 1, číslo sloupce koresponduje s číslem strategie hráče 2. Vybere-li si hráč 1 strategii i a hráč 2 strategii j, pak výhra hráče 1 je a_{ij} a výhra hráče 2 je b_{ij}.

Definice 2.5 *Konečná hra*

$$\{Q = \{1,2\}; X = \{1,2,\dots m\}, Y = \{1,2,\dots,n\}; M_1(i,j) = a_{ij}, M_2(i,j) = b_{ij}, i \in X, j \in Y\}, \qquad (15)$$

kde a_{ij} a b_{ij} jsou prvky matic (12) a (13), se nazývá dvojmaticová hra s maticemi (12) a (13). [17]

„U nekooperativní teorie zavedeme pojem rovnovážného bodu hry. Dvojici strategií $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$ nazveme rovnovážným bodem hry, jestliže platí

$$f_1(x,y^0) \leq f_1(x^0,y^0)$$

$$f_2(x^0,y) \leq f_2(x^0,y^0) \qquad (16)$$

pro všechna $x \in X$, $y \in Y$." [7] Dvojice x^0 a y^0 se nazývá Nashovy rovnovážné strategie.

$F_1(x,y)$ a $f_2(x,y)$ jsou množiny výplatních funkcí hráčů 1a 2.

U dvoumaticových her se můžeme setkat s následujícími čtyřmi situacemi:

1. Nashovo rovnovážné řešení je jediné a tak dává návod k optimálnímu jednání pro oba hráče.
2. Rovnovážných řešení je více, jedno z nich je však pro oba hráče výhodnější než ostatní rovnovážná řešení (dané řešení dominuje ostatním). Hráči si tedy vyberou pro oba nejvýhodnější rovnovážné řešení.
3. Rovnovážných řešení je více, ale hráči se neshodnou, které rovnovážné řešení vybrat, jelikož každý hráč preferuje jiné rovnovážné řešení.
4. V dvoumaticové hře neexistuje žádné rovnovážné řešení. [8]

Pokud jsme nenalezli Nashovo rovnovážné řešení v čistých strategiích, využijeme smíšeného rozšíření dvoumaticové hry, jelikož platí věta 2.2.

Věta 2.2 *Smíšené rozšíření každé dvoumaticové hry má alespoň jeden rovnovážný bod.* [19]

2.5.3 Kooperativní teorie – přenosná výhra

Při hraní kooperativních her lze uzavřít s protihráčem smlouvu o volbě strategie či o pozdějším rozdělení výhry. Smlouvu je vhodné uzavřít, pokud mohou hráči spoluprací získat více než při samostatném rozhodování. Předpokladem je, že hráči se zajímají jen o zcela zaručené výhry. To jsou takové, při kterých je protihráč nemůže v žádném případě ohrozit.

Pro hráče 1 označíme zajištěnou výhru jako

$$v(1) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_1(x,y), \tag{17}$$

pokud takový extrém existuje.

Pro hráče 2 označíme zajištěnou výhru jako

$$v(2) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} M_2(x,y). \tag{18}$$

Dále si hráči mohou zjistit výhru, kterou by mohli získat dohromady při spolupráci při volbě strategie. Tuto částku označíme v(1,2) a platí pro ni

$$v(1,2) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [M_1(x,y) + M_2(x,y)]. \tag{19}$$

Využít uzavření dohody bude výhodné v případě, že v(1,2) > v(1) + v(2), protože vedle zajištění minimální výhry může každý hráč případně získat něco navíc z přebytku v(1,2) – v(1) – v(2).

Definice 2.6 *Nechť pro hru dvou hráčů (10) s přenosnou výhrou existují čísla (17), (18) a (19). Potom tuto hru nazveme podstatnou, jestliže platí v(1,2) > v(1) + v(2), a nepodstatnou, jestliže platí v(1,2) = v(1) + v(2).* [17]

Další rozhodnutí nastává v případě rozdělení výhry.

Částku, kterou dostane hráč 1 ze společné výhry, si označíme a_1. Analogicky si označíme a_2 částku, kterou dostane hráč 2 ze společné výhry. „Vektor $[a_1,a_2]$ nazveme rozdělením. Pro hráče budou přijatelné takové hodnoty a_1, a_2, pro něž platí současně

$$a_1 + a_2 = v(1,2)$$

$$a_1 \geq v(1),\ a_2 \geq v(2). \tag{20}$$

Vztahy (20) říkají, že při dělení se musí rozdělit celá společná výhra, a dále, že každý hráč musí dostat alespoň tolik, kolik je schopen si zajistit samostatně. Množinu všech rozdělení splňujících (20) nazveme jádrem uvažované hry.“ [17]

Rozdělení výher na poloviny nebude zřejmě obecně vyhovovat, jelikož hráči se na výhře nemusejí podílet rovným dílem. Návodů na to, jak rozdělit výhry je mnoho. Jedním z nich je ten, že každý hráč si ponechá částku, kterou je schopen si sám uhradit a o zbytek se rozdělí v poměru přínosu hráčů ke společné výhře.

Dalším způsobem, jak rozdělit výhru je, že každý hráč si ponechá částku, kterou je schopen sám uhrát a o zbytek se hráči mezi sebou rozdělí stejným dílem. Tento návod můžeme zapsat pomocí matematické naděje výhry

$$\bar{a}_1 = [v(1,2) + v(1) - v(2)]/2,$$

$$\bar{a}_2 = [v(1,2) + v(2) - v(1)]/2. \qquad (21)$$

Definice 2.7 *V podstatné hře dvou hráčů s nekonstantním součtem nazveme strategie $\bar{x}$, $\bar{y}$ optimálními, jestliže pro ně platí*

$$v(1,2) = M_1(x,y) + M_2(x,y).$$

Optimálním rozdělením nazveme dvojici $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, pro kterou platí (20). Řešením podstatné hry potom rozumíme čtveřici $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. [17]

2.5.1 Kooperativní teorie – nepřenosná výhra

V případech nepřenosné výhry se sice smlouvy mohou uzavírat, avšak přenos výhry není možný. Takovéto situace nastávají v praxi, pokud je legální s druhou stranou spolupracovat, ale o výhru se nelze podělit, jelikož se na to dívá jako na úplatek, nebo výhru prostě rozdělit nelze. Příkladem může být smlouva o omezení zbrojení, kdy jedna strana nebude platit druhé v případě nezbrojení.

Definice 2.8 *Uvažujme hru $\{Q = \{1,2\}; X, Y ; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$ a nepřenosnou výhru. Dvojici čísel $[a_1,a_2]$ nazveme dosažitelným rozdělením, jestliže $a_1 \geq v(1)$, $a_2 \geq v(2)$ a jestliže existují strategie $x \in X$ a $y \in Y$ tak, že $a_1 = M_1(x,y)$, $a_2 = M_2(x,y)$. Množinu všech dosažitelných rozdělení označíme D.* [17]

Pokud v D existuje alespoň jeden prvek $[a_1,a_2]$, který má vlastnost $[a_1,a_2] \neq [v(1), v(2)]$, pak bude přinejmenším pro jednu stranu výhodné uvažovat o možnosti uzavření smlouvy o volbě strategie.

Definice 2.9 *Dosažitelné rozdělení $[b_1,b_2] \in D$ nazveme paretovským, jestliže neexistuje rozdělení $[a_1,a_2] \in D$ s vlastností $a_1 \geq b_1$ a $a_2 > b_2$ nebo $a_1 > b_1$ a $a_2 \geq b_2$. Množinu všech paretovských rozdělení označíme P.* [17]

„Paretovské rozdělení je tedy takové dosažitelné rozdělení, k němuž neexistuje jiné dosažitelné rozdělení, při němž by alespoň jeden hráč získal více a druhý stejně nebo také více než u prvního přijatelného rozdělení.“ [17]

Pokud má hra paretovských rozdělení více, pak je hra složitější a optimální řešení se hledá podle následující definice.

Definice 2.10 *Nechť* $\bar{b} = [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ *je střední hodnota rozložení pravděpodobností s nejmenším obsahem informace na množině P (pokud existuje). Rozdělení* $\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2] \in P$ *nazveme optimálním, jestliže vlastnost*

$$\rho\,(\bar{a},\bar{b}) = \min_{a \in P} \rho\,(a,\bar{b}) \qquad (22)$$

kde ρ je (euklidovská) metrika v E_2. *Optimálními strategiemi nazveme ty strategie* $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$, *pro které platí* $\bar{a}_1 = M_1(\bar{x},\bar{y},)$, $\bar{a}_2 = M_2(\bar{x},\bar{y})$.[17]

2.6 Hry s neúplnou informací

Předpokladem hry v normálním tvaru je, že hráči mají úplné informace, čímž je myšleno, že hráči znají výplatní matice všech ostatních hráčů. Přirozené je, že hráč zná svou matici výplat, ale můžeme zpochybnit fakt, že má hráč informace o výplatních funkcích ostatních hráčů. Dlouhý a Fiala [3] uvádějí „některé konfliktní situace, kde se existují oprávněné pochyby o úplnosti informací:

- Při aukci není reálné předpokládat, že dražitel zná hodnocení dražených položek ostatními dražiteli.
- Při přijímání nových zaměstnanců zaměstnavatel nezná schopnosti uchazečů o zaměstnání. Uchazeči mají zájem na tom, aby vypadali co nejschopnější.
- Při vyjednávání není vždy možné předpokládat, že hráč zná dokonale užitkové funkce ostatních hráčů.
- Modely oligopolu počítají s tím, že každá firma zná svou nákladovou funkci i nákladové funkce konkurentů. Obvykle firmy své náklady i jakékoli další firemní informace před konkurencí tají.
- V modelech oligopolu se rovněž zamysleme nad tím, zda všechny firmy mají za cíl maximalizaci zisku, nebo zda některé z firem nesledují jiné cíle."

