Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

Modelování úmrtnosti obyvatelstva ve vysokém věku a její porovnání ve vybraných evropských zemích

Bc. Pavla Schejbalová

Diplomová práce

2013

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Pavla Schejbalová**
Osobní číslo:	**E11646**
Studijní program:	**N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor:	**Pojistné inženýrství**
Název tématu:	**Modelování úmrtnosti obyvatelstva ve vysokém věku a její porovnání ve vybraných evropských zemích**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování:

Cílem diplomové práce je teoreticky popsat a aplikovat modely úmrtnosti obyvatelstva ve vysokém věku v České republice a následně provést porovnání s vybranými evropskými zeměmi.
Diplomová práce bude obsahovat:
- modelování úmrtnosti a jeho význam pro životní a důchodové pojištění,
- teorie modelu úmrtnosti pro vyšší věkové kategorie,
- model úmrtnosti pro vyšší věkové kategorie pro vývoj v České republice,
- porovnání úmrtnosti v České republice a vybraných evropských zemích.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

BENJAMIN, B., POLLARD, S. H. The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. Institute of Actuaries, Scotland, London, 1993. 519 s. ISBN 0-901066-26-5.

CIPRA, T. Pojistná matematika: teorie a praxe. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-869-2911-6.

DAŇHEL, J. a kolektiv: Pojistná teorie. 1.vyd. Praha: Oeconomica, 2006. 338 s. ISBN 80-86946-00-2.

DUCHÁČKOVÁ, E. Principy pojištění a pojišťovnictví. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-861-1992-0.

KOSCHIN, F. Aktuárská demografie: úmrtnost a životní pojištění. 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky, 2000. 123 s. ISBN 80-245-0022-1.

ROTAR, V. I. Actuarial models: The Mathematics of Insurance. Boca Raton, FL: Taylor, 2006. 633 s. ISBN 15-848-8586-6.

SEKERKA, B. Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění. Praha: Profess Consulting, 2002. 397 s. ISBN 80-725-9031-6.

SIVAŠOVÁ, D. Aktuárska demografia v prostredí konkurenčného poistného trhu. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. 98 s. ISBN 978-80-225-2509-1.

Jindrová

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Pavla Jindrová, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 30. září 2012
Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2013

doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.
děkanka

L.S.

prof. Ing. Jan Čapek, CSc.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. října 2012

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 28. 6. 2013

Pavla Schejbalová

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala své vedoucí práce Mgr. Pavle Jindrové, Ph.D. za její odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce. Také bych ráda poděkovala své rodině, která byla po celou dobu mého studia velikou oporou.

ANOTACE

Obsahem diplomové práce je modelování úmrtnosti dle pěti různých postupů na základě informací získaných z úmrtnostních tabulek, které v České republice zveřejňuje Český statistický úřad, se zaměřením se na obyvatelstvo ve vysokém věku. Modelování úmrtnosti pro vysoké věky znamená použít obyvatelstvo asi od 60 let výše, což je nezbytnou součástí finančního zabezpečení v důchodovém věku. Součástí práce je tedy i kapitola věnovaná životnímu a důchodovému pojištění. Dále se práce věnuje úmrtnostním tabulkám a jejich konstrukci, graduaci a jejich přijatelnosti. Na závěr byly vybrány modely – Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamova funkce, ze kterých je, po jejich vzájemném porovnání, jeden vybrán a použit pro porovnávání úmrtnosti České republiky s vybranými evropskými zeměmi.

KLÍČOVÁ SLOVA

Aktuárská demografie, životní pojištění, důchodové pojištění, modelování úmrtnosti, úmrtnostní tabulky, graduace, Gompertz-Makehamova funkce

TITLE

The Simulation of Populations's Mortality in Old Age and its Comparison in Selected European Countries

ANNOTATION

The content of this thesis is the simulation of mortality by five different procedures on the basis of information obtained from life tables published in the Czech Republic, Czech Statistical Office, with a focus on people in old age. Simulation mortality for high ages is to use population from about 60 years earlier, which is an essential part of financial security in retirement. The work is a chapter devoted to the life and pension insurance. Further, a mortality tables and their construction, graduation and their acceptability. At the end of the selected models - Graduation with standard tables and Gompertz-Makehamova function of which is, after their confrontation, one is selected and used to compare mortality Czech Republic and selected European countries.

KEYWORDS

Actuarial demographics, life insurance, pension insurance, simulation mortality, life tables, graduation, Gompertz-Makeham function

OBSAH

SEZNAM TABULEK

SEZNAM ILUSTRACÍ

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

CZE - Česká republika

ESP – Španělské království

GBR – Spojené království Velké Británie a Severního Irska

Ho – Nulová hypotéza

KH – Kritická hranice

NOR – Norské království

ROM - Rumunsko

SVK – Slovenská republika

TK – Testovací kritérium

Úvod

V dnešní době je problematika modelování úmrtnosti obyvatelstva nanejvýš aktuálním tématem, vzhledem k neustálému se zvyšování počtu obyvatelstva ve vysokém věku a dnešní úrovni zdravotní péče v České republice, jež v mnohých případech znamená o mnoho let prodloužení délky lidského života, včetně péče o obyvatele s různým zdravotním poškozením, což v důsledku nemálo zasahuje i do sociální sféry obyvatelstva.

Cílem diplomové práce je modelovat úmrtnost obyvatelstva ve vysokém věku v České republice a následně provést porovnání s vybranými evropskými zeměmi. Po porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovy funkce budeme srovnávat míry úmrtnosti pro vybrané evropské země s Českou republikou pro muže a ženy zvlášť, neboť jejich průměrné délky života si nejsou rovny.

První kapitola je věnována životnímu a důchodovému pojištění, protože situace se stárnutím obyvatelstva v České republice je pro komerční instituce se zaměřením na životní pojištění v popředí jejich zájmu. Vše souvisí se sociálním zabezpečením starších lidí, včetně vyplácení výše důchodů.

Většina států každý rok aktualizuje své úmrtnostní tabulky, ze kterých lze vyčíst pravděpodobnou výši věku úmrtí na daném území. Tyto tabulky se konstruují pomocí konkrétních ukazatelů získaných dle určitých výpočtových vztahů.

Na základě informací získaných z úmrtnostních tabulek, v České republice vydaných Českým statistickým úřadem, můžeme modelovat úmrtnost několika způsoby. Abychom úmrtnost mohli modelovat je zapotřebí znát míru úmrtnosti, délku života a intenzitu úmrtnosti, což jsou pojmy definované a vysvětlené ve druhé kapitole. Z těchto znalostí vychází zákony úmrtnosti, které jsou predikcí samotné modelace úmrtnosti obyvatelstva.

Následně si vysvětlíme význam a důležitost graduace úmrtnostních tabulek, nicméně abychom mohli posoudit přijatelnost graduace musíme zjistit její hladkost, kterou vypočítáme pomocí třetí diference, a přesnost, k jejímuž ověření slouží statistické testy. Součástí této práce je ukázka výše zmíněného posouzení přijatelnosti graduace.

Nejčastěji používaný parametrický model pro graduování úmrtnosti obyvatelstva ve vysokém věku, což je obsahem předposlední kapitoly, je Gompertz-Makehamova funkce, která použijeme k vyhlazení specifické míry úmrtnosti. Vysoký věk obyvatelstva je v odborných publikacích uváděn od 60 do 85 - 90 let, přičemž v tomto rozmezí je nezbytně nutné úmrtnost vyhlazovat, protože její hodnoty se zpravidla odchylují od trendu předchozích.

1. Životní a důchodové pojištění

Životní a důchodové pojištění je spjato s úmrtností, která se každý rok mění pro jednotlivé věky i pohlaví. Proto ho komerční finanční instituce modelují, aby se vyvarovaly co největšímu riziku. Klienti těchto institucí využívají zmíněné pojištění k rezervotvorným účelům, jež chtějí použít zejména v důchodovém věku. Ale není to obvykle jediný důvod, protože někteří se chtějí zajistit i v případě ztráty příjmu.

V této kapitole se seznámíme s významem životního a důchodového pojištění pro níže zmíněné modelování úmrtnosti a také si uvedeme jejich nejpoužívanější druhy.

„Pojištění je nástroj finanční eliminace negativních důsledků nahodilosti.“ [6, str. 188] Tato definice vystihuje důvod vzniku pojištění. Jednotlivci si velmi uvědomují potřebu řešit ekonomické negativní dopady do svého života či života celé rodiny. Ekonomické dopady vycházejí z neodhadnutelné délky života jednotlivce nebo z možného poškození jeho zdraví. Životní pojištění nejlépe pokrývá rizika takto vzniklých finančních důsledků. Životní pojištění v sobě jednoznačně nese prvek vzájemné solidarity, ale s rozvojem hospodářství se přeměnilo na komerční kategorii, která funguje na čistě tržních principech. Dalším rozvojem životního pojištění je snaha pojišťoven nabídnout na trh produkty, které by nejlépe pokrývaly co nejširší škálu životních rizik**.** [6]

1.1. Životní pojištění

Z historického hlediska víme, že životní pojištění sloužilo k finanční ochraně pozůstalých v případě úmrtí živitele. Dříve bylo důvodem k uzavírání životního pojištění ekonomická situace rodiny, která většinou měla jen příjmy od jednoho živitele. Jednalo se o skromnou podporu, neboť valná část pojistného se spotřebovala na pohřební náklady. Proto se životní pojištění nejčastěji prodávalo pod názvem pohřební pojištění. [6]

V souvislosti s životním pojištěním se v odborné literatuře můžeme potkat s pojmem „předčasná smrt“, která definuje smrt živitele rodiny s nesplněnými finančními závazky (vzdělání dětí, nesplacená hypotéka, nesplacená půjčku, nároky osob závislých od jeho příjmů, atd.) Předčasná smrt způsobí, ve většině rodin, závažné finanční problémy žijícím členů z důvodu ztráty příjmu jejich živitele. V případě, že náhrada příjmů z jiných zdrojů i finanční majetek rodiny je nedostatečný, bude životní úroveň ovlivněná značnou finanční nejistotou. [7]

Význam životního pojištění se posouvá od pojištění pro případ smrti k rezervotvorným pojištěním. Klient potřebuje krýt riziko předčasného úmrtí, ale zároveň si uvědomuje možnost dožití se konce pojistné doby. V případě dožití klient předpokládá výplatu plnění od pojišťovny. [6]

V dnešní době požaduje jedinec s nástupem do důchodového věku stejné anebo výrazně nezměněné ekonomické možnosti. Očekává, že s rostoucím věkem bude růst i jeho postavení ve společnosti i celkové úspory. Pro zajištění takového předpokladu se v dnešní době konstruuje i podoba životního pojištění. [6]

Státní penzijní systém se dostává do krize. Není to jen problém naší země, ale řeší se i v zahraničí. Nástup silných poválečných generací do důchodového věku, spolu s prodlužující se střední délkou života, vede k výraznému narušení dřívější rovnováhy státních penzijních systémů. *„Enormní tlak na veřejné finance může být snížen pouze využitím dalších pilířů důchodového systému, kde má životní pojištění velmi široké využití."* [6, str. 189]

Druhy životního pojištění: [4], [7]

- Pojištění pro případ dožití – Pojišťovna vyplatí předem sjednanou pojistnou částku, jestliže se osoba pojištěná ve věku *x* dožije sjednané pojistné doby *n*. Pokud pojištěný zemře před koncem pojistné doby, pojištění zanikne bez náhrady. Nicméně to se v praxi obvykle doplňuje o výhradu vrácení pojistného v případě smrti pojištěného, protože by se příslušný produkt stal neprodejným.
- Pojištění pro případ smrti – Pojišťovna vyplatí předem sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, ve kterém pojištěná osoba ve věku *x* zemřela.
- Dočasné pojištění pro případ smrti – Pojišťovna vyplatí předem sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku *x* zemře, pokud dojde k úmrtí před uplynutí pojistné doby *n*, tzn. dožije-li se pojištěný konce pojistné doby, pojištění zanikne bez náhrady.
- Smíšené pojištění – Pojišťovna vyplatí předem sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, ve kterém pojištěná osoba ve věku *x* zemřela, nejpozději ale při dožití konce sjednané pojistné doby *n*. Toto pojištění je kombinací dočasného pojištění pro případ smrti a pojištění pro případ dožití. Někdy se označuje za pojištěnou formu spoření.

- Pojištění s pevnou dobou výplaty – Pojišťovna vyplatí předem sjednanou pojistnou částku na konci pojistné doby n bez ohledu na to, zda osoba pojištěná ve věku x žije. Toto pojištění se uzavírá za běžné pojistné a v případě smrti pojištěného, před uplynutím pojistné doby, trvá pojištění dál. Pojišťovna na sebe převezme povinnost placení pojistného. V praxi se tento pojistný produkt označuje jako stipendijní (studijní, věnové, svatební apod.) pojištění.

- Investiční životní pojištění – Toto pojištění je ve většině případů konstruováno jako kombinace dočasného pojištění pro případ smrti s klesající pojistnou částkou a investičního spoření. Při úmrtí pojištěného pojišťovna vyplácí pojistnou částku sjednanou pro případ smrti a aktuální hodnotu podílových jednotek pojištěného. Při dožití sjednané pojistné doby nebo při odkupu vyplácí pojišťovna aktuální hodnotu podílových jednotek klienta.

  Výhodou tohoto typu životního pojištění je, že klient se může samostatně rozhodnout, do kterého investičního fondu a v jakém poměru budou jeho peněžní prostředky investované. Nevýhodou je, že nese riziko s nižším očekávaným výnosem. Pojišťovna nezaručí pojištěnému výnos z investovaných prostředků.

1.2. Důchodové pojištění

Důchodové pojištění komerčních pojišťoven musíme odlišit od důchodového pojištění, které je poskytováno v rámci sociálního zabezpečení. Výdaje ze státního rozpočtu se hradí primárně z příjmů ze sociálního pojištění, které je povinně hrazeno zaměstnavateli, zaměstnanci a osobami samostatně výdělečně činnými. Ze státního rozpočtu se hradí starobní, plný invalidní, částečně invalidní, vdovský, vdovecký a sirotčí důchod. Komerční pojišťovny nabízejí nadstavbu nad těmito druhy důchodu placené ze státního rozpočtu. [6]

Důchodové pojištění je také potřeba odlišovat od produktů jiných peněžních ústavů, které nabízejí jednorázové složení vkladu a výplatu jistého důchodu po předem sjednanou dobu. Tyto důchody se vypočítávají pouze na základě finanční matematiky pomocí časové hodnoty peněz, nikoliv na základě pojistné matematiky, která zohledňuje pravděpodobnost úmrtí. [6]

„Z pojistně technického hlediska můžeme důchodové pojištění označovat jako pojištění pro případ opakovaného dožití. Pojistným plněním lze označit jeden každý důchod a pojistnou událostí vždy dožití se dalšího termínu výplaty důchodu.“ [6, str. 199]

Důchodová pojištění: [4]

- Pojištění doživotního důchodu – Pojišťovna vyplácí důchod v předem sjednané výši vždy na počátku (předlhůtný doživotní důchod) nebo na konci (polhůtný doživotní důchod) pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije. Klient tedy kupuje okamžitě splatnou doživotní rentu.
- Pojištění dočasného důchodu – Pojišťovna vyplácí důchod v předem sjednané výši vždy na počátku (předlhůtný dočasný důchod) nebo na konci (polhůtný dočasný důchod) pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije a neuplynula pojistná doba n.
- Področní důchody – Častěji než roční důchody se v praxi vyplácejí področní důchody, kdy je důchod vyplácen m-krát ročně (např. měsíční důchod pro $m = 12$) a uplatňuje se področní úročení.

2. Modelování úmrtnosti

Díky informacím – úmrtnostním tabulkám, které komerční instituce získají zejména z portfolia klientů, mohou do jisté míry předpokládat vývoj procesu umírání, jež získají na základě modelování úmrtnosti. Na druhou stranu například země tyto metody používají ke statistickým účelům a k jistému zabezpečení výši důchodu. Každá země včetně komerční instituce si modeluje úmrtnost sama.

Modelovat úmrtnost můžeme pouze, pokud známe její vlastnosti. Modelování úmrtnosti závisí na některých faktorech, což je střední stav obyvatelstva v populaci, ze kterého se zjišťují míry úmrtnosti. Dále délka života jedince mezi narozením a úmrtí. Také na intenzitě úmrtnosti, která vyjadřuje pravděpodobnosti úmrtí v závislosti na době trvání života. A v neposlední řadě na zákony úmrtnosti, kterými modelujeme lidskou úmrtnost. S těmito faktory se seznámíme a popíšeme si jejich vlastnosti.

Matematika životního pojištění používá kombinaci finanční matematiky a matematiku modelování úmrtnosti, protože pojistná událost v rámci pojištění osob spočívá v úmrtní nebo dožití se určitého věku. [4]

Proces vymírání v populaci nazýváme úmrtnost (mortalis). Úmrtnost je vlastnost populace, kde členové populace umírají a my ji sledujeme jako proces vymírání.

Populaci můžeme rozdělit na dvě skupiny. První skupinu můžeme chápat jako skupinu lidí obývající určité území (např. populace v Pardubicích). Druhá skupina je skupina osob se stejnými biologickými a kulturními znaky (např. romská populace). V našem případě budeme populaci chápat jako obě tyto skupiny dohromady. [10]

Úmrtnost můžeme charakterizovat z pohledu pojistně-matematického hlediska následovně: [4]

- vystupují zde dva stavy „naživu“ a „zemřelí“, u každého pojištěného lze tento stav jednoznačně určit,
- přechod mezi těmito stavy se nazývá úmrtí,
- okamžik úmrtí je náhodný jev a popisujeme ho pomocí pravděpodobnostních nástrojů.

2.1. Míry úmrtnosti

Střední stav obyvatelstva v roce t označujeme $\overline{S}_t$. Střední stav teoreticky určíme jako součet individuálních dob, po které jednotliví členové v populaci setrvali. V praxi by byl však tento postup velice náročný. Střední stav můžeme zjistit jednodušeji, a to dvěma způsoby. [10], [11]

Průměr z počátečního stavu $S(t_0)$ a koncového stavu $S(t_1)$

$$\overline{S}_t = \frac{S(t_0) + S(t_1)}{2}. \tag{1}$$

Stav ke středu roku (z 30. června na 1. července)

$$\overline{S}_t = S\left(t + \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

2.1.1. Obecná míra úmrtnosti

Obecná míra úmrtnosti, také někdy nazývána hrubá míra úmrtnosti, je jedna z nejjednodušších charakteristik úmrtnosti, ale není to objektivní ukazatel. Protože předpokládá, že z hlediska úmrtnosti jsou všichni lidé stejní, ale úmrtnost se výrazně liší podle věku, pohlaví, profese a dalších charakteristik.

$$m_t = \frac{M_t}{\overline{S}_t} \tag{3}$$

M_t je počet zemřelých členů populace. $\overline{S}_t$ označuje střední stav populace.

Obvykle se uvádí v promilích, v běžné mluvě se používá termín „na tisíc osob“. [10], [11]

2.1.2. Specifická míra úmrtnosti

Největší rozdíly v úmrtnosti jsou ve věku a pohlaví, proto se výpočet úmrtnosti dělí do kategorií podle těchto dvou znaků. Specifická míra úmrtnosti[1] používá toto dělení a využívá diferenční míry úmrtnosti většinou pro pohlaví a věk.

$$m_x = \frac{M_x}{\overline{S}_x} \tag{4}$$

M_x značí počet zemřelých ve věkové skupině za jeden rok. $\overline{S}_x$ je střední stav obyvatelstva ve věku x. [10], [11]

[1] Přesněji: věkově a pohlavně specifické míry úmrtnosti.

2.2. Délka života

„Model úmrtnosti lze založit na náhodné veličině T_0, která představuje délku života právě narozeného jedince, tj. dobu mezi věkem 0 a úmrtím. Jedná se o délku života lidí, takže se T_0 obvykle měří v rocích s tím, že může nabývat i neceločíselných hodnot na spojité časové ose (mluví se o spojité náhodné veličině). Protože s T_0 souvisí náhodné veličiny představující budoucí délku života v obecném věku x, je představa, na níž je založen model úmrtnosti, zřejmá: jestliže náhodně vybereme jednoho jedince z velké skupiny x-letých, pak jeho budoucí délka života sice není známá, ale můžeme na ni pohlížet jako na náhodnou veličinu s odhadnutelným pravděpodobnostním rozdělením. Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny se většinou popisuje pomocí distribuční funkce.“ [4, str. 89 a 90]

$$F_0\ (t) = P\ (T_0 \leq t) \tag{5}$$

(Pro spojitou náhodnou veličinu T_0 platí $P\ (T_0 \leq t) = P\ (T_0 < t)$.)

V pojišťovnictví se používají náhodné veličiny T_x, které představují budoucí délku života ve věku x za podmínky, že daný jedinec se dožil věku x. Proto nemůžeme pravděpodobnost rozdělení T_x zjednodušit na vztah $T_x = T_0 - x$, ale pomocí podmíněné pravděpodobnosti spočítáme délku života ve věku x: [4]

$$F_x\ (t) = P\ (T_x \leq t) = P\ (T_0 \leq x + t \mid T_0 > x) = \frac{P\ (x < T_0 \leq x + t)}{P\ (T_0 > x)} = \frac{F_0\ (x + t) - F_0\ (x)}{1 - F_0\ (x)}. \tag{6}$$

Vedle distribuční funkce používáme i funkci přežití

$$S_0\ (t) = P\ (T_0 > t) = 1 - F_0\ (t). \tag{7}$$

Pro funkci přežití ve věku x platí:

$$S_x\ (t) = P\ (T_x > t) = P\ (T_0 > x + t \mid T_0 > x) = \frac{P\ (T_0 > x + t)}{P\ (T_0 > x)} = \frac{S_0\ (x + t)}{S_0\ (x)}. \tag{8}$$

Například $F_{50}(1) = 0{,}003\ 107$ pro muže v České republice v roce 2011 představuje pravděpodobnost toho, že délka života 50letého muže bude kratší než jeden rok, tj. jinými slovy se jedná o pravděpodobnost toho, že 50letý muž se nedožije věku 51. [4]

Některé symboly pro práci s distribučními funkcemi: [2], [4]

- Pravděpodobnost úmrtí ve věku x – pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který zemře před dosažením věku x + 1:

$$q_x = F_x\,(1) = P\,(T_x \leq 1). \tag{9}$$

- Pravděpodobnost dožití ve věku x – pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který se dožije věku x + 1:

$$p_x = S_x\,(1) = P\,(T_x > 1). \tag{10}$$

- Pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který zemře před dosažením věku $x + t$ (pro t = 1):

$$_tq_x = F_x\,(t) = P\,(T_x \leq t). \tag{11}$$

- Pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který se dožije věku $x + t$ (pro t=1):

$$_tp_x = S_x\,(t) = P\,(T_x > t). \tag{12}$$

- Pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který zemře ve věku $x + s$ (pro s = 0):

$$_{s|}q_x = F_x\,(s + 1) - F_x\,(s) = P\,(s < T_x \leq s + 1). \tag{13}$$

- Pravděpodobnost žijícího jedince ve věku x, který se dožije věku $x + s$, avšak zemře před dosažením věku $x + s + t$ (pro t = 1):

$$_{s|t}q_x = F_x\,(s + t) - F_x\,(s) = P\,(s < T_x \leq s + t). \tag{14}$$

Velice důležitá pro charakteristiku náhodné veličiny T_x je střední hodnota označována za střední délku života ve věku x za podmínky, že daný jedinec se dožije věku x. Střední délka života sděluje průměrný počet let života zbývajících jedinci ve věku x

$$°e_x = E\,(T_x). \tag{15}$$

2.3. Intenzita úmrtnosti

Intenzita úmrtnost je jeden z nejdůležitějších pojmů ve stochastické analýze přežití a vyjadřuje pravděpodobnosti úmrtí v závislosti na době trvání života pomocí spojité náhodné veličiny. Tato veličina požaduje pravděpodobnost úmrtí (q_x) osoby ve věku x před dovršením věku x + 1. [13]

„Jestliže náhodná veličina T_0 má pravděpodobnostní hustotu

$$f_0(t) = \frac{d}{dt} F_0(t) = -\frac{d}{dt}\ {}_t p_0, \tag{16}$$

pak mají pravděpodobnostní hustotu také náhodné veličiny T_x“ [4, str. 92]

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \frac{d}{dt} \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = -\frac{d}{dt} \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_x p_0} = -\frac{d}{dt}\ {}_t p_0. \tag{17}$$

V tom případě zavedeme intenzitu úmrtnosti ve věku x: [4]

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{{}_x p_0} = -\frac{1}{{}_x p_0} \cdot \frac{d}{dx}\ {}_x p_0 = -\frac{d}{dx} \ln({}_x p_0). \tag{18}$$

Protože pravděpodobnost hustota splňuje pro malé přírůstky Δx přibližně vztah $f_0(x) \cdot \Delta x \approx F_0(x + \Delta x) - F_0(x) = P(x < T_0 < x + \Delta x)$, lze předchozí vztah zapsat do přibližného tvaru

$$\mu_x \cdot \Delta x \approx P(x < T_0 < x + \Delta x \mid T_0 > x) \tag{19}$$

a výraz $\mu_x \cdot \Delta x$ je pravděpodobnost úmrtí ve věkovém intervalu $(x, x + \Delta x)$ malé délky Δx za podmínky, že daný jedinec se dožil věku x.

2.4. Zákony úmrtnosti

Pomocí zákonů úmrtnosti se snažíme modelovat lidskou úmrtnost, která vychází z matematických vzorců (křivek úmrtnosti). Tyto vzorce používáme pro operace s praktickými úmrtnostními údaji, které jsou obvykle prezentovány ve formě tzv. úmrtnostních tabulek.

Křivky úmrtnosti popisují velice úsporně velké množství údajů (např. pravděpodobnosti úmrtí pro jednotlivé věky). Jsou to hladké křivky, proto nám pomáhají vyrovnávat (vyhlazovat) úmrtnostní tabulky, ale jako každý statistický odhad jsou zatíženy statistickými chybami.

Máme více druhů zákonů úmrtnosti a právě proto využíváme vhodné volby intenzity úmrtnosti. [4]

Konstantní intenzita úmrtnosti

Jestliže je intenzita úmrtnosti konstantní

$$\mu_x = \lambda, \tag{20}$$

pak je zákon definován

$$_t p_x = e^{-\lambda t}. \tag{21}$$

Funkce přežití $_t p_x$ zde očividně nezávisí na věku x, proto je tento zákon úmrtnosti nevhodný pro lidskou populaci. Potřebujeme, aby intenzity úmrtnosti rostla s věkem. [4]

Moivrův zákon úmrtnosti

Rovnoměrné rozdělení délky života s pravděpodobností hustotou je

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \qquad 0 < t < \omega - x, \tag{22}$$

kde ω je stanovený nejvyšší věk pro uvažovanou populaci. Pak je zřejmě funkce přežití

$$_t p_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}, \qquad 0 < t < \omega - x \tag{23}$$

a intenzita úmrtnosti je hyperbolicky rostoucí funkce. [4]

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \qquad 0 < x < \omega \tag{24}$$

Gompertzův zákon úmrtnosti

Benjamin Gompertz došel k myšlence, že organismus s přibývajícím věkem stárne a ztrácí odolnost vůči okolí.

Proto je intenzita úmrtnosti exponenciálně rostoucí.

$$\mu_x = b \cdot c^x, \qquad \begin{array}{l} b > 0 \\ c > 1 \end{array} \tag{25}$$

Funkce přežití je: [4], [10]

$$_t p_x = g^{c^x (c^t - 1)}, \qquad g = e^{\frac{-b}{\ln(c)}}. \tag{26}$$

Makehamův zákon úmrtnosti

William Matthew Makeham zobecnil Gomperzův zákon úmrtnosti. Rozdělil příčinu smrti na související s věkem a nesouvisící s věkem (náhodná úmrtí), kde je tato vlastnost definována pomocí dalšího parametru a. Intenzita úmrtnosti dostává tvar:

$$\mu_x = a + b \cdot c^x, \qquad a > 0. \tag{27}$$

Funkce přežití má tvar:

$$_t p_x = s^t \cdot g^{c^x(c^t - 1)}, \qquad s = e^{-a}. \tag{28}$$

Pro lidskou populaci dává Makehamův zákon úmrtnosti ve srovnání s ostatními úmrtnostními křivkami obvykle nejlepší výsledky. [4], [10]

Weibullův zákon

Weibull použil polynomicky rostoucí intenzitu úmrtnosti.

$$\mu_x = k \cdot x^n, \qquad \begin{array}{l} k > 0 \\ n > 0 \end{array} \tag{29}$$

Funkce přežití má tvar:

$$_t p_x = w^{(x+t)^{n+1} - x^{n+1}}, \qquad w = e^{\frac{-k}{n+1}}. \tag{30}$$

Weibullův zákon se hlavně používá k ocenění životnosti různých technických zařízení. [4]

3. Úmrtnostní tabulky a jejich konstrukce

Úmrtnostní tabulky slouží ke sdělení informace, kterou jsme získali pozorováním příslušné populace, a následnými výpočty v jednotlivých věkových skupinách. Sledují se úmrtnostní tabulky zvlášť pro muže a pro ženy, protože ženy se dožívají vyššího věku než muži. Evropský soudní dvůr zrušil výjimku, která pojišťovnám umožňovala zohledňovat statistické odlišnosti mezi muži a ženami, proto došlo k sjednocení úmrtnostních tabulek a od 21. prosince 2012 došlo ke sjednocení cen za pojistná rizika. Rozlišujeme úmrtnostní tabulky dle různých hledisek. [3], [8], [23]

V této kapitole si vysvětlíme tvorbu úmrtnostní tabulky, která je podkladem k modelování úmrtnosti. Úmrtnostní tabulky si rozdělíme podle základního dělení a dělení podle věkového intervalu. Každé úmrtnostní tabulky vycházejí z počtu zemřelých a ze středního stavu obyvatelstva, které popisují různé ukazatele, jež jsou popsány v kapitole 3.1. Pro zjednodušené pracování s úmrtnostními tabulkami můžeme využívat komutační čísla (kapitola 3.2). V příloze A je ukázka úmrtnostních tabulek pro muže z České republiky pro rok 2011.