Závěr je takový, že ve většině reálných situací pracujeme s neúplnou informací. V některých situacích však neznalost informace nemusí ovlivnit výsledek a tak můžeme přejít k hrám s úplnou informací, které mají za předpoklad pro všechny hráče úplné a shodné výchozí informace o hře (výplatní matice, prostory strategií hráčů či jiná „pravidla" hry). Jestliže však je neúplnost informací zásadní vlastností rozhodovací situace, musíme přistoupit k modelům, které patří do kategorie her s neúplnou informací, jejichž předpokladem je dostupnost různých výchozích informací všem hráčům na začátku hry. V teorii se tyto hry označují také jako Bayesovské hry.

2.6.1 Statická Bayesovská hra

„Způsob, jak modelovat a pochopit konfliktní situaci s neúplnou informací, rozvinul John C. Harsanyi z Kalifornské university v Berkeley. Harsanyi, pozdější nositel Nobelovy ceny za ekonomii za rok 1994, publikoval svoji teorii v rozsáhlém článku, rozděleném na tři části v časopisu Management Science v letech 1967-1968. Jeho teorie nabízí postup, jak ve hře s neúplnou informací tuto neúplnou informaci doplnit. Harsanyi navrhl zavést apriorní tah fiktivního hráče, nazvaného *Příroda*, který určuje typ každého hráče. Typ každého hráče, a tudíž i jeho preference, jsou výsledkem hodnoty náhodné proměnné, vybrané *Přírodou*.

Přestože jen hráč sám může zjistit svůj skutečný typ, všichni hráči znají očekávané pravděpodobnostní rozdělení, ze kterého jsou vybrány typy ostatních hráčů. Tudíž každý hráč zná svůj typ, všechny možné typy ostatních hráčů a pravděpodobnostní rozdělení těchto typů. To znamená, že hra je nyní hrou s úplnou informací, neboť všichni hráči znají všechny možné výplatní hodnoty všech typů všech hráčů. Zároveň jde o hru s nedokonalou informací, protože ne všichni hráči zjistí apriorní tah fiktivního hráče, nazvaného *Příroda*.“ [3]

Standardní předpoklad tedy je, že všichni hráči mají shodné předem dané názory na pravděpodobnostní rozdělení tahu přírody. Tímto dostáváme hru s úplnou, ale nedokonalou informací a můžeme tedy použít koncepci Nashovy rovnováhy. „Bayesovská hra je určena:

- množinou hráčů: $\{1, 2, ..., N\}$.
- množinou prostorů strategií: $\{X_1, X_2, ..., X_N\}$. Zde X_i označuje prostor strategií i-tého hráče. Konkrétní strategie budeme značit $(x_1, x_2, ..., x_N)$.
- množinou prostorů typů hráčů: $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$. Typ $t_i \in T_i$ odpovídá určité výplatní funkci, kterou může mít hráč i. Hráč i zná svůj typ, ale nezná typy dalších hráčů.
- množinou názorů hráčů: $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$. Názor p_i reprezentuje názor hráče i, který má informace o typech dalších hráčů. Názor hráče je modelově zachycen subjektivní pravděpodobnostní funkcí.

- množinou výplatních funkcí: $\{f_1(x_1, x_2, ..., x_N, t_1, t_2, ..., t_N), ..., f_N(x_1, x_2, ..., x_N, t_1, t_2, ..., t_N)\}$. Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostoru strategií a prostoru typů hráčů.“ [3]

V Bayesovské hře považujeme každý typ každého hráče za samostatného hráče. Dále předpokládáme, že *Příroda* využije pravděpodobnostní rozdělení, které znají všichni hráči, a vybere ty hráče, kteří budou hru skutečně hrát. Dalším předpokladem je, že každý typ hráče si vybere svoji strategii dřív, než svůj tah udělá *Příroda*. Tímto dostaneme hru s nedokonalou informací, kterou budeme značit H^*.

„Původní hra s neúplnou informací H:

- N hráčů, i = 1, 2, …, N,
- hráč i má m_i typů,
- množina prostorů strategií: $\{X_1, X_2, ...,X_N\}$,
- množina výplatních funkcí: $\{f_1(x_1, x_2, ..., x_N, t_1, t_2, ...,t_N), ..., f_N(x_1, x_2, ..., x_N, t_1, t_2, ...,t_N)\}$.

Hra H^* s nedokonalou informací:

- M hráčů, $j = 1, 2, ..., M$, kde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$,
- nově definovaná množina hráčů se skládá z prvků $j = (i, t_i)$,
- množina prostorů akcí: $\{Y_1, Y_2, ...,Y_M\}$,
- množina výplatních funkcí: $\{g_1(y_1, y_2, ..., y_N), ..., g_M(y_1, y_2, ..., y_N)\}$,
- hodnoty výplatních funkcí jsou počítány jako očekávané hodnoty

$$g_1(y_1, y_2, ..., y_N) = \sum_{t_i} p(t_i)f_i(x,t).$$“ [3]

Ve výše formulované hře s nedokonalou informací mluvíme místo o strategiích o akcích a prostory strategií nahradíme prostory akcí. Akcí je myšlena volba hráče znajícího svůj typ. Název strategie se použije v případě označení souboru akcí hráče neznajícího svůj typ. Tento hráč musí pro každý možný typ naplánovat optimální akci.

„Bayesova-Nashova rovnováha ve hře s neúplnou informací H je Nashova rovnováha ve hře s nedokonalou informací H^*, která je reprezentací původní hry s neúplnou informací. Pro konečné hry s neúplnou informací platí následující věta:

Věta 2.3 *V každé konečné hře s neúplnou informací existuje alespoň jedna Bayesova-Nashova rovnováha." [3]*

2.7 Aukce

Kotler [16] upozorňuje na to, že díky rozvoji internetu se aukce staly jednou z nejvlivnějších internetových inovací, a to díky stránkám jako eBay.com. Předtím dominovalo cenám smlouvání a sjednaní cen. Aukce do té doby existovaly pouze na speciálních trzích. Nyní se však aukce stávají téměř každodenní součástí našeho života, proto by si měly firmy uvědomit existenci mnoha cenotvorných postupů pro aukce.

Ekonomové chápou aukce jako vhodný způsob, jak se vyrovná nabídka s poptávkou. V tomto případě hraje velkou roli i prvek nejistoty. Prodávající nemá jistotu ceny, kterou nakonec získá, a kupující nemá záruku nákupu.

Aukci můžeme definovat jako tržní mechanismus, jenž vyrovnává nabídku a poptávku. Mezi dalšími tržními mechanismy můžeme jmenovat například prodej s pevnou cenou nebo cenové vyjednávání. Aukce jsou charakteristické tím, že proces vytváření ceny je explicitní. Pravidla utváření konečné ceny jsou předem známá a chápaná všemi účastníky. Aukce jsou mnohem flexibilnější než prodej s pevnou cenou a také méně náročné na čas než cenové vyjednávání. Aukce se využívají od prodeje uměleckých předmětů, přes prodej květin, alokace radiového spektra až po státní nákupy nebo prodeje.

Dle Maňase a Dlouhého [20] představuje aukce instituci se zaměřením na rozdělení majetku na základě cenové soutěže od potenciálních kupujících. Cílem prodávajícího je prodat objekt aukce za co nejvyšší cenu, zatímco kupující má zájem koupit objekt za co nejnižší cenu. Tyto konflikty zájmů a potenciální cenová soutěž umožňují zvážit aukci jako speciální typ hry.

Nejprve je třeba si definovat některé pojmy, které se v souvislosti s aukcemi používají. Charakteristiky jsou převzata z [20]. Prodávající je fyzická nebo právnická osoba, která má v úmyslu prodat určitý druh zboží. Nabízející je účastník aukce, který má v úmyslu nakoupit určitý druh zboží. Kupující je ten nabízející, který vyhrál aukci a koupil objekt aukce. Dražitel je fyzická nebo právnická osoba organizující aukci. Když mluvíme o aukčním prostředí, máme na mysli především potenciální uchazeče a systém, podle kterého dávají zájemci nabídky na dražené zboží a objekty.

Aukce mohou být klasifikovány podle řady kritérií [3].

Podle *způsobu podávání nabídek*:

- aukce otevřené – všechny nabídky jsou viditelné,
- aukce uzavřené – nabídky nejsou vidět, jsou podávány např. v zalepených obálkách (tzv. obálková metoda)

Podle *mechanismu změny ceny*:

- aukce s rostoucí cenou – cena se postupně zvyšuje až do okamžiku, kdy zbude jediná nabídka,
- aukce s klesající cenou – cena se postupně snižuje do té doby, než zazní první nabídka.

Podle *počtu předmětů v dražbě*:

- aukce s jedním typem objektů,
- víceobjektové aukce.

Víceobjektové aukce se dále dělí na:

- sekvenční – objekty se prodávají postupně,
- simultánní – prodávají se kombinace objektů.

Podle *typu hodnot objektů*:

- soukromá hodnota – v tomto případě zná každý potenciální kupující svoji vlastní hodnotu objektu neovlivněnou hodnotami ostatních kupujících; vhodné zejména pro předměty krátkodobé spotřeby bez možnosti dalšího prodeje,
- všeobecná hodnota – tato hodnota je pro každého potenciálního kupujícího stejná, avšak v době aukce není skutečná hodnota známa; kupující mohou mít o této neznámé skutečné hodnotě určité různé informace; vhodným příkladem mohou být ropné vrty, kdy jejich hodnota závisí na množství ropy pod zemí, které není známo,
- sdružená hodnota – obecný model, který zahrnuje kombinaci dvou výše uvedených situací; hodnota je tedy závislá jak na subjektivním hodnocení, tak i na hodnocení dalšími jedinci; možné využití může být v případě prodeje domu.

Podle *počtu kupujících a prodávajících*:

- standardní aukce – ty jsou orientovány na prodej, proto je zde jeden prodávající a větší počet kupujících,
- reverzní aukce – orientované na nákup, z toho důvodu je zde opačně jeden kupující a větší počet prodávajících,
- dvojité aukce – kombinace předchozích dvou typů, kdy je zprostředkována výměna mezi více prodávajícími a více kupujícími.

Podle *kritéria aukce*:

- maximalizace zisku – ať už prodávajícího nebo kupujícího,
- efektivnost aukce – zajištění toho, aby objekt skončil v rukách toho, pro nějž má předmět největší hodnotu,
- transparentnost pravidel,
- potenciál pro vytváření koluzí účastníků.

2.7.1 Historie aukcí

Stručný přehled historie aukcí je převzat z [11].

Aukce má jako každý druh obchodování svou historii. Trvalo dlouho, než se aukce staly téměř běžnou součástí života lidí jako je tomu dnes. Dříve nebyly aukce moc oblíbené, jelikož se lidem zdálo neobvyklé sjednávat si cenu zboží výměnou za peníze. Mezi hlavní důvod se řadí nepřipravenost trhu. Lidé využívali směny zboží za pevně stanovenou cenu, která byla stejná pro všechny.

Počátky aukcí sahají až do Babylonu kolem roku 500 př. n. l. Zde byly předmětem aukce ženy, které se „prodávaly“ za účelem jejich provdání. Pro dnešního člověka může být překvapivé, že tyto obchody vůbec nebyly nelegální, ba naopak, sňatky se neuzavíraly jinak než na základě dražby. Otcové prodávali své dcery za co nejlepší cenu a všichni to považovali za morální. Z literatury se dozvídáme, že aukce probíhaly na základě americké metody, či dnes známé také jako anglické metody. Postupné přihazování končilo nejvyšší nabídkou. Aukce zpravidla začínaly nejkrásnějšími ženami a postupně se přecházelo k těm méně hezkým.

Aukce pokračovaly i za doby říše Římské. Vojáci, kteří v bitvě zvítězili, zabavovali v dobytém území vše, co mělo hodnotu. Tyto věci se poté dražily, ať už šlo o zvířata, movitosti a cennosti nebo otroky. Zisky z dražby otroků financovaly další války a vojenské útoky. V jiných dobách si vojáci zabavený majetek mohli ponechat pro vlastní užitek.

Pro Římany byly aukce typické, neboť je v té době používali jako dnešní exekutoři. Majetek dlužníků, který byl nedobrovolně zabaven, se prodal, aby se pokryli jejich dluhy.

V Evropě nebyly aukce v takové oblibě. Obchod zde probíhal pouze na základě směny za předem stanovenou cenu. Anglie měla v přízni pouze tzv. aukci při svíci, pro kterou je typické na začátku obchodování rozsvítit svíci a přihazovat do té doby, než svíce zhasla. Aukci vyhrál ten účastník, který přihodil jako poslední, když svíce zhasla.

Do konce 17. století se skoro vůbec nedražilo, jelikož aukce byly vnímány jako něco nežádoucího, a proto se konaly pouze zřídkakdy.

Častější využití aukcí probíhalo až v 18. století. Dražby se konaly převážně v hostincích a prodávalo se to, co už v domácnosti lidé nevyužili. Aukce tohoto typu se konaly velice často. Hlavní charakteristikou pro tuto dobu byly tištěné katalogy, které se dávaly potencionálním zájemcům o dražbu. Aukční katalogy obsahovaly převážně vzácné nebo sběratelské kousky.

Velké obliby dosáhly aukce teprve až ve 20. století. Největšího nárůstu aukcí bylo dosaženo díky vývoji internetu. V současné době se přes internet odehrává 70% všech aukcí. Nástup moderní techniky znamenal využití dražeb pro prodej zboží mnohem více než dříve.

2.7.2 Typy aukcí

Mezi základní typy aukcí řadíme: anglickou, holandskou, aukci první ceny a aukci druhé ceny (Vickreyova aukce). V této podkapitole si budeme jednotlivé aukce krátce charakterizovat.

Anglická aukce je otevřená aukce, jejíž cena postupně roste. V současné době je nejvíce využívaným typem aukce. Prodávající začíná aukci s nízkou vyvolávací cenou, která se postupně zvyšuje dle nabídek jednotlivých kupujících. Aukce končí v případě, že zbude pouze jeden potencionální kupující, který není dále převyšován nabídkami ostatních. Tento kupující vyhrává aukci za poslední (svoji nejvyšší) nabídku, která byla uvedena. Může nastat i případ, kdy si prodávající stanovil minimální prodejní cenu s předstihem (tzv. rezervovanou cenu), ale konečná nabídka této výše nedosahuje. V takovém případě zůstane objekt aukce neprodán. Někdy je stanovena minimální částka, o kterou musí následující nabídka přesahovat současnou nejvyšší nabídku. Nejvyšší nabídku vždy znají všichni (potencionální) kupující.

Tento typ aukcí se využívá především při prodeji uměleckých předmětů, domů, ojetých aut atd. Je nutné, aby při aukci byli přítomni alespoň dva kupující.

Holandská aukce je otevřená aukce, jejíž cena se postupně snižuje. Prodávající začíná aukci s vysokou cenou, která je snižována, dokud někdo z potenciálních kupujících není ochoten akceptovat tuto cenu. Tuto cenu pak musí zaplatit účastník, který dražbu zastavil. Tato aukce je pojmenována podle svého nejznámějšího příkladu – Holandské tulipánové aukce. V Nizozemí se tato aukce používá pro prodej řezaných květin, v Izraeli se tak prodávají ryby a v Kanadě tabák. V praxi je ovšem málo případů použití tohoto typu aukce.

Aukce první ceny je uzavřená (obálková) aukce, kdy všichni účastníci podají své nabídky (každý účastník může předložit pouze jednu nabídku) v uzavřených obálkách najednou a bez znalosti nabídek ostatních účastníků. Vítězí ten účastník, jehož nabídka je nejvyšší a musí pak i tuto cenu zaplatit. Tato metoda se používá především v elektronickém obchodování, v případě veřejných soutěží a částečně pro vládní smlouvy a aukce pro pronájem dolů. Tohoto typu aukce je využíváno rovněž u reverzních aukcí, pokud je více prodávajících a jeden kupující. V tomto případě vyhrává prodávající s nejnižší nabízenou cenou.

Aukce druhé ceny (Vikreyova aukce) je uzavřená (obálková) aukce, kdy všichni účastníci podají své nabídky v zapečetěných obálkách najednou jako v případě aukce první ceny. Ani tady neznají účastníci nabídky ostatních potencionálních kupujících. Vítězí ovšem účastník, jehož nabídka je nejvyšší, avšak zaplatí druhou nejvyšší nabídku. Tento typ aukce se používá zejména pro teoretické analýzy a v současné době v případě obchodování B2B. Podobný systém dražení používá eBay, kde vítěz zaplatí druhou nejvyšší nabídku plus přihazovací přírůstek (tj. 10 %). Jinak se v praxi tato metoda téměř nepoužívá.

V praxi existuje několik variací těchto jednoduchých aukcí. Příkladem takové obměny může být podmínka rezervní ceny, nebo minimální přírůstek nabídky, o kterou musí být další návrh ceny navýšen. Rezervní cena je určitá stanovená hodnota objektu, pod kterou nesmí nabídka klesnout. V případě, že se nabídka pohybuje pod hranicí této rezervní ceny, má prodávající právo tento objekt neprodat.

2.7.3 Aukce jako Bayesovská hra

Podle Dlouhého a Fialy [3] budeme analyzovat standardní aukci. Hlavním předpokladem pro nás bude, že prodávající prodává pouze jeden objekt N kupujícím.