Základní dělení: [3], [23]

- <u>Generační úmrtnostní tabulky</u> někdy nazýváme kohortní[2] úmrtnostní tabulky (cohort life table, dynamic life table). Záznam průběhu života konkrétní populace od okamžiku narození všech jedinců po smrt posledního z nich. Předpokládáme statistické sledování populace po dlouhou dobu, proto je konstrukce těchto úmrtnostních tabulek obtížná. Také může dojít k technickým potížím, např. některé výsledky jsou zastaralé nebo dokonce nepřesné[3]. Tyto úmrtnostní tabulky se zejména používají při sledování populace zvířat, hmyzu, mikroorganismů atd., které mají průměrnou délku života kratší než člověk.
- <u>Průřezové úmrtnostní tabulky</u> nebo také běžné či okamžikové úmrtnostní tabulky (current life table, period life table, static life table) hypoteticky sledují současně narozené osoby během krátkého časového průřezu (většinou jednoho roku). *Na základě úmrtnostních měr podle jednotlivých věků v daném období se pak konstruuje snímek života hypotetické populace současně narozených jedinců.* [3, str. 144] Například je používá Český statistický úřad (ČSÚ).

---

[2] Kohorta je generace současně narozených jedinců.
[3] Sledovaná populace z dlouhodobého hlediska se zmenšuje i emigrací.

Dělení podle sledovaného věkového intervalu: [3]

- Úplné úmrtnostní tabulky pracují s věkovými intervaly o délce 1 rok.
- Zkrácené úmrtnostní tabulky používají víceleté věkové intervaly (obvykle 5 let).

V životním pojištění pracujeme s průřezovými úmrtnostními tabulkami**.** [3]

3.1. Popis úmrtnostní tabulky

Jednotlivé sloupce úmrtnostní tabulky popisují nejčastěji následující hodnoty: [2], [4], [20]

- D_x – počet zemřelých ve věku x v daném období
- P_x – střední stav populace ve věku x v příslušném období, někdy se také značí S_x nebo E_x
- x – věk osoby, $x \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$, ω je předpokládaný nejvyšší věk, kterého může dosáhnout osoba ze sledovaného souboru (věk žen a mužů se často odlišuje, pro ženu se používá y pro muže x)
- q_x – pravděpodobnost úmrtí ve věku x, tzn. osoba, která je naživu ve věku x se nedožije věku $x + 1$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{31}$$

- p_x – pravděpodobnost dožití ve věku x, tzn. osoba, která je naživu ve věku x se dožije věku $x + 1$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{32}$$

Mezi pravděpodobnosti dožití a úmrtí platí následující vztah: [2], [4], [20]

$$p_x + q_x = 1. \tag{33}$$

- l_x – počet osob dožívajících se věku x. Hodnota l_0 se nazývá kořen (radix, kmen) úmrtnostní tabulky a rovná se počátečnímu počtu osob ze sledovaného souboru (obvykle má hodnotu 100 000). Další hodnoty l_x představují počet jedinců z kořene l_0, kteří se dožijí věku x. Posloupnost $l_0 \geq l_1 \geq \dots \geq l_\omega$ je nerostoucí a nazývá se dekrementní řád vymírání populace.

- d_x – počet zemřelých ve věku x je počet osob z l_0, kteří zemřou v dokončeném věku x, tzn. počet zemřelých ve věku x ($d_\omega = l_\omega$)

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{34}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{35}$$

- L_x – počet let prožitých jedinci ve věku x, tj. (střední) počet člověkoroků, které ve věku x prožije l_x osob

$$L_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \tag{36}$$

- T_x – počet zbylých let života jedinců ve věku x, tj. (střední) počet člověkoroků, které do konce svého života prožije l_x osob

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_\omega \tag{37}$$

- $°e_x$ – střední délka života ve věku x, tj. průměrný počet let, kterých se dožije jedinec ve věku x

$$°e_x = \frac{T_x}{l_x} \tag{38}$$

3.2. Komutační čísla

Komutační čísla slouží jako pomocné hodnoty. Vypočítávají se pomocí diskontování hodnot z úmrtnostních tabulek při zvolené úrokové míře. Používají je životní pojišťovny ve formě tabulek pro zjednodušení a zpřehlednění pojistně-matematických výpočtů.

Úrokovou míru v pojišťovnictví nazýváme pojistně-technickou úrokovou mírou, která nám slouží pro pojistně-matematické výpočty (např. pro výpočet pojistných sazeb). V České republice je velikost pojistně-technické úrokové míry určena vyhláškou[4] České národní banky. [2], [20]

Diskontní faktor, který odpovídá úrokové míře, má tvar:

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{39}$$

[4] Vyhláška č. 434/2009 Sb., kterou se provádějí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví

Komutační čísla nultého řádu

Diskontovaný počet dožívajících se ve věku x:

$$D_x = l_x\, v^x. \tag{40}$$

Diskontovaný počet zemřelých ve věku x:

$$C_x = d_x\, v^{x+1}. \tag{41}$$

Komutační čísla prvního řádu

$$N_x = D_x^{[2]} = \sum_{j=0}^{\omega - x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega \tag{42}$$

$$M_x = C_x^{[2]} = \sum_{j=0}^{\omega - x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega \tag{43}$$

Komutační čísla druhého řádu

$$S_x = D_x^{[3]} = \sum_{j=0}^{\omega - x} N_{x+j} = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_\omega \tag{44}$$

$$R_x = C_x^{[3]} = \sum_{j=0}^{\omega - x} M_{x+j} = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_\omega \tag{45}$$

4. Graduace úmrtnostních tabulek

Tato kapitola se zabývá graduací úmrtnostních tabulek a jejich metodami, které si probereme v podkapitolách. Pro některé metody je vytvořen graf, abychom si mohli představit, jak taková graduace vypadá.

Graduace znamená vyrovnávání či vyhlazování úmrtnostních tabulek, které slouží k následnému modelování úmrtnosti. Je to proces, kdy se odhaduje pravděpodobnost úmrtí, nebo jiné úmrtnostní charakteristiky (např. míra úmrtnosti). Eliminují se nesystematické nepravdivé složky, které nemají racionální vysvětlení a vznikly v důsledku toho, že „hladké" teoretické pravděpodobnosti úmrtí odhadujeme statistickými postupy z reálných dat. [4], [22]

Úmrtnostní tabulky jsou sestaveny na základě údajů o populaci (jedná se o statické odhady úmrtnosti). Vypočítané odhady kolísají okolo skutečných hodnot. Někdy se může stát, že při výběru dat dojde ke značnému odchýlení od skutečných hodnot. Tento negativní jev se odstraňuje graduací úmrtnostních tabulek. Graduací realizací v grafu pravděpodobnosti q_x odstraňujeme nehladké úseky s „hrby" bez racionálního vysvětlení, které pravděpodobně vznikly v důsledku náhodné konfigurace použitých výběrových dat. [22]

Vyrovnáním se také docílí věkový růst pravděpodobností úmrtí tam, kde je na místě, a nejedná se o lokální maxima spojená s oprávněným věkovým poklesem těchto pravděpodobností. To se potom promítá do monotonie pojistných sazeb (např. při srovnatelných podmínek pojištěný uzavírající pojištění pro případ smrti ve věku 40 by měl platit méně než pojištěný ve věku 41). [4]

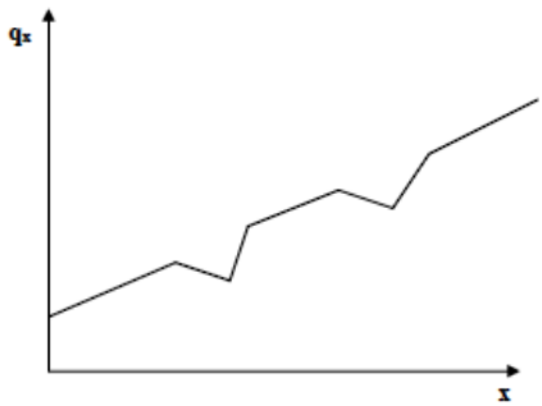
Vyhlazování úmrtnostních tabulek se doporučuje zejména pojišťovnám nebo penzijním fondům, které si vytváří svoje úmrtnostní tabulky na základě relativně malých pojistných kmenů. Celonárodní úmrtnostní tabulky jsou konstruovány centrálními statistickými institucemi a jsou obvykle publikovány ve vyrovnaném tvaru. [4], [22]

Prenatální péče se začíná postupně zdokonalovat, sice posloupnost dat q_x začíná vyššími hodnotami, ale tyto hodnoty jsou mnohonásobně vyšší, než pozdější dětská úmrtnost. Absolutní minimum dosahuje posloupnost při vstupu do puberty a potom rychleji roste až do začátku třetí desítky, která vykazuje mírné lokální maximum, neboť potom určitou dobu pomalu klesá. Jako důvody lokálního maxima se uvádějí smrtelné úrazy při automobilových nehodách a značná kumulace sebevražd v tomto věku. Posloupnost dat q_x dále roste exponenciálně po překročení třicátého roku života. [22]

Statistické odhady míry pravděpodobnosti q_x nebo intenzity úmrtnosti μ_x pro jednotlivé roky x, které dostaneme ze známých statistických modelů (binomický model úmrtnosti, Poissonův model úmrtnosti) se nazývají hrubé pozorování.

Uvedené odhady q_x nebo μ_x mají následující vlastnosti: [22]

- každý odhad je jen jednou z možných hodnot výběrové charakteristiky a je zatížen výběrovou chybou,
- hrubé pozorování se mění nerovnoměrně každý rok v důsledku náhodnosti, jsou nepravidelná, proto získaná křivka pospojována úsečkami není hladká.



Obrázek 1.: Klasická ukázka hrubých pozorování

Zdroj: [22, str. 53]

Vyhlazení spočívá v nalezení přijatelně hladké křivky z postupnosti hrubých odhadů q_x nebo μ_x při použití všech statistických informací. Takto upravené odhady se nazývají graduované míry a označíme je $\hat{q}_x$ a $\hat{\mu}_x$. [4], [22]

Cíle graduace jsou: [22]

- vyrovnat v úmrtnostních tabulkách hrubé pozorování dostatečně hladkou křivkou, vhodnou pro praktické aktuárské výpočty v životním a důchodovém pojištění, kde se vyžaduje pravidelný vývoj při přechodu mezi sousedními věky,
- využít informace z odhadů získaných ze sousedních věků pro zdokonalení odhadů v každém věku x.

V úmrtnostních tabulkách vyrovnáváme hodnoty pomocí q_x (pravděpodobnosti úmrtí) a μ_x (intenzity úmrtnosti), kterou považujeme jako funkci časovou, pro niž platí, že se rovná míře úmrtnosti m_x. A mají následující vztahy: [16], [20]

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}, \tag{46}$$

$$q_x = 1 - e^{-m_x}. \tag{47}$$

Metody graduace úmrtnostních tabulek se dělí do následujících skupin: [1]

- grafická metoda,
- analytické (parametrické) vyrovnání,
- splínové metody,
- graduace pomocí standardních tabulek,
- mechanické (neparametrické) vyrovnání.

Většina dat pro ukázku metod graduace v této kapitole jsou použitá z úmrtnostních tabulek pro muže z roku 2011 pro Českou republiku, ovšem pro graduaci pomocí standardních tabulek byla použita data pro muže z roku 2010 pro Slovenskou republiku, protože v České republice tato data zveřejněna nejsou.

4.1. Grafická metoda

Tato metoda spočívá v nalezení hladké křivky v grafu vypočítaných hodnot q_x a μ_x grafickými metodami.

Patří mezi nejrozšířenější techniky vyhlazování. Slouží zejména pro situace, kdy nemáme k dispozici úplné údaje.

Posloupnost hrubých měr se zpřesní vyrovnáním pomocí diferencí, čímž se získají vyrovnané míry, které splňují hladkost a pravdivost údajů. Tento proces se také nazývá hand-polishing. [22]

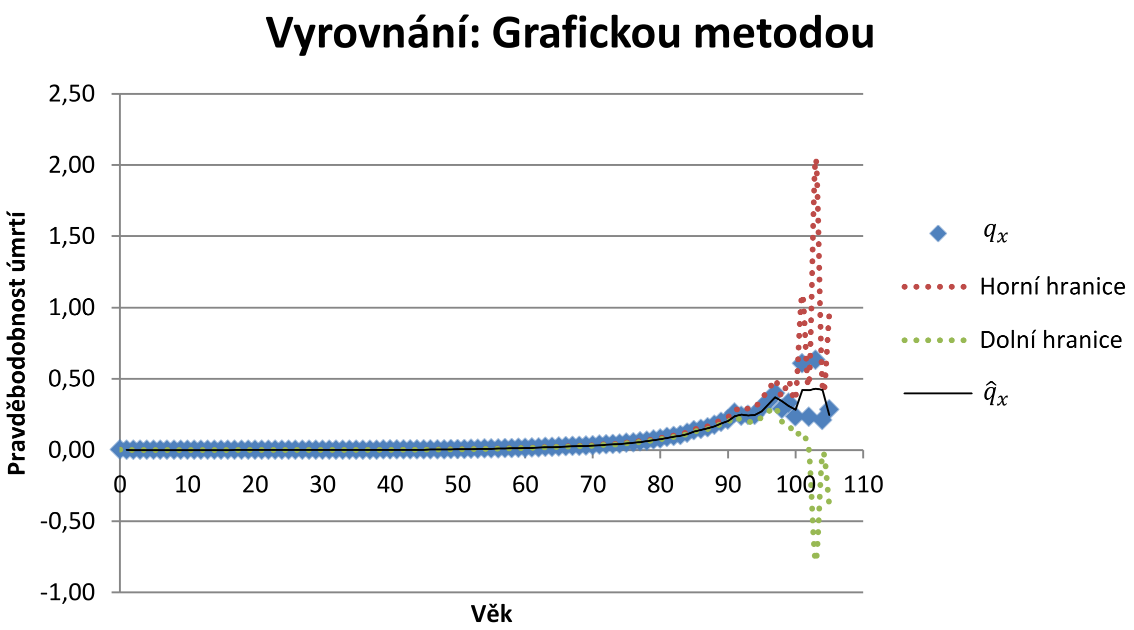
Míry úmrtnosti se počítají z dostupných údajů a graficky se znázorňují pomocí jednotlivých bodů. Načrtneme hladkou křivku a díky poloze bodů zjistíme její sklon, který se co nejvíce přibližuje k daným bodům tak, aby se přitom zachovala posloupnost daných měr. [22]

Při grafickém vyhlazování je vhodné obvykle naznačit do grafu 95% interval spolehlivosti pro pozorované hodnoty v každém věku. Hraniční 95% interval spolehlivosti získáme pro odhad $\hat{q}_x$ a $\hat{\mu}_x$ pomocí vztahů:

$$\hat{q}_x \pm 2\frac{\sqrt{D_x}}{P_x}, \tag{48}$$

$$\hat{\mu}_x \pm 2\frac{\sqrt{D_x}}{P_x}. \tag{49}$$

Spojnice pozorovaných hodnot s příslušnou horní a dolní hranicí nám poskytuje vhodný návod pro konstrukci hladké křivky pro vyhlazení. Křivka hladkosti by neměla přesahovat přes hranice intervalu spolehlivosti více než jednou za 20 pozorovaných hodnot. Těsný úsek mezi intervaly spolehlivosti naznačují velké hodnoty P_x, které mají největší vliv na hladkost křivek. [22]