„Aukce jako Bayesovská hra je určena:

- množinou hráčů - kupujících: $\{1, 2, ..., N\}$.
- množinou prostorů strategií - nabídek: $\{B_1, B_2, ..., B_N\}$. Zde B_i označuje prostor strategií i-tého hráče. Konkrétní strategie (nabídky) budeme značit $(b_1, b_2, ..., b_N)$.
- množinou prostorů typů hráčů - kupujících: $\{V_1, V_2, ..., V_N\}$. Všechny $V_i = [0, \bar{v}]$, $i = 1, 2, ..., N$. Hodnota v_i odpovídá vybranému typu hráče i, $i = 1, 2, ..., N$. Hráč i zná svůj typ, ale nezná typy dalších hráčů.
- množinou názorů hráčů: $\{F_1, F_2, ..., F_N\}$. Distribuční funkce $F(x)$ je stejná pro všechny hráče a reprezentuje názor hráče i, který má informace o typech dalších hráčů. Hodnota $F(x)$ určuje pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné v je menší nebo rovna x. Odpovídající hustota pravděpodobnosti je označena $f(x)$.
- množinou výplatních funkcí: $\{u_1(b_1, b_2, ..., b_N, v_1, v_2, ..., v_N), ..., u_N(b_1, b_2, ..., b_N, v_1, v_2, ..., v_N)\}$. Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostorů strategií a prostorů typů hráčů.“ [3]

Dvě nejčastější otázky, které se řeší, jsou:

1. Jaká je optimální nabídka kupujícího v aukci?

2. Který typ aukce maximalizuje příjem prodávajícího?

Následující situace popisuje aukci se soukromými hodnotami objektů. Každý kupující si hodnotí podle svého objekt aukce. Hodnocení ostatních účastníků lze popsat distribuční funkcí $F(x)$ na intervalu $[0, \bar{v}]$.

Pro zjednodušení úvah používáme předpoklad, že hodnota objektu je nulová pro prodávajícího, což znamená, že nelze přijmout zápornou nabídku. Hráči jsou obeznámeni s vlastním oceněním objektu v_i a podávají nabídky $b_i = b(v_i)$, pro $i = 1, 2, ..., N$.

Symetrickou Bayesovu-Nashovu rovnováhu budeme hledat analyzováním hry z pohledu prvního hráče, hráče 1. Předpokládáme, že hodnocení hráče 1 je $v = v_1$ a jeho nabídka je b_1. Hráč vyhraje aukci, jestliže jeho nabídka bude větší než nabídka ostatních zájemců. Jestliže jeho nabídka bude menší než nejvyšší nabídka ostatních kupujících, pak hráč nezíská nic. V případě, že se nabídky budou rovnat, objekt zůstane neprodán.

Odvození první otázky je převzato z [3].

Výplatní funkci hráče 1 lze formulovat jako

$$u_i = \begin{cases} v - b_1, \text{ jestliže } b_1 > max\,[b(v_2),\dots,b(v_N)], \\ 0 \quad, \text{ jestliže } b_1 \leq max\,[b(v_2),\dots,b(v_N)]. \end{cases}$$

Očekávaný zisk, který bude při nabídce b_1, můžeme vyjádřit jako součin možné výhry hráče 1 a pravděpodobnosti, že jeho nabídka je nejvyšší.

$$z(b) = (v - b_1)p[b_1 > b(v_2),\dots, b_1 > b(v_N)].$$

Hlavní problém hráče 1 je vybrat takové x ∈ [0, v̄], které maximalizuje očekávaný zisk

$$z(x) = (v - b(x))p[b(x) > b(v_2),\dots, b(x) > b(v_N)].$$

Jelikož funkce $b(x)$ je rostoucí a každý kupující má stejnou strategii v rovnováze, pak můžeme očekávaný zisk zapsat následovně:

$$z(x) = (v - b(x))p(x > v_2) \dots p(x > v_N) = (v - b\,(x))F(x)^{N-1}.$$

Z podmínky prvního řádu získáme po řešení diferenciální rovnice a po úpravách optimální velikost nabídky

$$b^*(v) = v - \frac{\int_0^v F(x)^{N-1}dx}{F(v)^{N-1}}, \text{ jestliže } 0 < v \leq \bar{v},$$

$$b^*(v) = 0, \text{ jestliže } v = 0.$$

Formulace optimální velikosti nabídky v tomto tvaru vypovídá, o kolik je vhodné snížit tuto nabídku b*(v) v porovnání s hodnotou objektu v.

Na druhou otázku nám odpovídá věta 2.4 o ekvivalentnosti příjmů, která platí při splnění následujících předpokladů:

- Kupující má rozdělené hodnoty nezávisle.
- Kupující jsou neutrální k riziku.
- Kupující nemá žádné omezení, co se týká rozpočtu – jsou schopni zaplatit jakoukoli částku až do výše, na kterou si cení daného objektu.
- Symetrie – rozdělení hodnot všech kupujících jsou stejné podle distribuční funkce *F*.

Věta 2.4 Věta o ekvivalentnosti příjmů: *Základní čtyři typy aukcí (anglická, holandská, první ceny, druhé ceny) se soukromými hodnotami poskytují stejný očekávaný příjem.* [3]

„Věta o ekvivalentnosti příjmů je užitečný a účinný nástroj. Je možno ji například využít při odvození rovnovážných strategií u netypických aukcí a v analýze situací, kdy si kupující nejsou jisti, kolik dražitelů se aukce zúčastní." [3]

Pokud však dojde k porušení předpokladů, věta o ekvivalentnosti příjmů již neplatí. V případě porušení např. podmínky rizikové neutrality bude očekávaný příjem z aukce první ceny větší než očekávaný příjem z aukce druhé ceny.

3 PRINCIPY ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TYPŮ HER V EKONOMICKÝCH SOUVISLOSTECH

Tato kapitola se věnuje praktickým příkladům z oblasti teorie her uplatněných v ekonomii. Nejprve je uveden příklad antagonistického konfliktu, následuje příklad z mikroekonomie, který ilustruje použití teorie her při rozhodování o výši investice do reklamy, pak je obecně představeno vězňovo dilema a následně jeho ekonomická aplikace. Dalším příkladem využití teorie her je konflikt typu manželský spor. Poslední ekonomickou aplikací v této kapitole je využití marketingové strategie. Příklady jsou převzaty ze zdrojů [3], [7], [12], [17], [18], [21] a upraveny.

3.1 Rozdělení nákladů na propagaci

Příklad 3.1 Předpokládejme dva trhy A a B, o které se zajímají dvě firmy: firma 1 a firma 2. Tyto firmy jsou účastníci konfliktu. Na trhu A se očekávají zakázky, které přinesou zisk 120 jednotek, na trhu B se očekávají zakázky, které přinesou zisk 105 jednotek. Každá z firem má dostatek finančních prostředků buď na velký propagační nábor na kterémkoli z trhů, nebo na malý nábor na obou trzích. Zakázky se rozdělují v závislosti na rozhodnutí obou firem následovně:

- Organizuje-li na trhu kampaň pouze jedna firma, potom získá všechny zakázky na daném trhu.
- Organizují-li na trhu kampaně téhož typu obě firmy, příp. neprovádějí propagaci vůbec, obě firmy získají zakázky, které si pak rozdělí na poloviny.
- Organizuje-li na trhu jedna firma malou kampaň a druhá firma velkou kampaň, potom získá firma provádějící malou kampaň 1/3 zakázek a druhá firma organizující velkou kampaň dostane 2/3 zakázek.

Firma 1 má tedy tři možnosti rozhodnutí:

1. Uspořádat velkou kampaň na trhu A (rozhodnutí A).
2. Organizovat velkou kampaň na trhu B (rozhodnutí B).
3. Pořádat malé kampaně na obou trzích (rozhodnutí C).

Analogická rozhodnutí může činit i firma 2. Z důvodu zjednodušení neuvažujeme, že by firmy nevyužily svých fondů na propagaci. Podle výše uvedených pravidel si firmy vždy rozdělí zakázky, proto je přímým modelem konfliktu konečná hra s konstantním součtem K = 120 + 105 = 225. Hodnota výplatní funkce hráče 1 bude tedy tento rozdíl: celkový zisk firmy 1 – celkový zisk firmy 2. Matici hry pak můžeme zapsat v následujícím tvaru:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Firma 2} \\
\text{Firma 1} &
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0, & 15, & -65 \\ -15, & 0, & -85 \\ 65, & 85, & \boxed{0} \end{pmatrix}
\end{array}
\end{array}
$$

U řádků a sloupců jsou naznačena jednotlivá rozhodnutí účastníků konfliktu. V matici jsou zobrazeny hodnoty rozdílu zisků, které se spočítaly dle pravidel výše.

Maticová hra s výše uvedenou maticí má sedlový prvek na průsečíku třetího řádku a třetího sloupce. Optimální tedy je, pokud obě firmy budou realizovat na obou trzích malé kampaně a zisk si rozdělí napůl. Cena hry s maticí (23) je nula, zisk každého účastníka je K/2 = 225/2 = 112,5.

3.2 Reklamní hra

Příklad 3.2 Představme si, že firmy A a B zajišťují výstup celého odvětví. Vyrábějí výrobky, které si vzájemně konkurují, a firmy se rozhodují o výši nákladů na reklamní kampaň. Obě firmy volí mezi dvěma strategiemi: zaplatit za reklamu 1 nebo 2 mil. Kč.

Předpokládáme, že první, kdo činí rozhodnutí, je firma A. Firma B se rozhoduje jako druhá, ale nezná výběr strategie firmy A. Ve výplatní matici v tabulce 2 vidíme zisky jednotlivých firem v miliónech.

Tabulka 2: Výplatní matice

Strategie firmy		B	
		1 mil. Kč	2 mil. Kč
A	1 mil. Kč	8; 5	6; 3
	2 mil. Kč	7; 4	7; 2

Zdroj: Vlastní zpracování

Ve výplatní matici je znázorněn specifický případ Nashovy rovnováhy, tzv. dominantní strategie, kterou uplatňuje firma B. Nezáleží tedy na rozhodnutí firmy A, kterou strategii si zvolí, jelikož firma B bude vždy volit strategii 1 mil. Kč. „Dominantní strategie tedy znamená, že firma volí optimální strategii bez ohledu na strategii druhé firmy.“ [12]

Strukturu hry znají obě firmy, proto firma A rozpozná dominantní strategii firmy B investovat do reklamy 1 mil Kč a zvolí si rovněž strategii investovat do reklamy 1 mil. Kč. Touto strategií totiž firma A bude mít zisk 8 mil. Kč. Pokud by investovala do reklamy 2 mil. Kč, pak by měla zisk pouze 7 mil. Kč. Optimální strategie pro obě firmy bude realizovat investice do reklamy ve výši 1 mil. Kč. Změnou strategie si ani jedna z firem své postavení nezlepší, proto jsou jejich strategie rovnovážné.

„Nashova rovnováha je taková kombinace vzájemných očekávání firem týkající se jejich strategie, kterou žádná z nich nemá zájem měnit ani poté, co byla strategie každé z firem odhalena.“ [12]

3.3 Vězňovo dilema

Příklad 3.3 Vězňovo dilema je asi nejznámější modelová situace teorie her, která je modelem neantagonistického konfliktu. Základ této hry vychází ze soudní praxe některých zemí, kde existuje instituce „korunního svědka obžaloby“. To je jeden z obžalovaných, který se rozhodne spolupracovat s obžalobou za příslib beztrestnosti. Bude plně vypovídat a jeho spolupachatel ponese vinu za celý zločin. Oba vězni, kteří spáchali zločin a jsou navzájem od sebe izolováni, aby se předešlo jejich případné dohodě o výpovědi. Oba mají pouze dvě strategie: přiznat se (P) nebo nepřiznat se (N). V následující situaci může dojít k těmto možnostem:

- Žádný z nich se nepřizná, dostanou oba jen malé tresty v podobě dvou let vězení.
- Jeden z vězňů se přizná a bude spolupracovat, stane se tedy „korunním svědkem obžaloby“, dostane nižší trest (1 rok) než jeho komplic, který bude odsouzen s vysokým trestem (8 let), jelikož bude nést hlavní vinu zločinu.
- Přiznají se oba zločinci, ale dostanou trest přibližně 5 let vězení, jelikož nesou společnou vinu za zločin.

Tuto situaci můžeme zapsat do matice ve tvaru:

$$
\begin{array}{lcc}
 & & \text{vězeň B} \\
 & & \begin{array}{cc} \text{přiznat} & \text{nepřiznat} \end{array} \\
\text{vězeň A} & \begin{array}{r} \text{přiznat} \\ \text{nepřiznat} \end{array} & \begin{pmatrix} 5;\,5 & 1;\,8 \\ 8;\,1 & 2;\,2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Hráči, kteří se nemohou mezi sebou dohodnout, vždy zvolí strategii přiznat-přiznat. Je ovšem paradoxem, že toto rovnovážné řešení (5; 5) je horší než strategie nepřiznat-nepřiznat (2; 2), která nesplňuje podmínky Nashovy rovnováhy, jelikož změnou své strategie si hráč může polepšit ze dvou let pouze na jeden rok. Druhý hráč by pak dostal osm let vězení.

„V ekonomické teorii má vězňovo dilema význam například při studiu chování nevynutitelných (ze zákona obvykle zakázaných) kartelových dohod. Při uzavírání dohod je vážným problémem možnost porušování dohody, pokud jednostranné porušení může přinést výhody.“ [3]

3.4 Konflikt typu vězňovo dilema - dohoda

Příklad 3.4 Uvažujme dvě firmy, které uzavřeli dohodu a mají dvě možné strategie:

- Z – zachovat dohodu,
- P – porušit dohodu.

Tuto situaci zachytíme do dvojmaticové hry a ohodnotíme důsledky výběru dané strategie firem:

$$
\begin{array}{lcc}
 & & \text{firma 2} \\
 & & \begin{array}{cc} Z & P \end{array} \\
\text{firma 1} & \begin{array}{r} Z \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 4;\,4 & -6;\,6 \\ 6;\,-6 & \boxed{-2;-2} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tato hra má pouze jeden rovnovážný bod (P, P), který představuje porušení dohody obou stran. Vidíme však, že bod (Z, Z), tedy zachování dohody obou stran, je pro obě firmy výhodnější.

3.5 Konflikt typu „kuře“ (zbabělec)

Příklad 3.5 U konfliktů tohoto typu existují dva rovnovážné body. Pokud každý z účastníků zvolí svou rovnovážnou strategii, pak se sejdou v řešení nevýhodném pro oba. Uvažujme například dvě firmy, které těží určitou surovinu v jedné stejné oblasti a mají v úmyslu zvýšit svoji těžbu o polovinu. Jedná se o situaci, kdy strany jednají tak, aby neztratily svou prestiž. Obě firmy mají dvě možnosti zvolení strategie:

- U – ustoupit od záměru zvýšení těžby a zůstat při dosavadním množství,
- N – neustoupit.

Následující situaci zachytíme do dvojmaticové hry a ohodnotíme důsledky výběru dané strategie:

$$\text{firma 1}\qquad \begin{array}{cc} & \text{firma 2} \\ & \begin{array}{cc} \text{U} & \text{N} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{U} \\ \text{N} \end{array} & \begin{pmatrix} 0;\,0 & -6;\,10 \\ 10;\,-6 & -30;-30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pokud by obě firmy ustoupily od svého záměru, situace by zůstala stejná. Jestliže však jedna z firem ustoupí a druhá neustoupí, ustupující si ponechá svoji pozici a neustupující si polepší. V případě neústupnosti obou firem dojde k ekologické katastrofě s ohromnými následky pro obě firmy. Tato dvojmatice má dva rovnovážné body: (U, N), který je výhodnější pro firmu 2, a (N, U), který je výhodnější pro firmu 1. V případě volby svých výhodnějších strategií se sejdou v situaci (N, N), která ovšem není ani pro jednu z firem výhodná.

3.6 Manželský spor

Příklad 3.6 Uvažujme manželský pár, který chce strávit večer společně. Manžel preferuje jít na hokejový zápas, zatímco manželka by šla ráda do kina. Zatím jsou v práci, ale večer se setkají. Každý se o večerním programu rozhoduje samostatně bez vzájemné domluvy (předpokládáme pro zjednodušení). Pokud stráví večer spolu, získá každý z nich dvě jednotky užitku. V případě, že si zvolí program, který preferují, získají pět jednotek užitku. Jestliže stráví večer samostatně na svém programu bez partnera, jejich užitek bude nulový. Tento konflikt můžeme zapsat do následující matice:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{manželka} \\ & & \begin{array}{cc} \text{hokej} & \text{kino} \end{array} \\ \text{manžel} & \begin{array}{c} \text{hokej} \\ \text{kino} \end{array} & \begin{pmatrix} 5;\,2 & 0;\,0 \\ 0;\,0 & 2;\,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Problémem této hry je existence více rovnovážných řešení, přičemž žádné z nich není dominující. Hráči nemají jasno, které řešení zvolit. Manžel by teoreticky měl zvolit první řádek, jelikož preferuje hokejové utkání. Na druhé straně preferuje manželka kino a řešením by byl nulový užitek pro oba hráče (0;0). Vedle rovnovážných řešení v ryzích strategiích se zde vyskytuje také rovnovážné řešení ve strategiích smíšených.

Tento problém není antagonistický. Je jasně vidět, že mnohem lepší by byla kooperace hráčů než jejich samostatné rozhodování.

„Konflikty kuře a manželský spor poukazují na problém vícenásobné Nashovy rovnováhy. Jestliže existuje více rovnovážných řešení, avšak jedno z rovnovážných řešení dominuje, ostatní hráči zvolí toto pro oba nejvýhodnější rovnovážné řešení. Jestliže rovnovážných řešení existuje ve hře více a alespoň dvě z nich jsou nedominovaná, hráči neví, jaké řešení zvolit, neboť každý hráč preferuje jiné. Koncept Nashovy rovnováhy v tomto případě nedává jednoznačný návod k výběru optimálního rozhodnutí.“ [3]

Thomas C. Schelling, nositel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 2005, navrhnul řešení problému vícenásobné rovnováhy, pokud zde existuje určitý ústřední bod. Vysvětlením tohoto termínu může být příklad setkání přátel na Václavském náměstí. Je pravděpodobné, že místo schůzky bude u sochy svatého Václava, která zde představuje ústřední bod, přestože by se mohli setkat kdekoli jinde. Analogicky může taková ústřední rovnováha existovat v některých hrách s vícenásobnou Nashovou rovnováhou, která je z jakéhosi důvodu odlišná pro hráče od jiných Nashových rovnováh.

Nyní se vrátíme ke konfliktu manželský spor, ve kterém existují tři rovnovážná řešení. Ve více realistických modelech předpokládáme ve společnosti existenci určitých tradic či zvyklostí. Například velmi zaměstnaný muž by měl volný čas věnovat své rodině a vzít svou manželku do kina. Jestliže se ovšem jedná o mistrovství v hokeji, měla by zase manželka ustoupit a zvolit strategii, kterou preferuje její manžel, tedy jít na hokejový zápas.

3.7 Marketingová strategie

Příklad 3.7 Předpokládejme dvě stavební firmy A a B, které usilují o získání tří zakázek. První zakázka na stavbu Silnice má hodnotu 90, druhá zakázka na stavbu Radnice má hodnotu 60 a třetí zakázka na stavbu Parkoviště má hodnotu 20. Uvedené částky jsou v milionech korun.