Obrázek 2.: Vyrovnání: Grafickou metodou

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

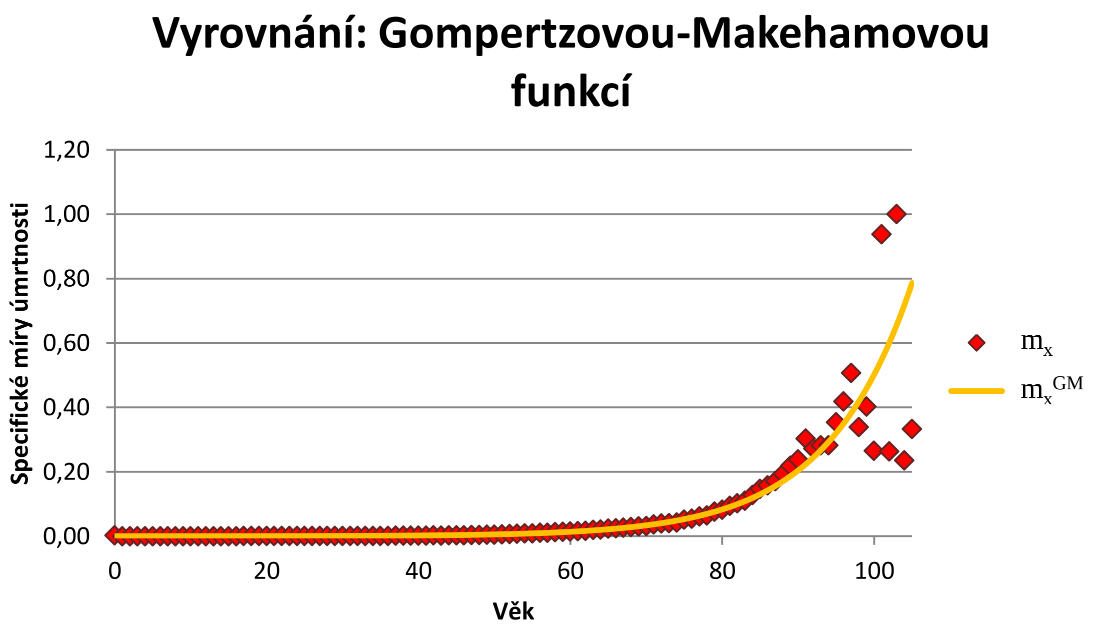
4.2. Parametrické metody

Parametické metody se také označují jako analytické metody, vyhlazují se pomocí matematické funkce (křivky). Může existovat analytická funkce, jejíž všeobecný tvar odpovídá reálným údajům, které chceme vyhlazovat. Taková křivka bude spojitá a hladká.

Nebude nás zajímat její dokonalá hladkost, kterou předpokládáme, ale zda tvar zvolené křivky dostatečně odpovídá reálným údajům.

Jedna z nejpoužívanějších analytických metod je Gompertz-Makehamova funkce, která se užívá zejména pro vyhlazování specifické míry úmrtnosti ve vysokém věku. [9], [22]

Gompertz-Makehamova metoda byla použita v praktické části a teorie k této metodě je popsána v kapitole 6.



Obrázek 3.: Vyrovnání: Gompertzovou-Makehamovou funkcí

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

4.3. Splínové metody

Touto metodou rozdělíme délku lidského života do několika úseků. Na každý úsek se poté použije graduace polynomu nižšího stupně. Hladká funkce se získá ze spojení dílčích funkcí z jednotlivých úseků. Dostatečnou hladkost v bodech spojitosti zabezpečíme pomocí požadavku na existenci oboustranných derivací příslušného stupně jednotlivých funkcí (tedy v bodech, v kterých se funkce spojuje, se musí derivace do příslušného stupně funkce zleva rovnat derivaci funkce zprava). [22]

4.4. Graduace pomocí standardních tabulek

Pokud potřebujeme vyhladit relativně malý počet údajů q_x, resp. μ_x, je možné použít informace ze standardních tabulek, které jsou založené na velkém počtu údajů. Odhadnuté vyhlazené hodnoty $\hat{q}_x$ dostaneme jako jednoduchou regresní funkci standardizovaných tabulkových měr q_x^s, tedy $\hat{q}_x = f\left(q_x^s\right)$ tak, aby byla splněna podmínka metody nejmenších čtverců. [22]

$$\sum_x \left[q_x - f\left(q_x^s\right)\right]^2 = min \tag{50}$$

<u>Tyto funkce mohou mít tvar:</u>

$$\hat{q}_x = a\, q_x^s, \tag{51}$$

$$\hat{q}_x = a\, q_x^s + b, \tag{52}$$

$$\hat{q}_x = (a\, x + b)\, q_x^s, \tag{53}$$

$$\hat{q}_x = q_{x+k}^s, \tag{54}$$

$$\hat{q}_x = a\, q_x^s + b\, q_x^s. \tag{55}$$

Prvním krokem metody je použití vhodného výběru standardních tabulek (např. pro životní nebo důchodové pojištění).

Dále nalezneme vhodný funkční vztah mezi $\hat{q}_x$ a q_x^s a odhadneme parametry. Odhad vyrovnaných měr úmrtnosti $\hat{q}_x$ dostaneme ze vztahu (52).

Obě strany rovnice vynásobíme hodnotou P_x a dostaneme tvar:

$$P_x\, \hat{q}_x = P_x\, a\, q_x^s + b\, P_x. \tag{56}$$

Protože $D_x = P_x\, \hat{q}_x$, platí $D_x = P_x\, a\, q_x^s + b\, P_x$ pro všechna x. Potom můžeme vztah přepsat do tvaru:

$$\sum_x D_x = a \sum_x P_x\, q_x^s + b \sum_x P_x\,. \tag{57}$$

$P_x q_x^s$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle standardních tabulek. $P_x \hat{q}_x$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle odhadované úmrtnostní tabulky.

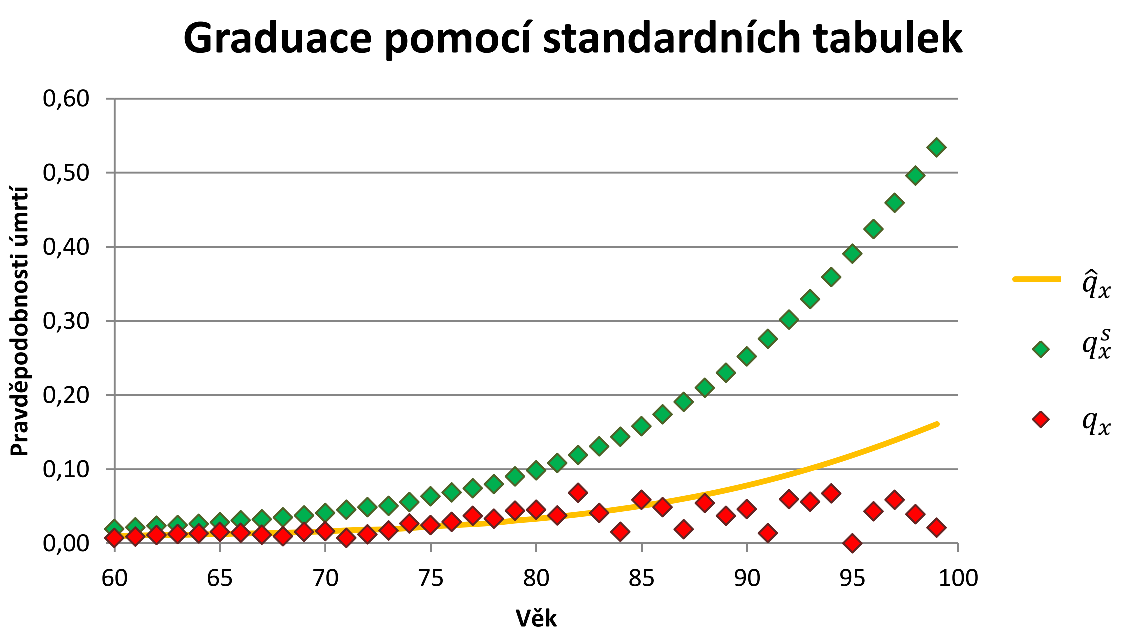
Pro každý věk můžeme vypočítat parciální sumy D_x, $P_x\, q_x^s$ a P_x ve tvarech $\sum_{y \leq x} D_y$, $\sum_{y \leq x} P_y\, q_y^s$, $\sum_{y \leq x} P_y$.

Poté získáváme systém rovnic:

$$\sum_{y \leq x} D_y = a \sum_{y \leq x} P_y\, q_y^s + b \sum_{y \leq x} P_y\,, \tag{58}$$

$$\sum_{x} \sum_{y \leq x} D_y = a \sum_{x} \sum_{y \leq x} P_y\, q_y^s + b \sum_{x} \sum_{y \leq x} P_y\,. \tag{59}$$

Použití graduace pomocí standardních tabulek v praxi není vždy vhodné, ale je jednoduché, pokud je počet parametrů menší nebo roven třem. [22]



Obrázek 4.: Graduace pomocí standardních tabulek

Zdroj: Vlastní zpracování dle [24], [27]

<u>Pro lepší orientaci v obrázku 4. vysvětlíme jednotlivé značení:</u>

- q_x^s jsou pravděpodobnosti úmrtí ze státních úmrtnostních tabulek pro Slovenskou republiku,
- q_x jsou pravděpodobnosti úmrtí pro pojišťovnu pro Slovenskou republiku,
- $\hat{q}_x$ jsou vyhlazené hodnoty pro pojišťovnu.

V praktické části byla použita metoda graduace pomocí standardních tabulek pro porovnání s Gompertz-Makehamovou funkcí. Pro porovnání těchto dvou metod vyhlazování byly použity pouze pravděpodobnosti úmrtí pro Českou republiku - muži 2011, věk 60 – 99 let.

4.5. Neparametrické metody

Neparametrické metody nazýváme také mechanické vyrovnávání, jsou jedny z nejpoužívanějších metod pro vyhlazování úmrtnostních tabulek, zejména pro výpočtovou jednoduchost.

Vyhlazenou míru úmrtnosti $\hat{q}_x$, resp. $\hat{\mu}_x$ pro daný věk *x*, získáme z průměru hrubých měr úmrtnosti q_x z vhodně zvoleného okolí věku *x*. Většinou jde o vážený průměr, který přikládá průměrovaným hodnotám tím menší váhu, čímž jsou vzdálenější od věku *x*, tzn. od středu příslušného okolí. Váhy jsou symetrické okolo svého středu a jejich součet je roven jedné.

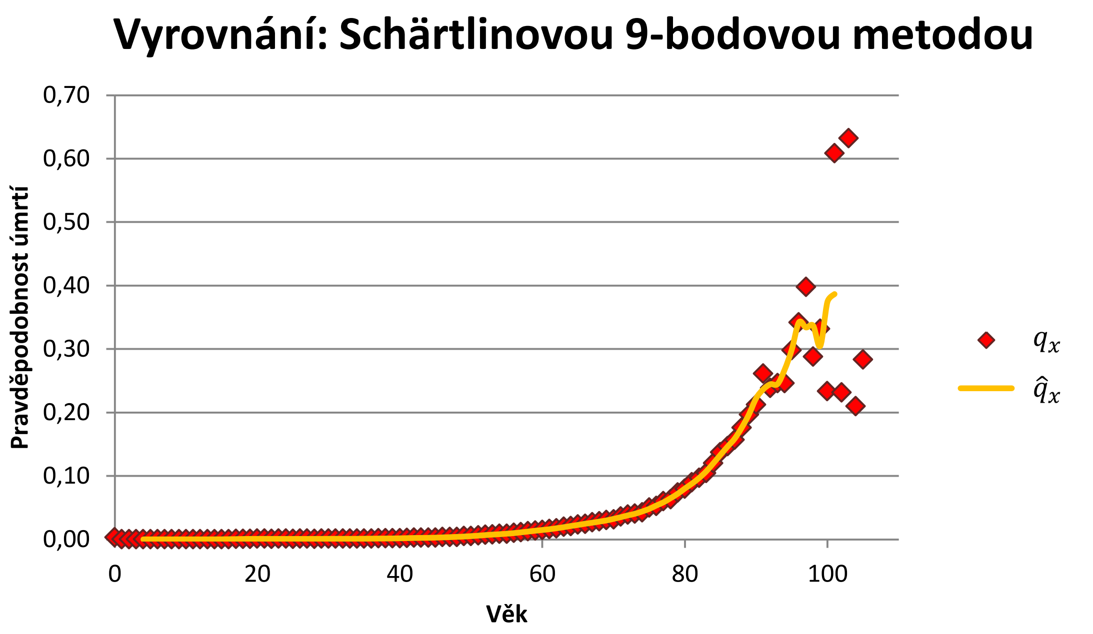
Neparametrické metody obvykle využívají klouzavé průměry. Velkou nevýhodou používání klouzavých průměrů je ztráta informace u počátečních a koncových hodnot. Protože u některých druhů metod tyto hodnoty nelze určit např. Spencerovy metody. Označení „*n*-bodová metoda“ znamená, že klouzavý průměr je aplikován na „okno“ vstupních hodnot o délce *n* bez ohledu na to jestli některé váhy jsou nulové. [4], [9], [22] V příloze B jsou vyhlazené hodnoty pro všechny použité neparametrické metody.

Schärtlinova 9-bodová metoda

Tuto metodu vypočítáváme pomocí klouzavých průměrů dle vzorce:

$$\hat{q}_x = \frac{1}{27}\left[9\, q_x + 8\,(q_{x-1} + q_{x+1}) + 2\,(q_{x-2} + q_{x+2}) - (q_{x-4} + q_{x+4})\right]. \qquad (60)$$

Vstupní hodnoty q_{x-3} a q_{x+3} jsou nulové hodnoty, proto se ve vzorci vynechávají. [4]



Obrázek 5.: Vyrovnání: Schärtlinovou 9-bodovou metodou

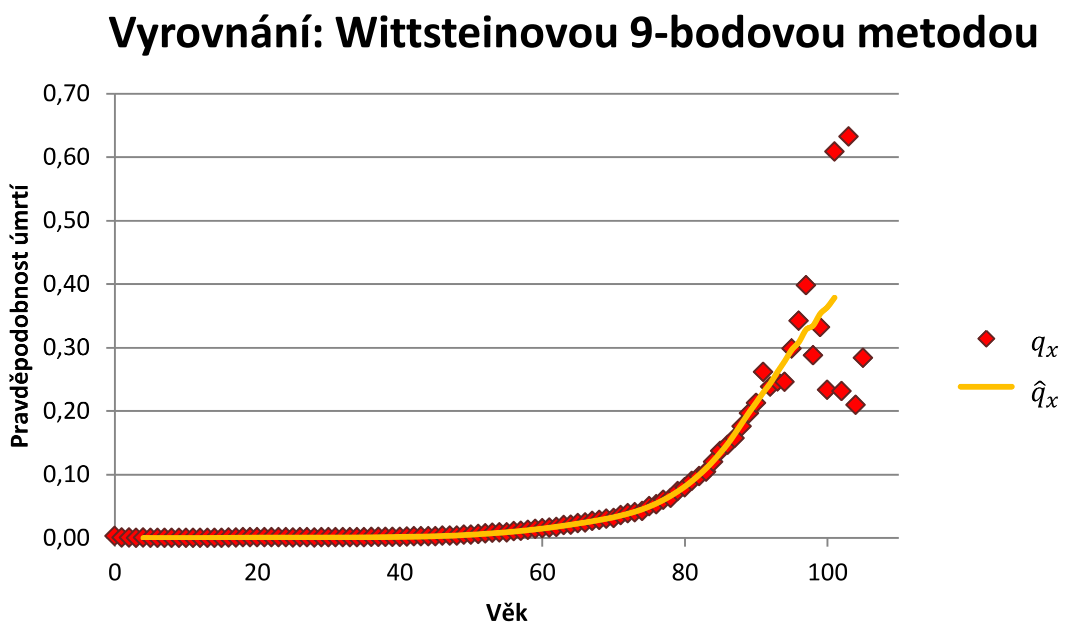
Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Wittsteinova 9-bodovámetoda

Tato metoda je jedna z nejpoužívanějších pro vyhlazování. Pro vyrovnanou hodnotu q_x platí:

$$\hat{q}_x = \frac{1}{25}\left[5\,q_x + 4\left(q_{x-1} + q_{x+1}\right) + 3\left(q_{x-2} + q_{x+2}\right) + 2\left(q_{x-3} + q_{x+3}\right) + \left(q_{x-4} + q_{x+4}\right)\right]. \qquad (61)$$

Ze vzorce je patrné, že váhy u jednotlivých pravděpodobností jsou souměrné kolem středu, tj. q_x. Čím dále jsme od věku x, tím jsou váhy menší. [4], [19], [21]



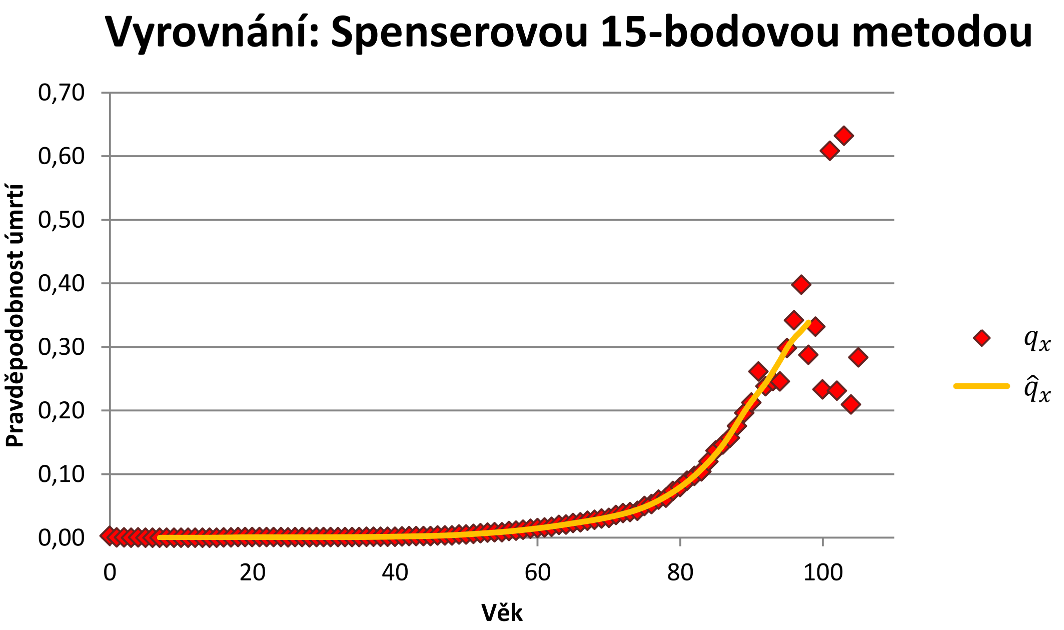
Obrázek 6.: Vyrovnání: Wittsteinovou 9-bodovou metodou

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Spenserova 15-bodová metoda

Pro výpočet vyrovnané hodnoty q_x používáme vážené klouzavé průměry délky $2m + 1 = 15$. Pomocí vzorce (62) dostaneme vyrovnanou hodnotu q_x. [12], [21], [22]

$$\hat{q}_x = \frac{1}{320}\left[\begin{array}{l} 74\, q_x + 67\,(q_{x-1} + q_{x+1}) + 46\,(q_{x-2} + q_{x+2}) + 21\,(q_{x-3} + q_{x+3}) + \\ + 3\,(q_{x-4} + q_{x+4}) - 5\,(q_{x-5} + q_{x+5}) - 6\,(q_{x-6} + q_{x+6}) - 3\,(q_{x-7} + q_{x+7}) \end{array}\right]. \tag{62}$$



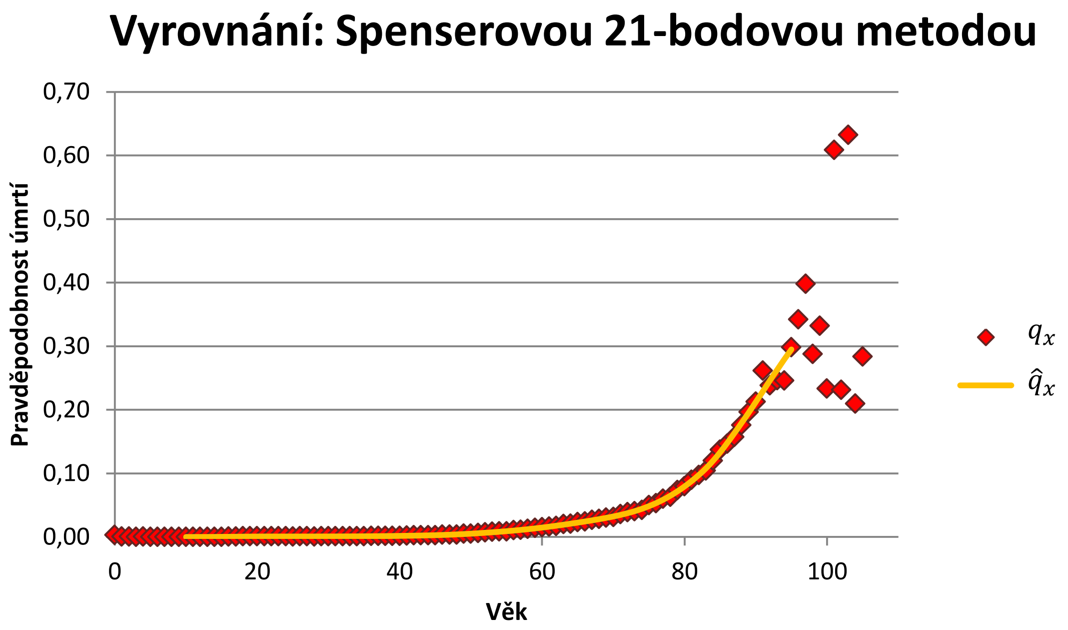
Obrázek 7.: Vyrovnání: Spenserovou 15-bodovou metodou

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Spenserova 21-bodová metoda

Pomocí Spenserovy 21-bodové metody vyhlazujeme q_x, v podstatě použitím metody vážených klouzavých průměrů délky $2m + 1 = 21$. Vyrovnanou hodnotu q_x dostaneme dle vzorce: [12], [22]

$$\hat{q}_x = \frac{1}{350}\left[\begin{array}{c} 60\,q_x + 57\,(q_{x-1} + q_{x+1}) + 47\,(q_{x-2} + q_{x+2}) + 33\,(q_{x-3} + q_{x+3}) + \\ + 18\,(q_{x-4} + q_{x+4}) + 6\,(q_{x-5} + q_{x+5}) - 2\,(q_{x-6} + q_{x+6}) - 5\,(q_{x-7} + q_{x+7}) - \\ - 5\,(q_{x-8} + q_{x+8}) - 3\,(q_{x-9} + q_{x+9}) - (q_{x-10} + q_{x+10}) \end{array}\right]. \qquad (63)$$



Obrázek 8.: Vyrovnání: Spenserovou 21-bodovou metodou

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Hendersonova metoda

V praxi se často používají váhy pro pozorování 5-ti období s konkrétními hodnotami {-0,073; 0,294; 0,558; 0,294; -0,073},a proto vzorec pro výpočet dostaneme ve tvaru:

$$\hat{q}_x = 0{,}558\, q_x + 0{,}294\, \left(q_{x-1} + q_{x+1}\right) - 0{,}073\, \left(q_{x-2} + q_{x+2}\right). \tag{64}$$

Nevýhodou symetrických klouzavých průměrů je ztráta informace na začátku a na konci vyrovnávané řady. Hendersenova metoda dokáže tuto nevýhodu odstranit pomocí aplikace asymetrických klouzavých průměrů. Pro očištění první a poslední hodnoty řady se používají vzorce: [12]

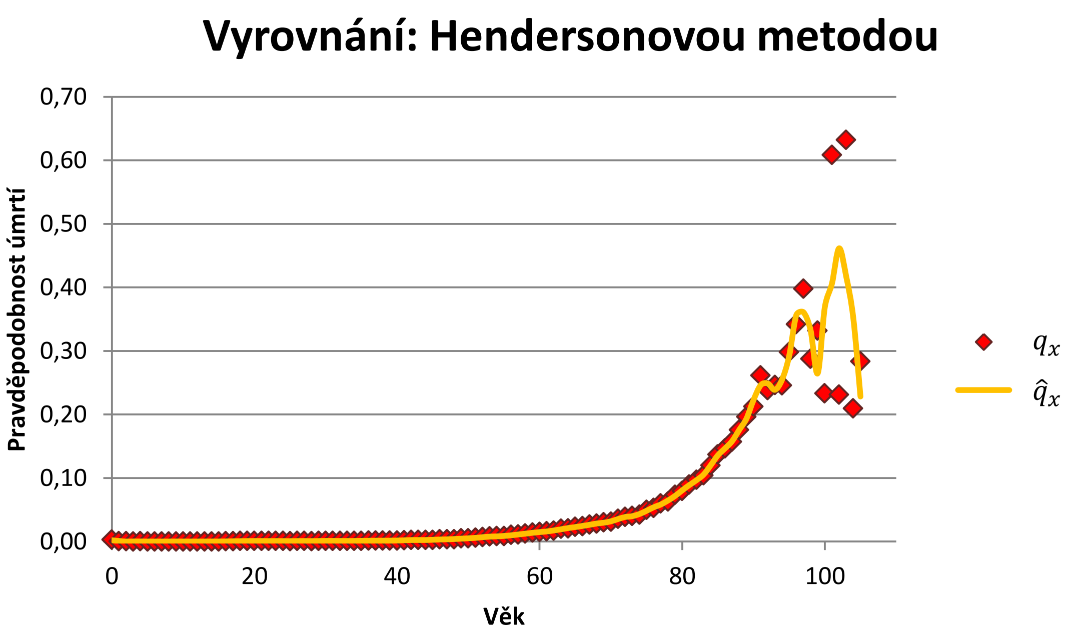
$$\hat{q}_{x_1} = 0{,}670\, q_{x_1} + 0{,}403\, q_{x_2} - 0{,}073\, q_{x_3}, \tag{65}$$

$$\hat{q}_{x_n} = 0{,}670\, q_{x_n} + 0{,}403\, q_{x_{n-1}} - 0{,}073\, q_{x_{n-2}}. \tag{66}$$

Výpočet pro očištění druhé a předposlední hodnoty řady dostaneme ze vztahu: [12]

$$\hat{q}_{x_2} = 0{,}257\, q_{x_1} + 0{,}522\, q_{x_2} + 0{,}294\, q_{x_3} - 0{,}073\, q_{x_4}, \tag{67}$$

$$\hat{q}_{x_{n-1}} = 0{,}257\, q_{x_n} + 0{,}522\, q_{x_{n-1}} + 0{,}294\, q_{x_{n-2}} - 0{,}073\, q_{x_{n-3}}. \tag{68}$$



Obrázek 9.: Vyrovnání: Hendersonovou metodou

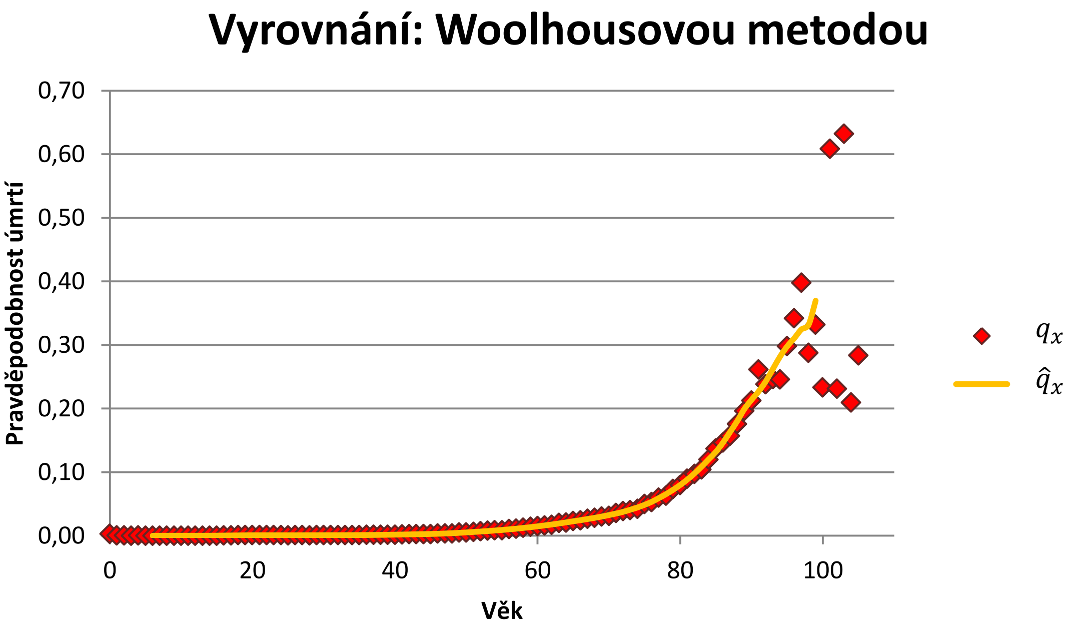
Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Woolhouseova metoda

Pomocí Woolhouseovy metody vyhlazujeme dle vztahu: [16]

$$\hat{q}_x = 0{,}2\, q_x + 0{,}192\,(q_{x-1} + q_{x+1}) + 0{,}168\,(q_{x-2} + q_{x+2}) + 0{,}056\,(q_{x-3} + q_{x+3}) + \\ + 0{,}024\,(q_{x-4} + q_{x+4}) - 0{,}016\,(q_{x-5} + q_{x+5}) - 0{,}024\,(q_{x-6} + q_{x+6}) \tag{69}$$

Jednotlivé pravděpodobnosti ve vzorci nám říkají, že váhy jsou souměrné kolem středu q_x.