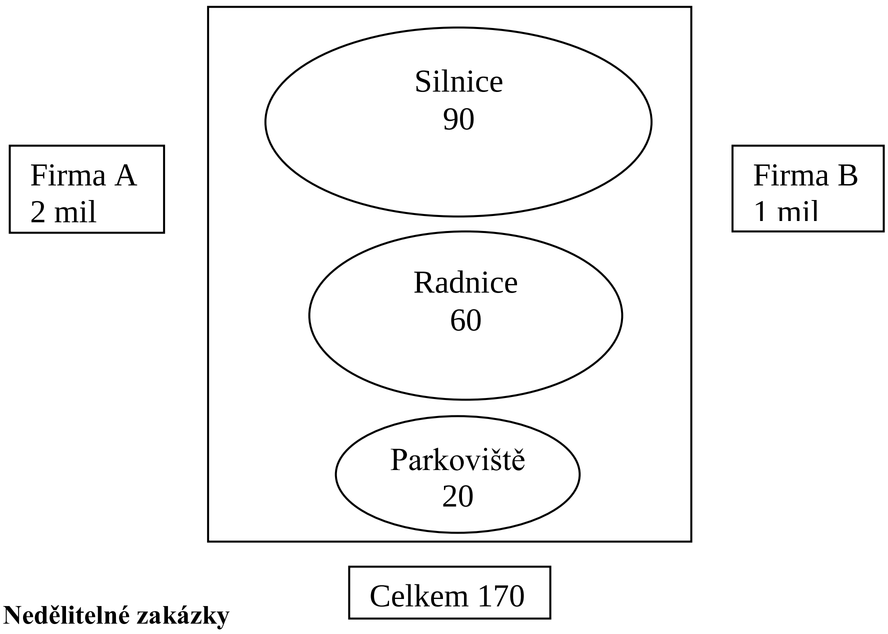
Ovlivnit to, zda daná firma získá zakázku, se dá lobováním. Firma A má v rozpočtu částku 2 miliony Kč na lobování. Firma B má na lobování přichystanou částku pouze 1 milion Kč. Lobovat se dá pouze s částkou 1 nebo 2 miliony Kč, případně nelobovat vůbec, což znamená lobovat s částkou 0 Kč.

Zakázky se rozdělí podle následujících pravidel:

1. Ta firma, která lobuje vyšší částku u příslušné zakázky, ji nakonec získá.
2. Jestliže firmy lobují u zakázky stejnou částkou, pravděpodobnost získání celé této zakázky je pro každou firmu 50 %. Toto pravidlo je i v případě, že obě firmy lobují částkou 0.

Výše uvedená pravidla jsou známa oběma firmám, které se však nemohou dohodnout, u koho a jak budou lobovat.

Cílem příkladu je určit, jak a kolik u jednotlivých zakázek mají firmy lobovat, aby každá z firem dosáhla maximální hodnotu z celkem získaných zakázek. V případě, že výsledek záleží pouze na náhodném pokusu, je použita pro ocenění strategií střední hodnota získaných částek. Situace je graficky znázorněna na obrázku 2.



Obrázek 2: Nedělitelné zakázky

Zdroj: Vlastní zpracování

Z pravidel, které byly popsány výše, vyplývá, že firmy si vždy rozdělí zakázky (v celkové hodnotě 170). Jedná se tedy o konflikt s konstantním součtem, přičemž hodnota této konstanty je 170. Pravidlo, při kterém je možné lobovat pouze částku celého násobku milionu, nám zjednodušuje celý příklad, jelikož se tím snižuje počet možných strategií jednotlivých hráčů.

Jednotlivé strategie nyní zaznamenáme do přehledné tabulky. Možnosti volby taktiky se budou skládat z tříprvkového vektoru, kde jednotlivé složky uvádějí investici k jednotlivým zakázkám.

Celkové objemy získaných zakázek, které přinesou firmám kombinace jednotlivých strategií, jsme sestavili do tabulky, kde na průsečíku řádků a sloupců představuje první číslo ve dvojici zisk pro firmu A a druhé číslo zisk pro firmu B.

Tabulka 3: Výplatní matice

Strategie firmy		**B**		
		(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)
A	(2, 0, 0)	130; 40	70; 100	120; 50
	(0, 2, 0)	100; 70	115; 55	105; 65
	(0, 0, 2)	50; 120	65; 105	95; 75
	(1, 1, 0)	115; 55	130; 40	150; 20
	(1, 0, 1)	95; 75	110; 60	130; 40
	(0, 1, 1)	90; 80	95; 75	115; 55

Zdroj: Vlastní zpracování

Tabulka 3 je v podstatě hra zapsaná v normálním tvaru, která je modelem konfliktu zájmů, kdy se zakázky snaží získat dvě firmy. Dvoumatice se může zdát komplikovanější. Jelikož se jedná o hru s konstantním součtem (=170), nemusíme sledovat výhry obou hráčů, ale postačily by nám výhry pouze jednoho hráče, protože výsledek druhého hráče si můžeme dopočítat.

Dvoumaticovou hru uvedenou v tabulce 3 můžeme převést na maticovou hru s následující maticí:

Tabulka 4: Maticová hra

Strategie firmy		B		
		(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)
A	(2, 0, 0)	90	-30	70
	(0, 2, 0)	30	60	40
	(0, 0, 2)	-70	-40	20
	(1, 1, 0)	60	90	130
	(1, 0, 1)	20	50	90
	(0, 1, 1)	10	20	60

Zdroj: Vlastní zpracování

Předtím, než se pustíme do hledání optimální strategie v maticové hře v tabulce 4, je dobré všimnout si jevu zvaného dominování. Použitím dominování se zjednoduší matice, ze které je pak snadnější analyzovat rozhodovací situaci. Princip dominování je založen na tom, že z matice předem vyloučíme ty řádky nebo sloupce, které by si inteligentní hráč nikdy nevybral. Jelikož jiné řádky mají vyšší hodnotu než stejnolehlé prvky řádku posuzovaného nebo sloupce mají nižší hodnotu než stejnolehlé prvky sloupce posuzovaného. Dominovaný řádek je takový, ke kterému existuje jiný řádek s většími hodnotami. Tyto řádky jsou v tabulce 4 označeny a pro pozdější zkoumání je můžeme vypustit.

Po kroku, kdy jsme vypustili dominované řádky, zapíšeme redukovanou matici do tabulky 5.

Tabulka 5: Redukovaná matice 1

Strategie firmy		B		
		(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)
A	(2, 0, 0)	90	-30	70
	(1, 1, 0)	60	90	130

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož hráč 2, tedy firma B, má zájem na sloupcích s nízkými hodnotami, nikdy nebude volit strategii, která se nachází ve třetím sloupci, proto tento sloupec označíme a vypustíme. Touto redukcí sloupců se maticová hra omezí na matici o rozměrech 2 x 2, která je zobrazena v tabulce 6.

Tabulka 6: Redukovaná matice 2

Strategie firmy		B	
		(1, 0, 0)	(0, 1, 0)
A	(2, 0, 0)	90	-30
	(1, 1, 0)	60	90

Zdroj: Vlastní zpracování

Řešení této úlohy může být spočítáno pomocí úlohy lineárního programování

$$\text{maximalizovat } p_1 + p_2$$

při omezeních

$$90p_1 - 30p_2 \leq 1$$

$$60p_1 + 90p_2 \leq 1$$

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0.$$

Vyřešením této úlohy dostaneme optimální smíšenou strategii hráče 1 jako vektor (0,2; 0,8) a pro hráče 2 jako vektor (0,8; 0,2).

Jestliže se vrátíme zpět k výchozí rozhodovací situaci, pak bude optimální postup při ovlivňování zakázek následující: Firma A bude lobovat u zakázky Silnice částkou 2 mil. Kč s pravděpodobností 0,2 a s pravděpodobností 0,8 bude lobovat částkou 1 mil. Kč u zakázky Silnice a stejnou částkou 1 mil. Kč bude lobovat u zakázky Radnice. Firma B bude s pravděpodobností 0,8 lobovat částkou 1 mil. Kč u zakázky Silnice a u zakázky Radnice bude lobovat také částkou 1 mil. Kč. Žádné jiné způsoby lobování nebudou použity. Při tomto optimálním postupu lobování vydělá firma A střední hodnotu z celkem získaných zakázek rovnou 118 mil. Kč. 52 mil. Kč bude střední hodnota zakázek, které získá firma B. V případě, že se jedna z firem odchýlí od uvedeného optimálního postupu lobování, zhorší tak svou střední hodnotu zakázek a zvýší tím o stejnou částku střední hodnotu zakázek konkurence.

4 OBÁLKOVÁ METODA

V této kapitole se budeme věnovat obálkové metodě a jejímu praktickému využití v ekonomické praxi. Budeme zde modelovat příklady víceobjektových aukcí investičních možností, při jejichž řešení a stanovení optimální strategie využijeme aparátu teorie her.

Jak už bylo řečeno, obálková metoda je uzavřená aukce, kde každý účastník může podat pouze jednu nabídku do uzavřené obálky. Nikdo z účastníků nezná nabídky ostatních. Obálky se pak otevírají najednou a vyhrává potenciální kupující, který nabídl nejvyšší cenu. V případě zakázky na dodávku zboží nebo služeb vyhraje naopak ta firma, jejíž nabídka je nejnižší. V těchto typech aukcí je často podmínka nejnižší ceny, pod kterou nesmí klesnout nabídka potenciálního kupujícího.