Obrázek 10.: Vyrovnání: Woolhousovou metodou

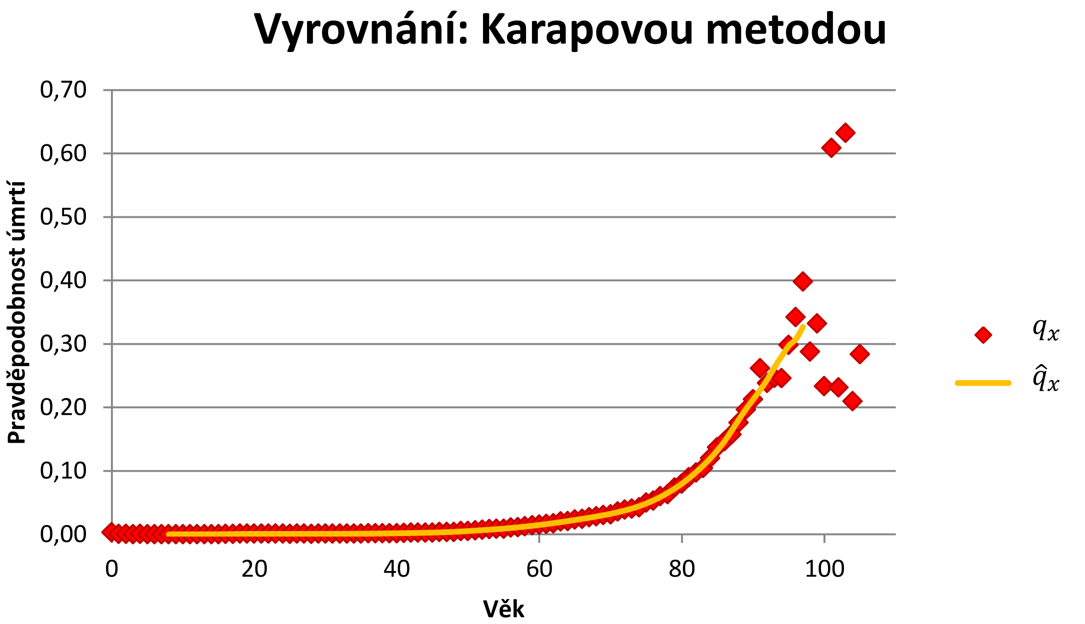
Zdroj: *Vlastní zpracování dle* [25]

Karupova metoda

Karupovou metodou vyrovnáváme dle vzorce: [16]

$$\hat{q}_x = 0{,}2\, q_x + 0{,}1824\,(q_{x-1} + q_{x+1}) + 0{,}1392\,(q_{x-2} + q_{x+2}) + 0{,}0848\,(q_{x-3} + q_{x+3}) + \\ + 0{,}0336\,(q_{x-4} + q_{x+4}) - 0{,}0128\,(q_{x-5} + q_{x+5}) - 0{,}0144\,(q_{x-6} + q_{x+6}) - \\ - 0{,}0096\,(q_{x-7} + q_{x+7}) - 0{,}0032\,(q_{x-8} + q_{x+8}). \qquad (70)$$

Můžeme si všimnout, že váhy jednotlivých pravděpodobností ve vzorci jsou souměrné kolem středu q_x.



Obrázek 11.: Vyrovnání: Karapovou metodou

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

5. Přijatelnost graduace

Pokud chceme mít graduaci přijatelnou, musí byt hladká a přesná. Přijatelnost graduace zkoumáme z důvodu ověření správnosti vybrané metody graduace. Níže si uvedeme některé testy a postupy. U dostatečně hladké graduace se vyrovnané hodnoty měr úmrtnosti málo liší v okolí věku *x*. Při přesnosti graduace se vyrovnané hodnoty míry úmrtnosti přijatelně odchylují od hrubé míry úmrtnosti v každém věku *x*. K ověření přesnosti a hladkosti graduace se používají statistické postupy a testy. [22]

5.1. Ověření hladkosti graduovaných údajů

Matematická definice hladkosti vyžaduje existenci derivací libovolného řádu vyrovnávající funkce. Tato definice připouští, abychom graduaci počítali také pomocí vyšších řádů polynomů, což je z praktického hlediska nepřijatelné. Proto je základním kritériem hladkosti třetí diference graduovaných odhadů, kde požadujeme co nejmenší třetí diferenci a její pravidelný průběh.

Pro posouzení hladkosti graduovaných měr q_x vypočítáme tyto diference: [22]

$$\Delta = \Delta\,\hat{q}_x = \hat{q}_x - \hat{q}_{x-1}, \tag{71}$$

$$\Delta^2 = \Delta^2\,\hat{q}_x = \Delta\,\hat{q}_x - \Delta\,\hat{q}_{x-1}, \tag{72}$$

$$\Delta^3 = \Delta^3\,\hat{q}_x = \Delta^2\,\hat{q}_x - \Delta^2\,\hat{q}_{x-1}. \tag{73}$$

Definitivní závěr o dostatečné hladkosti graduace nemůžeme jednoznačně určit, protože posouzení, jestli je třetí diference skutečně dostatečně malá a pravidelná, je subjektivní. Třetí diference slouží k porovnání výsledků graduace pomocí více druhů metod.

Pro každou zvolenou metodu se spočítá součet absolutních hodnot třetích diferencí graduovaných měr pomocí následujícího vzorce:

$$\sum_x \left|\Delta^3\,\hat{q}_x\right|. \tag{74}$$

A zjistí se minimální hodnota z těchto součtů, která bude nejlepší graduací z hlediska hladkosti. [22]

Všechny ukázky výpočtů v této kapitole se vztahují k věkovému rozmezí od 30 do 60 let pro muže z České republiky - rok 2011, protože lidé v tomto věku jsou nejstabilnější skupinou, kde lze nejvíce předpokládat jejich úmrtnost. Lidé v nižším i vyšším věku patří mezi rizikovější skupinu s vyšším výskytem náhlých příhod jakéhokoliv typu.

Pro ukázku výpočtu součtu absolutních hodnot třetích diferencí graduovaných měr byla použita Schärtlinova metoda. V tabulce 1. můžeme vidět výpočet první až třetí diference a také absolutní hodnotu pro třetí diferenci. Na posledním řádku této tabulky máme součet absolutních hodnot třetí diference.

Tabulka 1.: Diferencování Schärtlinové metody

Schärtlinova metoda			
Δ	**Δ^2**	**Δ^3**	**$\|\Delta^3\|$**
0,000023			
-0,000020	-0,000044		
-0,000019	0,000001	0,000045	0,000045
0,000053	0,000073	0,000072	0,000072
0,000116	0,000063	-0,000010	0,000010
0,000144	0,000028	-0,000035	0,000035
0,000101	-0,000044	-0,000072	0,000072
0,000075	-0,000025	0,000018	0,000018
0,000105	0,000030	0,000055	0,000055
0,000200	0,000095	0,000065	0,000065
0,000284	0,000084	-0,000011	0,000011
0,000220	-0,000064	-0,000147	0,000147
0,000166	-0,000054	0,000009	0,000009
0,000149	-0,000016	0,000038	0,000038
0,000260	0,000111	0,000127	0,000127
0,000374	0,000114	0,000003	0,000003
0,000371	-0,000004	-0,000118	0,000118
0,000485	0,000114	0,000118	0,000118
0,000469	-0,000016	-0,000130	0,000130
0,000700	0,000231	0,000247	0,000247
0,000750	0,000050	-0,000181	0,000181
0,000864	0,000114	0,000064	0,000064
0,000770	-0,000094	-0,000208	0,000208
0,000636	-0,000134	-0,000040	0,000040
0,000767	0,000131	0,000265	0,000265
0,000901	0,000134	0,000003	0,000003
0,001252	0,000351	0,000217	0,000217
0,001259	0,000007	-0,000344	0,000344
0,001258	-0,000001	-0,000008	0,000008
0,001194	-0,000064	-0,000063	0,000063
		$\Sigma\|\Delta^3\| =$	**0,002712**

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

V tabulce 2. Jsou uvedeny výsledky třetích diferencí pro všechny představené neparametrické metody. Nejlepší hladkost má Spenserova 21-bodová metoda, která nevyhlazuje krajní hodnoty. Na rozdíl Hendersenova metoda vyhlazuje i krajní hodnoty, ale má nejhorší hladkost.

Tabulka 2.: Součet absolutních hodnot třetích diferencí graduovaných měr pro jednotlivé metody

	$\Sigma\lvert\Delta^3\rvert$
Schärtlinova metoda	0,002712
Wittsteinova metoda	0,000645
Spenserova metoda (15 b)	0,000401
Spenserova metoda (21 b)	**0,000160**
Hendersonova metoda	0,006274
Woolhouseova metoda	0,001507
Karapova metoda	0,000502

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

5.2. Testování přesnosti graduovaných údajů

V praxi se často používá pro testování přesnosti graduovaných údajů binomický model pro údaje q_x a Poissonův model pro hodnoty μ_x.

Binomický model umožňuje odhadnout pravděpodobnosti nastání určitého počtu úmrtí tehdy, když je známá pravděpodobnost úmrtí q_x, popřípadě přežití $1 - q_x$. A předpokládáme, že pozorujeme n_x osob, jejichž úmrtnost je na sobě nezávislá a pozorované osoby dosáhly na začátku pozorování věk přesně x roků (pozorování trvá jeden rok).

Poissonův model odhaduje přiměřený počet úmrtí v souboru velkého počtu osob, které mají stejný věk.

Při testování přesnosti zjišťujeme, zda počet zemřelých D_x v každé věkové skupině je blízký očekávanému počtu na základě graduace. Při dostatečně velkém počtu pozorovaných osob na základě Moivreovy-Laplaceovy centrální limitní věty mají pozorovaná D_x přibližně normální rozdělení. Proto má normovaná proměnná Z_x normované normální rozdělení se střední hodnotou (75) a rozptylem (76).

$$E(D_x) = P_x\, q_x \tag{75}$$

$$V(D_x) = P_x\, q_x(1 - q_x) \tag{76}$$

Jestliže pro odhad pravděpodobnosti úmrtí q_x použijeme graduované hodnoty $\hat{q}_x$, normovaná proměnná Z_x má následující tvar: [22]

$$Z_x = \frac{D_x - P_x \hat{q}_x}{\sqrt{P_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)}} \qquad \text{a platí } Z_x \sim N(0;1). \tag{77}$$

Tabulka 3. nám ukazuje výpočet přesnosti. Použita byla Spenserova 21-bodová metoda, která měla nejlepší hladkost. Výpočty v jednotlivých sloupcích jsou spočteny pomocí střední hodnoty (75), rozptylu (76), směrodatné odchylky, což je druhá odmocnina z rozptylu a normované proměnné Z_x (77).

Tabulka 3.: Testování přesnosti pro Spenserovu metodu (21 b)

Věk	D_x	P_x	q_x Spenserova metoda (21 b)	$E(D_x)$	$\Delta_x = D_x - E(D_x)$	$V(D_x)$	$\sigma(V(D_x))$	Z_x
30	81	79462	0,000881	70,006354	10,993646	69,944679	8,363294	1,314512
31	84	85972	0,000910	78,272870	5,727130	78,201607	8,843167	0,647633
32	87	91395	0,000944	86,254506	0,745494	86,173103	9,282947	0,080308
33	84	93409	0,000984	91,910341	-7,910341	91,819906	9,582270	-0,825518
34	88	95384	0,001036	98,826123	-10,826123	98,723730	9,935982	-1,089588
35	109	97232	0,001105	107,414610	1,585390	107,295947	10,358376	0,153054
36	124	98655	0,001194	117,778936	6,221064	117,638326	10,846120	0,573575
37	134	96375	0,001304	125,721028	8,278972	125,557025	11,205223	0,738849
38	125	89024	0,001436	127,840520	-2,840520	127,656938	11,298537	-0,251406
39	125	81933	0,001586	129,927407	-4,927407	129,721371	11,389529	-0,432626
40	125	77917	0,001750	136,371152	-11,371152	136,132474	11,667582	-0,974594
41	148	75022	0,001927	144,590350	3,409650	144,311680	12,012980	0,283830
42	180	71869	0,002120	152,362796	27,637204	152,039786	12,330441	2,241380
43	161	69988	0,002332	163,211095	-2,211095	162,830489	12,760505	-0,173276
44	174	70365	0,002572	180,979273	-6,979273	180,513793	13,435542	-0,519463
45	194	71981	0,002852	205,271482	-11,271482	204,686100	14,306855	-0,787838
46	250	75095	0,003188	239,371668	10,628332	238,608650	15,446962	0,688053
47	278	75122	0,003591	269,793086	8,206914	268,824151	16,395858	0,500548
48	252	69893	0,004069	284,426377	-32,426377	283,268917	16,830595	-1,926633
49	325	65268	0,004618	301,429233	23,570767	300,037133	17,321580	1,360775
50	314	63819	0,005233	333,953341	-19,953341	332,205823	18,226514	-1,094743
51	372	62768	0,005904	370,593762	1,406238	368,405709	19,193898	0,073265
52	442	64359	0,006628	426,541786	15,458214	423,714864	20,584335	0,750970
53	539	68863	0,007403	509,797568	29,202432	506,023501	22,494966	1,298176
54	607	72167	0,008237	594,409808	12,590192	589,513900	24,279907	0,518544
55	619	73222	0,009133	668,717533	-49,717533	662,610309	25,741218	-1,931437

Věk	D_x	P_x	q_x Spenserova metoda (21 b)	$E(D_x)$	$\Delta_x = D_x - E(D_x)$	$V(D_x)$	$\sigma(V(D_x))$	Z_x
56	758	73396	0,010100	741,300114	16,699886	733,812978	27,088983	0,616483
57	803	73377	0,011146	817,880569	-14,880569	808,764243	28,438781	-0,523249
58	930	73849	0,012281	906,942102	23,057898	895,803915	29,929984	0,770395
59	1024	73772	0,013508	996,530621	27,469379	983,069236	31,353935	0,876106
60	1088	72699	0,014837	1078,615472	9,384528	1062,612344	32,597735	0,287889

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

5.2.1. χ^2 – test

Tímto testem ověřujeme normální rozdělení Z_x. Nulovou hypotézu zamítáme při velkých hodnotách rozdílů mezi graduovanými a hrubými odhady a také při velké hodnotě testovacího kritéria χ^2. [14], [22]

Testovací kritérium je dáno vztahem:

$$\chi^2 = \sum_x \frac{\left(D_x - P_x\,\hat{q}_x\right)^2}{P_x\,\hat{q}_x\left(1 - \hat{q}_x\right)}, \tag{78}$$

které má rozdělení $\chi^2(n)$ stupňů volnosti, kde n je počet všech věkových skupin.

Graduaci na hladině významnosti α[5] zamítáme testovací kritérium χ^2, jestli překročí kritickou hranici, kterou je kvantil $\chi^2_{1-\alpha}$. [14], [22]

V tabulce 4. jsou hodnoty pro testovací kritérium a kritické hranice. Testovací kritérium se počítá podle vzorce (78). Pro kritickou hranici (kvantil $\chi^2_{1-\alpha}$) potřebujeme znát hodnotu α a počet stupňů volnosti n. α má v tomto případě hodnotu 0,05 a stupňů volnosti n je 31, protože testujeme pro věkovou kategorii od 30 do 60 let. Výpočet kritické hranice byl spočten pomocí funkce CHIINV(α; n) v programu Microsoft Excel 2010. Nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nezamítáme, protože testovací kritérium nepřekročilo kritickou hranici. Můžeme říci, že mezi graduovanými a hrubými odhady nejsou velké rozdíly a proto Z_x má normální rozdělení.

Tabulka 4.: χ^2 test

χ^2 test	
Testovací kritérium (TK)	27,983675
Kritická hranice (KH)	44,985343
TK < KH	**nezamítáme Ho**

Zdroj: Vlastní zpracování

[5] Obvykle se volí $\alpha = 0{,}05$.