4.1 Optimální strategie při obálkové metodě

Lze modelovat příklad s několika uchazeči, kteří se zapojují do soutěže s jedním nabízeným objektem bez ohledu na další investiční možnosti. Výsledky jsou však velmi složité, jelikož nelze přesně stanovit preference jednotlivých potencionálních uchazečů o charakteristikách nabízeného objektu.

Jestliže budeme uvažovat účast v obálkové metodě za jednu z variant investování, můžeme použít aparátu teorie her, abychom zkonstruovali modely a následně stanovili optimální strategie jednání. V našem případě rozdělíme částky, které chceme investovat, do několika prodejních akcí, jež používají obálkovou metodu. V příkladech se omezíme pouze na základní modely, které jsou typické a poměrně přehledné pro obálkové soutěže.

4.2 Dva nekooperující investoři

Dva investoři usilují o co nejvyšší hodnoty z n objektů prodávaných obálkovou metodou. První investor má I_1 peněžních jednotek, druhý investor má I_2 peněžních jednotek. Tyto částky znají oba investoři. Zdroj hodnot je dán rozdílem mezi částkami vloženými do obálek a skutečnými hodnotami prodávaných objektů. Oba investoři znají tyto skutečné hodnoty objektů. Uvažujme, že do obálek lze vkládat pouze celistvý násobek základní peněžní jednotky. Dále uvažujme, že žádný investor nevloží do obálky větší hodnotu, než je skutečná hodnota objektu. Tento předpoklad nám zredukuje počet možných strategií na konečný počet. Prodávané objekty jsou nedělitelné, a pokud se v obálkách sejdou stejné částky, bude objekt náhodně přenechán jednomu ze zájemců, přičemž oba zájemci mají stejnou šanci objekt získat. Zisk investora je střední hodnota zisku, která představuje polovinu hodnoty objektu sníženou o částku vloženou do obálky. Objekty, na které nebude podána žádná nabídka, nedostane žádný z investorů.

Optimální strategii získáme tak, že rozhodovací situace budeme popisovat jako konflikt zájmů dvou (inteligentních) hráčů s nekonstantním součtem, s konečným počtem možných strategií. Modelem je dvoumaticová hra, jejíž řešení je rovnovážný bod v rámci ryzích nebo smíšených strategií.

Příklad 4.1 Investor číslo 1 má k rozdělení I_1 = 30 peněžních jednotek, investor číslo 2 má k rozdělení I_2 = 20 peněžních jednotek. K prodeji obálkovou metodou jsou nabízeny tři objekty. Uvažujme, že do obálek je možné vložit pouze částky 10, 20 nebo 30 jednotek. Investoři vkládají do obálek všechny své prostředky. Díky těmto předpokladům můžeme napsat úplný seznam strategií obou hráčů. Strategie označíme trojicemi složenými z číslic 0, 1, 2, 3. Číslice na prvním místě značí v desítkách jednotek částku vloženou pro první objekt, číslice na druhém místě částku pro druhý objekt, číslice na třetím místě částku pro třetí objekt.

4.2.1 Jediný rovnovážný bod

Hodnoty jednotlivých objektů jsou 35, 29 a 14 jednotek. Výsledná dvojmatice jednotlivých strategií je zapsána v tabulce číslo 7. Řádky představují strategie prvního investora, sloupce jsou strategie druhého investora. V průsečíku řádků a sloupců představuje levé číslo zisk prvního investora, pravé číslo je zisk pro investora číslo 2.

Tabulka 7: Obálková metoda s jediným rovnovážným bodem

Strategie investorů		**Investor č. 2**				
		(2, 0, 0)	(0, 2, 0)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)
Investor č. 1	(3, 0, 0)	5; 0	5; 9	5; 19	5; 4	5; 13
	(2, 1, 0)	26,5; 7,5	15; 9	24,5; 9,5	34; 4	24,5; 13,5
	(2, 0, 1)	11,5; 7,5	19; 9	19; 19	17; 2	17; 21
	(0, 2, 1)	13; 15	8,5; 4,5	13; 25	11; 27	11; 2
	(1, 1, 1)	23; 15	29; 9	**26; 22**	23,5; 14,5	36,5; 11,5

V tomto případě tvoří Nashovy rovnovážné strategie dvojice strategií (1, 1, 1) a (1, 1, 0). Tento výsledek si snadno můžeme ověřit porovnáním s jinými strategiemi. Jestliže existuje pouze jeden pár rovnovážných strategií, můžeme ho nazvat optimálním způsobem investování. Výhra, která se nachází na průsečíku rovnovážných strategií, musí splňovat podmínku, že levé číslo je maximem v daném sloupci a pravé číslo je maximem v daném řádku. Za použití optimálních strategií v tomto příkladu obálkové metody získá první investor v(1) = 26 peněžních jednotek zisku a druhý investor v(2) = 22 peněžních jednotek zisku.

Nashovy rovnovážné strategie mají vlastnost, že jakékoli odchýlení jednoho hráče od této optimální strategie nezajistí lepší výsledky (pokud se druhý investor bude držet rovnovážných strategií).

4.2.1 Více rovnovážných bodů – řešitelný případ

Za situace, kdy by vyšlo více Nashových rovnovážných strategií, investoři by upřednostnili tu variantu, která by dominovala druhé či ostatním. To znamená, že investoři by si vybrali strategii, která jim oběma zajistila lepší výsledek zisku. Nejde zde ovšem o kooperaci investorů, nýbrž pouze o dominování.

Například, pokud by jedna rovnovážná strategie zajišťovala investorům zisky (28, 25), byla by tato strategie upřednostněna před druhou rovnovážnou strategií, která by investorům přinesla zisky pouze (22, 21).

4.2.2 Více rovnovážných bodů – žádné řešení

V případě, kdy by vyšly dvě Nashovy rovnovážné strategie, ale ani jedna by nedominovala druhou, nemůžeme zjistit optimální strategie investorů. Rovnovážných řešení je tedy více, ale hráči se v tomto případě neshodnou, které rovnovážné řešení vybrat, jelikož každý hráč preferuje jiné rovnovážné řešení.

Příkladem můžou být strategie, kdy hráči získají buď (22,8) nebo (20, 16). V prvním případě získá první investor v(1) = 22 a druhý investor v(2) = 8. Pokud hráči zvolí druhou rovnovážnou strategii, získá první investor v(1) = 20 a druhý investor v(2) = 16.

4.3 Dva kooperující investoři

Jestliže se mohou oba investoři dohodnout na vzájemné spolupráci, zásadně to mění schéma optimálního rozhodování. Dohody se mohou týkat způsobu nabídek jednotlivých částek za objekty nebo mohou připouštět i přerozdělení zisků v případě, kdy jeden z hráčů umožní druhému hráči získat jinak nedosažitelný celkový zisk za cenu obětování vlastního zisku. Investoři obecně v těchto případech dosáhnou lepších výsledků, jestliže mohou použít možnost přerozdělení zisků.

Prvním krokem, který určí optimální strategii, je výpočet maximálně dosažitelného celkového zisku.

Představme si, že maximální celkový zisk, který mohou získat oba investoři při spolupráci, je v(1,2) = 60. Takto vypočtené celkové zisky získané součtem zisků obou investorů jsou pro ilustrativní příklad uvedeny v tabulce 8.

Tabulka 8: Tabulka celkových zisků

Strategie investorů		**Investor č. 2**				
		(2, 0, 0)	(0, 2, 0)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)
Investor č. 1	(3, 0, 0)	6	10	20	12	26
	(2, 1, 0)	30	20	30	36	36
	(2, 0, 1)	22	26	**46**	22	**60**
	(0, 2, 1)	26	10	36	36	10
	(1, 1, 1)	36	36	**60**	46	46

Tohoto maximálního zisku mohou investoři dosáhnout dvěma strategiemi, ve kterých by získali hodnoty (35, 25) nebo (29, 31).

Druhý krok je podstatně obtížnější. Jedná se o stanovení, jak si zisk mají investoři rozdělit.

Zisky, které investoři získají z nákupu objektu společnou dohodou, nejsou konečnými částkami, jelikož jejich prvotním cílem bylo maximalizovat celkovou částku, o kterou se budou muset následně podělit.

Je jasné, že investoři nepřistoupí na takové dohody, ve kterých bude částka nižší, než by mohli získat samostatně. Nejprve je třeba oběma investorům dát jejich rovnovážný zisk z celkového zisku. V našem příkladě uvažujme, že rovnovážnými strategiemi by investoři získali hodnoty (26, 20). Při zvolení Nashovy rovnovážné strategie (2, 0, 1) a (1, 1, 0) by hráči celkově získali v(1, 2) = 46, v(1) = 26, v(2) = 20.

Částka získaná navíc, kterou investoři získali díky předběžné dohodě, se nazývá superaditivní efekt. Návodů na to, jak tento superaditivní efekt rozdělit je několik:

1. Investoři se rozdělí rovným dílem.

Při rozdělení výhry rovným dílem by byl superaditivní efekt 60 – 46 = 14, každý z investorů by tedy dostal navíc 7 peněžních jednotek. Investoři by pak získali $a_1 = 33$ a $a_2 = 27$.

2. Investoři se rozdělí v poměru, v jakém přispěli k dosažení výhry.

Superaditivní efekt 14 by se rozdělil poměrem na 5 dílů podle velikosti investice do daných objektů. Na každý díl by tedy byla částka 2,8, kterou by první investor dostal třemi díly, tedy částku 8,4, a druhý investor dva díly, tedy částku 5,6. Investoři by získali $a_1 = 34{,}4$ a $a_2 = 25{,}6$.

V našem příkladě bych osobně doporučila rozdělit společnou výhru, kterou by investoři získali dohodou, rozdělit poměrově podle míry investice jednotlivých hráčů, bez ohledu na jejich zaručenou výhru, kterou by jistě dostali. Pouze by bylo třeba zkontrolovat, zda svou zaručenou výhru skutečně dostanou. Celkový zisk 60 bych tedy rozdělila mezi investory následovně: prvnímu investorovi částku 36 peněžních jednotek a investorovi číslo 2 částku 24 peněžních jednotek.

ZÁVĚR

Teorie her má široké uplatnění v mnoha oblastech. Využití můžeme najít v dnešní době třeba také ve vojenství, kdy lze v rámci teorie her modelovat válečné konflikty ve světě a řešit tak otázky zbrojení, odzbrojení a pokuty za nedodržení pravidel.

V této práci jsme ukázali některé typové ekonomické aplikace teorie her. Od rozdělení nákladů na propagaci a reklamní hry, přes hry typu vězňovo dilema, kuře nebo manželský spor až po marketingovou strategii. Největší pozornost byla věnována obálkové metodě.

Obálková metoda se v dnešní době využívá především při prodeji bytů, pozemků či jiných objektů ve vlastnictví měst a obcí. Dopravní podnik města Prahy ji v minulosti využil při prodeji dopravních prostředků. Město Hradec Králové v minulosti používalo obálkovou metodu pro prodej městských bytů. Nalezli bychom však mnohem více příkladů.

Avšak použití teorie her, především aplikace obálkové metody, na reálném příkladě je mnohem složitější, než se na první pohled zdá. Celý problém vzniká již na začátku, kdy lze těžko stanovit preference jednotlivých uchazečů o dané charakteristiky nabízeného objektu. Dále cenové nabídky mohou být mnohem variabilnější, než jsme ukázali na příkladech. Také zde mohou být další faktory, které ovlivňují rozhodování, ale nelze je přesně kvantifikovat.

V literatuře se setkáme pouze se základními problémy a modely, které jsou navíc různě zjednodušené. Z těchto důvodů se i v této práci objevují pouze typové modelové příklady. Nejprve je popsána nesložitá situace a další podmínky, které redukují okolnosti a faktory, které by mohly ovlivnit rozhodování. Situaci analyzujeme pomocí matic či tabulek, následuje postup řešení a závěr z jednotlivých příkladů.

Cílem práce bylo ukázat některé možnosti ekonomických aplikací teorie her. Tohoto cíle bylo dosaženo prostřednictvím čtyř kapitol, do kterých se diplomová práce dělí. První kapitola zahrnuje vznik a vývoj teorie her, druhá kapitola popisuje hlavní charakteristiky teorie her. Třetí kapitola se věnuje samotným ekonomickým aplikacím teorie her. Čtvrtá kapitola samostatně obsahuje jednu z ekonomických aplikací, obálkovou metodu. Zde je uvedeno více různých možností, které mohou nastat při řešení.

Díky této práci jsem se blíže seznámila s teorií her. Její aplikace do běžného života sice není tak jednoduchá, ale při redukujících podmínkách může přinést návod na to, jak se v dané situaci správně rozhodnout.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] All Prizes in Economic Sciences. *Nobelprize.org* [online]. 2012 [cit. 2012-11-25]. Dostupné z: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/

[2] BLACKWELL, David; GIRSHICK, Meyer, A.. *Theory of games and statistical decisions*. New York: Dover Publications, 1979c1954, xi, 355 p. ISBN 04-866-3831-6

[3] DLOUHÝ, Martin; FIALA, Petr. *Úvod do teorie her*. 2., přeprac. vyd. Praha: Oeconomica, 2009, 119 s. ISBN 978-80-245-1609-7

[4] Dražba. *Wikipedie* [online]. 2013 [cit. 2013-03-16]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Aukce

[5] *Ekonomické aplikace teorie her*. Praha: Dům techniky ČSVTS, 1985, 141 s.

[6] FIALA, Petr. Aukce: teorie a praxe. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2012, 178 s. ISBN 978-80-7431-099-7

[7] FIALA, Petr. *Modely a metody rozhodování. 2. přeprac. vyd. V Praze: Oeconomica, 2008, 292 s. ISBN 978-80-245-1345-4*

[8] FIALA, Petr; DLOUHÝ, Martin. *Základy kvantitativní ekonomie a ekonomické analýzy*. Vyd. 1. Praha: Oeconomica, 2006, 165 s. ISBN 80-245-1087-1

[9] FORGÓ, F; SZÉP, J. *Introduction to the theory of games*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1985. ISBN 96-305-3357-X

[10] Game Theorists who have received the Nobel Prize. *Game Theory Home Page* [online]. 2011 [cit. 2012-11-25]. Dostupné z: http://lcm.csa.iisc.ernet.in/gametheory/nobel.html

[11] Historie aukcí. *Euro Aukce* [online]. 2011 [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: http://www.euro-aukce.cz/historie_aukci.html

[12] HOŘEJŠÍ, Bronislava; MACÁKOVÁ, Libuše; SOUKUP, Jindřich; SOUKUPOVÁ, Jana. Mikroekonomie. 5., aktualiz. vyd. Praha: Management Press, 2010, 574 s. ISBN 978-80-7261-218-5

[13] HYKŠOVÁ, Magdalena. *Teorie her & optimální rozhodování* [online]. 2013 [cit. 2013-02-13]. Dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/

[14] JONÁŠ, Jiří. *Oslava ekonomie: Přednášky laureátů Nobelovy ceny za ekonomii*. 2.dopl.vyd. Praha: Academia, 1994, 807 s. ISBN 80-200-0200-6

[15] KAPOUN, Jan. Průkopníci informačního věku (9.): John von Neumann. *CIO Business World: IT strategie pro manažery* [online]. Praha: IDG Czech, 2010 [cit. 2013-02-19]. Dostupné z: http://businessworld.cz/cio-bw-special/prukopnici-informacniho-veku-9-john-von-neumann-6968

[16] KOTLER, Philip. *Moderní marketing: 4. evropské vydání*. 1. vyd. Praha: Grada, 2007, 1041 s. ISBN 978-80-247-1545-2

[17] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a její ekonomické aplikace*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 148 s.

[18] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a konflikty zájmů*. Vyd. 1. V Praze: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2002, 114 s. ISBN 80-245-0450-2

[19] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a optimální rozhodování*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1974, 225 s.

[20] MAŇAS, Miroslav; DLOUHÝ, Martin. *Games and economic decisions*. Vyd. 4. přeprac. Praha: Oeconomica, 2009, 94 s. ISBN 978-802-4516-103

[21] MAREŠ, Milan. *Principy strategického chování*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2003, 120 s. ISBN 80-246-0616-X

[22] MORAVEC, Zdeněk. John von Neumann. *Programujte.com* [online]. 2010 [cit. 2013-02-19]. Dostupné z: http://programujte.com/clanek/2010080700-john-von-neumann/

[23] Neumann John von. *Slavní matematici, fyzici a vynálezci* [online]. 2009 [cit. 2013-02-19]. Dostupné z: http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Neumann_J.htm

[24] Nobelovu cenu za ekonomii získali Alvin Roth a Lloyd Shapley. *Marketing & Media* [online]. 2012 [cit. 2012-11-25]. Dostupné z: http://mam.ihned.cz/c1-57921750-nobelovu-cenu-za-ekonomii-ziskali-alvin-roth-a-lloyd-shapley

[25] Oskar Morgenstern. *Library of economics and Liberty* [online]. 2002 [cit. 2013-02-19]. Dostupné z: http://www.econlib.org/library/Enc1/bios/Morgenstern.html

[26] Oskar Morgenstern. *New World Encyklopedia* [online]. 2008 [cit. 2013-02-19]. Dostupné z: http://www.newworldencyclopedia.org/entry/Oskar_Morgenstern

[27] SODOMKA, Lubomír; SODOMKOVÁ, Markéta. *Kronika Nobelových cen: Nobelovy ceny za fyziku, chemii, fyziologii a medicínu, literaturu, mír a ceny Švédské říšské banky za ekonomii*. 1. vyd. Praha: Knižní klub, 2004, 775 s. ISBN 80-242-1058-4

[28] VÁCLAVÍK, Ramis. *Nositelé Ceny Švédské národní banky za ekonomii na památku Alfreda Nobela*. Vysoká škola ekonomická v Praze [online]. 1.11.2012 [cit. 2012-11-25]. Dostupné z: http://ciks.vse.cz/Edice/nobel/

[29] VOLEK, Josef. *Modelování a řešení rozhodovacích situací*. 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010, 106 s. ISBN 978-807-3953-119

[30] VOLEK, Josef. *Operační výzkum*. 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003, vii, 101 s. ISBN 80-719-4621-4

[31] VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. *Theory of games and economic behavior*. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1947, 641 s.

[32] WEINLICH, Robert. *Laureáti Nobelovy ceny za ekonomii*. Olomouc: Alda, 1999, 51 s. ISBN 80-856-0057-9

[33] WILLIAMS, J. *Dokonalý stratég, aneb, Slabikář teorie strategických her*. 1. vyd. *Praha: Orbis, 1966, 285 s.*