χ^2 – test nemůžeme označit za dostatečně spolehlivý pro určení vhodnosti graduace. Některé vzniklé chyby nemusí dokázat odhalit. Jde například o tyto případy: [22]

- levostranné nebo pravostranné zešikmení rozdělení Δ_x,
- nadměrné seskupení pozitivních nebo negativních odchylek Δ_x,
- velký počet velmi malých odchylek a malý počet velmi velkých odchylek Δ_x, což zpochybňuje nezávislost odchylek Δ_x.

Pokud nastane zamítnutí hypotézy o normálním rozdělení Δ_x, resp. Z_x, příčin může být několik: [22]

- existence několika velmi vysokých odchylek, nevyvážených velkým počtem malých odchylek,
- vysoká kumulativní odchylka části nebo celého intervalu,
- přebytek velkých kladných nebo záporných odchylek v části nebo v celém věkovém intervalu,
- nadměrné seskupení odchylek stejného znaménka.

Pro odhalení těchto nedostatků při graduaci používáme dodatečné testy: [22]

- znaménkový test,
- test kumulativních odchylek,
- test změny znamének,
- Stevensův test seskupení znamének.

Znaménkový test

Znaménkový test odhaluje nedostatky graduace v důsledku velkého počtu kladných (záporných) odchylek Z_x. Pokud normované hodnoty Z_x nejsou levostranně ani pravostranně zešikmené, potom by libovolná hodnota odchylky Z_x měla být kladná nebo záporná s pravděpodobností 0,5.

Celkový počet kladných odchylek Z^+ má binomické rozdělení Bi (n; π), kde n je počet věkových skupin a π má hodnotu 0,5.

Zamítáme nulovou hypotézu, pokud celkový počet kladných odchylek Z^+ překročí kritické hranice, což je 2,5% a 97,5% kvantil binomického rozdělení. [14], [18], [22]

V tabulce 5. jsou hodnoty pro testovací kritérium a kritické hranice. Testovací kritérium je počet kladných hodnot Z_x. Kritické hranice jsou hraniční hodnoty intervalu, do kterého by mělo testovací kritérium patřit, pokud nezamítáme nulovou hypotézu. Nulovou hypotézou zjišťujeme, zda nedošlo k velkému počtu kladných nebo záporných znamének. Obě kritické hranice zjistíme pomocí Binomického rozdělení. Pro výpočet kritických hranic použijeme funkci BINOM.INV(n; p; α) v programu Microsoft Excel 2010. Počet pokusů n je v našem případě 31. Pravděpodobnost nastání kladného či záporného znaménka je 0,5. A α má velikost pro první kritickou hranici 2,5 % a pro druhou kritickou hranici 97,5 %.

Nulovou hypotézu nezamítáme, protože testovací kritérium náleží do intervalu kritických hranic. Můžeme říci, že nedošlo k velkému seskupení počtu kladných a záporných znamének.

Tabulka 5.: Znaménkový test

Znaménkový test	
Testovací kritérium (TK)	19
Kritická hranice 1 (KH1)	10
Kritická hranice 2 (KH2)	21
KH1 < TK < KH2	**nezamítáme Ho**

Zdroj: Vlastní zpracování

Test kumulativních odchylek

Tímto testem zjišťujeme nepřijatelnost graduace v důsledku velkých kumulativních odchylek v části nebo v celém věkovém intervalu. Jestliže odchylky $\Delta_x = D_x - P_x \hat{q}_x$ mají normální rozdělení se střední hodnotou $E(\Delta_x) = 0$ a rozptylem $V(\Delta_x) = P_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)$, poté kumulativní odchylky mají normální rozdělení $N\left[0; \sum_x \left(P_x \hat{q}_x \left(1 - \hat{q}_x\right)\right)\right]$. Parametry rozdělení kumulativních odchylek $\sum_x \Delta_x$ získáme z vlastností střední hodnoty a rozptylu součtu nezávislých náhodných proměnných Δ_x.

Nulovou hypotézu na hladině významnosti α nezamítáme, jestliže absolutní normované kumulativní odchylky nepřesáhnou hodnoty kvantilu $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, proto platí: [22]

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sum_x \left(D_x - P_x \hat{q}_x\right)}{\sqrt{\sum_x \left(P_x \hat{q}_x (1-\hat{q}_x)\right)}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{79}$$

V tabulce 6. jsou hodnoty pro testovací kritérium a kritické hranice. Testovací kritérium je vypočítáno podle vzorce (79), který se nachází mezi dvěma kvantily. Kritické hranice jsou kvantily $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, které spočteme pomocí funkce NORMSINV(1 - $\frac{\alpha}{2}$)[6] v programu Microsoft Excel 2010. α má hodnotu 0,05.

Můžeme říci, že máme přijatelnost graduace, protože nezamítáme nulovou hypotézu a tudíž normované kumulativní odchylky nepřesáhly hodnoty KH1 a KH2.

Tabulka 6.: Test kumulovaných odchylek

Test kumulovaných odchylek	
Testovací kritérium (TK)	0,654363
Kritická hranice 1(-$z_{0,975}$)	-1,959964
Kritická hranice 2 ($z_{0,975}$)	1,959964
KH1 < TK < KH2	**nezamítáme Ho**

Zdroj: Vlastní zpracování

Test změny znamének

Jsou-li normované odchylky Z_x nezávislé a zároveň mají normální rozdělení $N(0; 1)$, potom s pravděpodobností 0,5 bude znaménko s pořadím (x + 1) stejné jako znaménko x-té odchylky. Celkový počet znamének pak bude mít binomické rozdělení pravděpodobnosti Bi (n - 1; 0,5).

Nulovou hypotézu na hladině významnosti α zamítáme, jestliže počet znaménkových změn překročí percentil $(1-\alpha)\cdot 100$ binomického rozdělení pravděpodobnosti. [22]

V tabulce 7. jsou hodnoty pro testovací kritérium a kritické hranice. Testovací kritérium se spočítá mechanicky jako změnu znamének proměnné Z_x. Pro kritickou hranici spočítáme

[6] Záporný kvantil musíme vynásobit hodnotou (- 1).

pomocí Binomického rozdělení dle funkce BINOM.INV(n - 1; p; $(1 - \alpha)\cdot 100$) v programu Microsoft Excel 2010. Hodnota $n - 1$ znázorňuje celkový počet zkoumaných hodnot mínus jedna. Velikost pravděpodobnosti použijeme opět 0,5, protože nastání kladného nebo záporného znaménka bude padesáti procentní. Percentil vypočítáme ze vztahu $(1 - \alpha)\cdot 100$ a hodnota $\alpha = 0{,}05$.

Nulovou hypotézu nezamítáme, protože testovací kritérium je menší, než kritická hranice. Graduaci považujeme za přijatelnou.

Tabulka 7.: Test změny znamének

Test změny znamének	
Testovací kritérium (TK)	14
Kritická hranice (KH)	19
TK ≤ KH	**nezamítáme Ho**

Zdroj: Vlastní zpracování

Stevensův test seskupení znamének

Stevensův test seskupení znamének odhaduje nadměrné seskupení odchylek Δ_x stejných znamének $\Delta_x = D_x - P_x \hat{q}_x$. Tento test předpokládá, že počet kladných odchylek je n_1 a počet záporných odchylek je n_2, přičemž platí $n_1 + n_2 = n$. Také se předpokládá existence t skupin kladných znamének.

Výpočet počtů způsobů, kterými je možné rozdělit n_1 kladných znamének do t skupin je:

$$\binom{n_1 - 1}{t - 1}. \tag{80}$$

Také pro záporná znaménka n_2 je počet způsobů rozdělený do t skupin:

$$\binom{n_2 + 1}{t}. \tag{81}$$

Pro celkový počet způsobů uspořádaní kladných znamének n_1 a záporných znamének n_2 je:

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1}. \tag{82}$$

Výslednou hypergeometrickou pravděpodobnost dostání t skupin kladných znamének při počtu n_1 kladných a n_2 záporných znamének vyjádříme ve tvaru:

$$\frac{\binom{n_1 - 1}{t - 1} \cdot \binom{n_2 + 1}{t}}{\binom{n}{n_1}} \text{ a platí } n_1 + n_2 = n. \tag{83}$$

Dle Stevensovy statistiky zamítáme nulovou hypotézu graduace, pokud nepřesáhne pravděpodobnost pro jednotlivé parametry t hodnotu 0,05.

$$\sum_t \frac{\binom{n_1 - 1}{t - 1} \cdot \binom{n_2 + 1}{t}}{\binom{n}{n_1}} \leq 0{,}05 \tag{84}$$

Tento výpočet můžeme označit za velmi zdlouhavý, proto pro výpočet používáme hypergeometrické tabulky. Vypočítáme si střední hodnotu M^+, rozptyl V^+ a počet g seskupení kladných znamének.

$$M^+ = \frac{n_1 \cdot (n_2 + 1)}{n} \tag{85}$$

$$V^+ = \frac{(n_1 \cdot n_2)^2}{n^3} \tag{86}$$

Pomocí Stevensova testu můžeme na hladině významnosti α porovnat hodnoty testovacího kritéria

$$G = \frac{g - M^+}{\sqrt{V^+}} \tag{87}$$

s kvantilem $-z_{1-\alpha}$ normovaného normálního rozdělení. Pokud $G \leq -z_{1-\alpha}$ zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α. [22]

V tabulce 8. jsou hodnoty pro testovací kritérium a kritické hranice. Hodnota n_1 znamená počet kladných znamének a hodnota n_2 počet záporných znamének, které získáme z tabulky 3. pro normovanou proměnnou Z_x. Testovací kritérium se spočítá podle vzorce (87). Hodnotu g získáme spočtením počtu seskupení znamének, také z tabulky 8. Pro normovanou proměnnou Z_x, pro střední hodnotu M^+ použijeme vzorec (85) a rozptyl V^+ spočítáme dle (86). Kritická hranice v tomto případě je kvantil $-z_{1-\alpha}$, který získáme zápornou funkcí -NORMSINV(1 - α) z programu Microsoft Excel 2010. Hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Nulovou hypotézu o přijatelnosti graduace nezamítáme na hladině významnosti α. Můžeme říci, že nedošlo k nadměrnému seskupení odchylek stejného znaménka.

Tabulka 8.: Stevensův test seskupení znamének

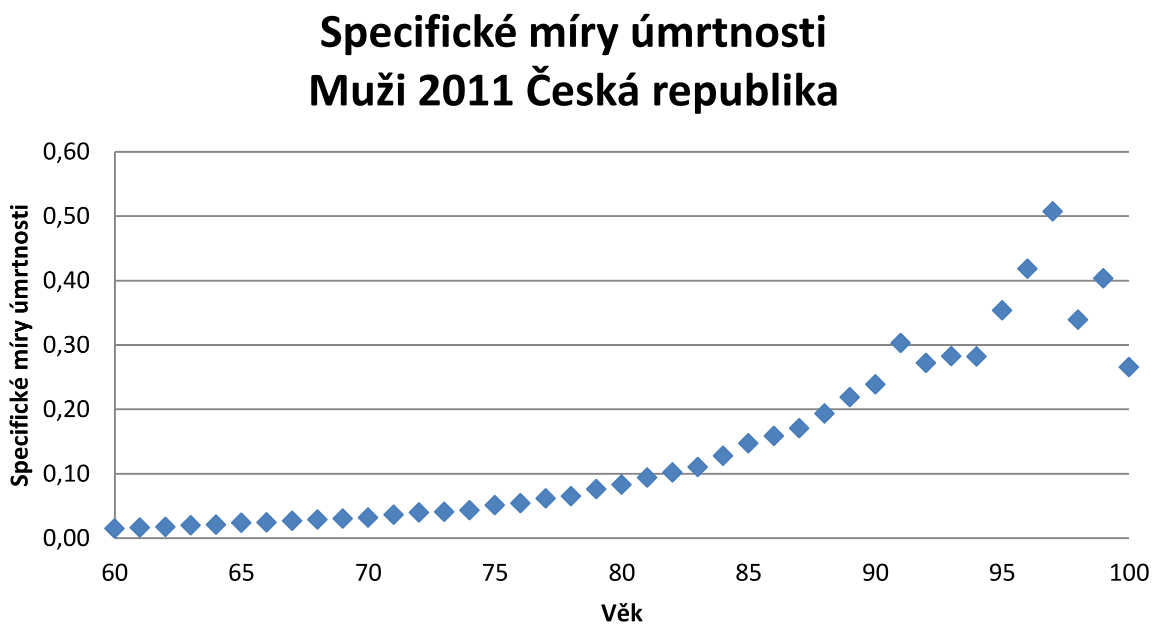
Stevensův test seskupení znamének	
n_1	19
n_2	12
g	8
M^+	7,967742
V^+	1,744957
Testovací kritérium (TK)	0,024420
Kritická hranice (KH)	-1,644854
TK > KH	**nezamítáme Ho**

Zdroj: Vlastní zpracování

6. Teorie modelu úmrtnosti pro vyšší věkové kategorie

Tato kapitola obsahuje vysvětlení Gompertz-Makehamovy funkce, protože vysoké věky se jí tradičně vyrovnávají. Velice dobře vyhlazuje specifické míry úmrtnosti, přičemž její výsledky patří mezi nejpřesnější. Tuto metodu si představíme, odhadneme její parametry a ukážeme si její princip na názorné ukázce.

„Z grafu specifických měr úmrtnosti pro věk 60 a více let je patrné, že hodnoty specifických měr úmrtnosti pro nejvyšší věk (nad 90let, někdy již nad 85 let) jsou pochybné.“ [9, str. 35] Což si můžeme ověřit na následujícím obrázku 12.



Obrázek 12.: Specifické míry úmrtnosti od 60 do 100 let – Muži 2011 Česká republika

Zdroj: Vlastní zpracování dle [25]

Empirické i vyrovnané hodnoty pro vysoké věky se výrazně odchylují od trendu předchozích hodnot, výsledné hodnoty v grafu mají tendenci exponenciálního růstu. Příčinou odchylek může být zatížení specifických měr úmrtnosti velkou náhodnou chybou, protože v tomto věku jsou počty žijících poměrně malé, někdy i systematickou chybou.

Počty žijících mohou být relativně nepřesné a také je výrazně porušen předpoklad o rovnoměrném rozložení úmrtí během jednoletých intervalů ve vysokém věku. Proto pro nejvyšší hodnoty věku nelze použít vyrovnání klouzavými průměry. Používanou metodou eliminace náhodných chyb je vyrovnání analytickou funkcí.

Závislost míry úmrtnosti na věku je natolik složitá, že nemůžeme vyjádřit vyrovnání v celkovém věkovém rozmezí žádnou jednoduchou funkcí. Omezíme-li se pouze na vyšší věk, můžeme vyrovnání úmrtnostních měr provést tzv. Gompertz-Makehamovou funkcí. [10], [11]

6.1. Gompertz-Makehamova funkce

V roce 1825 vyslovil Benjamin Gompertz myšlenku, že schopnost jedince odolávat destrukci ubývá s věkem přímo úměrně velikosti této schopnosti. Chápeme-li „odolnost vůči destrukci" jako opak úmrtnosti a měříme-li ji převrácenou hodnotou intenzity úmrtnosti, můžeme Gompertzův výrok zapsat do tvaru: [10]

$$\frac{d\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{d\,x} = -h\frac{1}{\mu(x)},\; h > 0. \tag{88}$$

Levá strana nám vyjadřuje úbytek „odolnosti vůči destrukci" za infinitezimální časový interval a na pravé straně je tento úbytek znázorněn jako poměrná část ze své hodnoty. Znaménko mínus na pravé straně znamená, že předpokládáme konstantní úměrnost úbytku. Diferenciální rovnici (88) integrujeme (*C* je konstanta): [10]

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{\frac{1}{\mu(x)}} = -\int h\,dx + C. \tag{89}$$

Primitivní funkce má tvar: [10]

$$ln\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -\,h \cdot x + C. \tag{90}$$

Z tohoto vztahu (90) vyvodíme, že konstanta musí být kladná. Kdyby byla menší nebo rovna nule, musela by být levá strana záporná. Výraz $\frac{1}{\mu(x)}$ by byl menší než jedna a tedy $\mu(x) > 1$ a to pro všechna *x*. Taková intenzita úmrtnosti je však nesmyslná, znamenalo by to, že by každý rok umíralo tolik jedinců, kolik odpovídá střednímu stavu. Proto je $C > 0$.

Po úpravě primitivní funkce (90) dostaneme: [10]

$$\mu(x) = e^{-C} \cdot e^{hx} \tag{91}$$

Pro zjednodušení označíme e^{-C} parametrem b, který je větší než 0, ale zároveň menší než 1. A výraz e^{h} označíme parametrem c, protože h je kladné, c bude větší než 1. Přepíšeme do tvaru: [10]

$$\mu(x) = bc^{x}, \quad c > 1 \qquad (92)$$
$$0 < b < 1.$$

Při aplikaci tohoto modelu dosáhl Gompertz mnohem lepších výsledků, než některé modely do té doby. Nicméně z dnešního hlediska nemůžeme říci, že se jedná o dobré vyrovnání. Proto v roce 1867 William Matthew Makeham přišel s myšlenkou rozdělit příčiny smrti na související s věkem a na ty, které s věkem nesouvisejí (např. náhodná úmrtí – nehody). Zavedl nový parametr a, jež s příčinou smrti s věkem nesouvisí: [1], [10]

$$\mu(x) = a + bc^{x}, \quad c > 1 \qquad (93)$$
$$0 < b < 1.$$

Parametr a by měl být logicky kladný, ale odhady z empirických dat vycházející zhruba od poloviny 60. let minulého století pro české muže záporně. Možná by se to dalo vysvětlit pokrokem v medicíně, jež dokáže zachránit život lidem, kteří by dříve za stejných okolností zemřeli. Je to tedy opak náhodných úmrtí. [1], [10]

Jestliže budeme model (93) aplikovat pro úmrtnost v celém věkovém rozpětí nedosáhneme příliš dobrého vyrovnání. Ale pokud použijeme vyrovnávání úmrtnosti jen pro vyšší věky, kdy se zřejmě prosazuje „přírodní" charakter úmrtnosti (zatímco ve středním věku má úmrtnost více „sociální" charakter). Vyrovnání úmrtnosti pro vyšší věky můžeme touto funkcí (93) popsat téměř dokonale. [10]

Na obrázku 11. vidíme, že zhruba u 60. roku života začíná úmrtnost stoupat rychleji. Proto považujeme za vyšší věky nad 60 let. Ze začátku této kapitoly jsme si uvedli, že specifické míry úmrtnosti lze víceméně spolehlivě určit - asi do 85 let. [10]

Pro intenzitu míry úmrtnosti ze vztahu (93) můžeme využít předpoklad $m_x \doteq \mu\left(x + \frac{1}{2}\right)$ a ostáváme pro specifické míry úmrtnosti:

$$m_x \doteq a + bc^{x+\frac{1}{2}}, \qquad (94)$$

kde a, b a c jsou neznámé parametry. [9]

Jelikož je Gompertz-Makehamova funkce citlivá na malé změny parametrů, měli bychom odhad parametrů odhadovat co nejpřesněji. Na druhou stranu odhad úmrtnosti ve vyšších věcích už není tak důležitý, proto se někdy spokojíme s méně kvalitním odhadem. [10]

Gompertz-Makehamova funkce není lineární v parametrech, proto odhad těchto parametrů nelze transponovat na lineární funkci. Odhad parametrů provedeme obvyklým způsobem při řešení nelineární regrese. [9]

6.2. Odhad parametrů pro Gompertz-Makehamovu funkci

Gompertz-Makehamova funkce (93) má tři parametry, proto stačí k jejich určení tři hodnoty (body). Jelikož bychom mohli dostat volbou tří, ne zcela typických, bodů nevyhovující výsledek, zavedeme jakési „souhrnné“ body, aby pravděpodobnost jejich vychýlení byla menší: [10]

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} m_x = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}}\right), \\
G_2 &= \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} m_x = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}}\right), \\
G_3 &= \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} m_x = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
\qquad (95)
$$

Pro odhad parametrů si zvolíme počátek prvního intervalu x_0, v našem případě 60 let, a délku intervalu k, v našem případě 8. Dostaneme součty od 60 do 67 let, od 68 do 75 let a od 76 do 83 let a využijeme celé věkové rozpětí od 60 do 84 let, za něž můžeme určit specifické úmrtnosti. [10]

Provedeme součty na pravých stranách a vytkneme konstanty nezávislé na x z rovnic (95) dostaneme:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= k \cdot a + bc^{x_0+\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} c^i, \\
G_2 &= k \cdot a + bc^{x_0+\frac{1}{2}+k} \sum_{i=0}^{k-1} c^i,
\end{aligned}
\qquad (96)
$$

$$G_3 = k \cdot a + bc^{x_0 + \frac{1}{2} + 2k} \sum_{i=0}^{k-1} c^i.$$

Z vyjádření (96) se postupně zbavíme jednotlivých parametrů. Nejprve odečteme G_1 od G_2 a G_2 od G_3, čímž vyloučíme parametr *a*: [10]

$$\begin{aligned} G_2 - G_1 &= bc^{x_0 + \frac{1}{2}} \cdot \left(c^k - 1\right) \cdot \left(1 + c + \ldots + c^{k-1}\right) = bc^{x_0 + \frac{1}{2}} \sum c^i \cdot \left(c^k - 1\right), \\ G_3 - G_2 &= bc^{x_0 + \frac{1}{2} + k} \cdot \left(c^k - 1\right) \cdot \left(1 + c + \ldots + c^{k-1}\right) = bc^{x_0 + \frac{1}{2} + k} \sum c^i \cdot \left(c^k - 1\right). \end{aligned} \tag{97}$$

Dále tyto dvě rovnice podělíme a dostaneme rovnici pro jednu neznámou: [9], [10]

$$\frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1} = c^k, \tag{98}$$

$$c = \sqrt[k]{c^k} = \left(c^k\right)^{\frac{1}{k}} \tag{99}$$

Spočteme si pomocný parametr K_c: [9]

$$K_c = c^{x_0 + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 + c + \ldots + c^{k-1}\right) = c^{x_0 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{c^k - 1}{c - 1}. \tag{100}$$

A nakonec si spočítáme rovnice pro parametry *a* a *b*: [9]

$$b = \frac{G_2 - G_1}{K_c \cdot (c^k - 1)}, \tag{101}$$

$$a = \frac{G_1 - b \cdot K_c}{k}. \tag{102}$$

Abychom mohli vypočítat hodnoty pro Gompertz-Makehamovu funkci, použijeme vzorec (94), do kterého dosadíme hodnoty jednotlivých parametrů. Tímto dostaneme vyhlazené hodnoty pro Gompertz-Makehamovu funkci. Dále tyto hodnoty budeme optimalizovat pomocí metody nejmenších čtverců dle vzorce (103). [9]

$$\sum (m_x - m_x^{GM})^2 \tag{103}$$

Pro zjištění nejpřesnější graduace měníme velikost intervalu *k*. Díky vzorci (103) získáme jednotlivé hodnoty pro daný interval *k*. Z těchto vypočítaných hodnot vybereme minimum, které znamená nejlepší vyhlazení pomocí Gompertz-Makehamovi funkce pro daný interval *k*.

6.3. Vyrovnání pomocí Gompertz-Makehamovy funkce

Z předcházející podkapitoly 6.2. vyplývá výchozí velikost intervalu *k* (tj. 8) a počáteční hodnota x_0 (tj. 60 let). Hodnoty pro ukázku vyhlazování byly použity z Eurostatu pro muže - rok 2011, Česká republika.

V tabulce 9**.** můžeme vidět ve druhém sloupci specifické míry úmrtnosti zjištěné z Eurostatu. Ve třetím sloupci jsou vyhlazené specifické míry úmrtnosti podle vzorce (94) a hodnoty, potřebné k tomuto výpočtu, jsou v tabulce 10. V posledním sloupci jsme použili metodu nejmenších čtverců, která nám ukazuje rozdíl mezi nevyhlazenou a vyhlazenou specifickou mírou úmrtnosti na druhou. Na konec v posledním řádku můžeme vidět součet těchto hodnot pro interval $k = 8$.

Tabulka 9.: Gompertz-Makehamova funkce specifické míry úmrtnosti

Věk	m_x	m_x^{GM}	$(m_x - m_x^{GM})^2$
60	0,0149700	0,0165014	0,0000023
61	0,0162300	0,0174054	0,0000014
62	0,0172500	0,0184188	0,0000014
63	0,0200400	0,0195547	0,0000002
64	0,0210000	0,0208282	0,0000000
65	0,0235500	0,0222557	0,0000017
66	0,0244700	0,0238559	0,0000004
67	0,0269600	0,0256498	0,0000017
68	0,0287200	0,0276608	0,0000011
69	0,0304700	0,0299151	0,0000003
70	0,0316900	0,0324421	0,0000006
71	0,0363900	0,0352750	0,0000012
72	0,0396900	0,0384506	0,0000015
73	0,0409400	0,0420105	0,0000011
74	0,0431200	0,0460012	0,0000083
75	0,0512100	0,0504747	0,0000005
76	0,0541200	0,0554895	0,0000019
77	0,0617400	0,0611112	0,0000004
78	0,0649300	0,0674131	0,0000062
79	0,0761700	0,0744775	0,0000029
80	0,0829000	0,0823967	0,0000003
81	0,0937600	0,0912742	0,0000062
82	0,1021200	0,1012259	0,0000008
83	0,1100300	0,1123818	0,0000055
84	0,1280500	0,1248876	0,0000100
		$\Sigma (m_x - m_x^{GM})^2 =$	**0,0000580**

Vlastní zpracování dle [15]

V tabulce 10. jsou hodnoty pro jednotlivé „souhrnné“ body vypočítány dle součtu pro jednotlivé intervaly (např. pro $G1 = m_{60} + m_{61} + \ldots + m_{67}$), parametry jsou spočteny dle vzorců pro c (99), K_c (100), b (101) a a (102). Velikost intervalu k jsme si určili 8.

Tabulka 10.: Gompertz-Makehamova funkce parametry

k	8
G1	0,1644700
G2	0,3022300
G3	0,6457700
c	1,1210030
b	0,0000074
a	0,0090308
K_c	12379,2299731
c^k	2,4937573

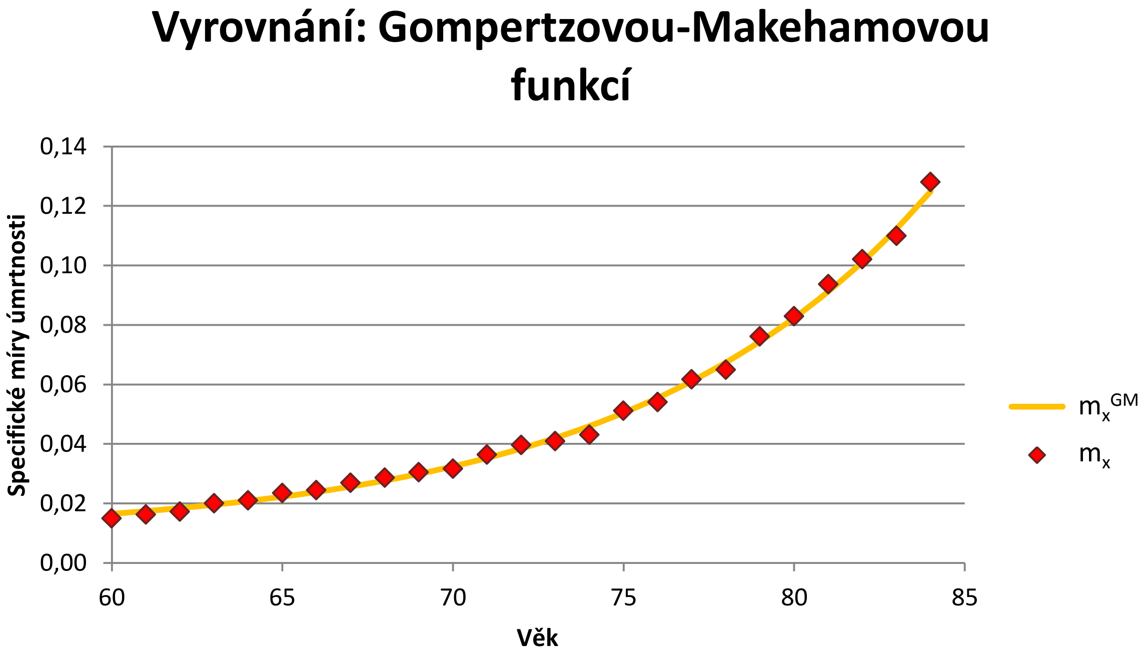
Vlastní zpracování dle [15]

Nejlepší vyhlazení zjistíme pomocí součtu metody nejmenších čtverců pro jednotlivé intervaly. V tabulce 11. vidíme hodnoty pro jednotlivé intervaly k. Nejmenší hodnota nám říká (v našem případě $k = 8$), že podle tohoto intervalu máme vyhlazovat Gompertz-Makehamovu funkci.

Tabulka 11.: Gompertz-Makehamova funkce velikost intervalů

	$\Sigma\ (m_x - m_x^{GM})^2$
k = 2	0,000428
k = 3	0,017244
k = 4	0,009234
k = 5	0,005654
k = 6	0,000924
k = 7	0,000204
k = 8	**0,000058**

Vlastní zpracování dle [15]



Obrázek 13.: Vyrovnání: Gompertzovou-Makehamovou funkcí od 60 do 84 let

Vlastní zpracování dle [15]

7. Vybrání vhodného modelu

V této kapitole vybereme vhodný model pro porovnávání úmrtnosti. Následně tento model použijeme k porovnávání České republiky a vybraných evropských zemí pomocí specifických měr úmrtnosti (v kapitole 8). Věkové rozmezí je určeno od 60 do 84 let, protože data jsou převzatá z Eurostatu, který zveřejňuje dostupné hodnoty pouze do věku 84 let.

Pro porovnávání úmrtnosti pro Českou republiku a výše zmíněné evropské země byly vhodné dva modely, z již popsaných, ze kterých byl dále vybrán ten vhodnější model pro vyhlazování.

Vybrané modely jsou:

- Graduace pomocí standardních tabulek,
- Gompertz-Makehamova funkce.

Pro porovnání těchto metod byly použity pravděpodobnosti úmrtí pro Slovenskou republiku – muži rok 2009 a 2010, a ženy rok 2009 a 2010, pro věk 60 až 84 let. K této metodě se vyžadují data z pojišťovny a Slovenská republika, jako jediná, tyto informace zveřejňuje na webových stránkách Národné Banky Slovenské. Použili jsme je k porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovy funkce. U každé metody jsme provedli porovnání pomocí metody nejmenších čtverců.

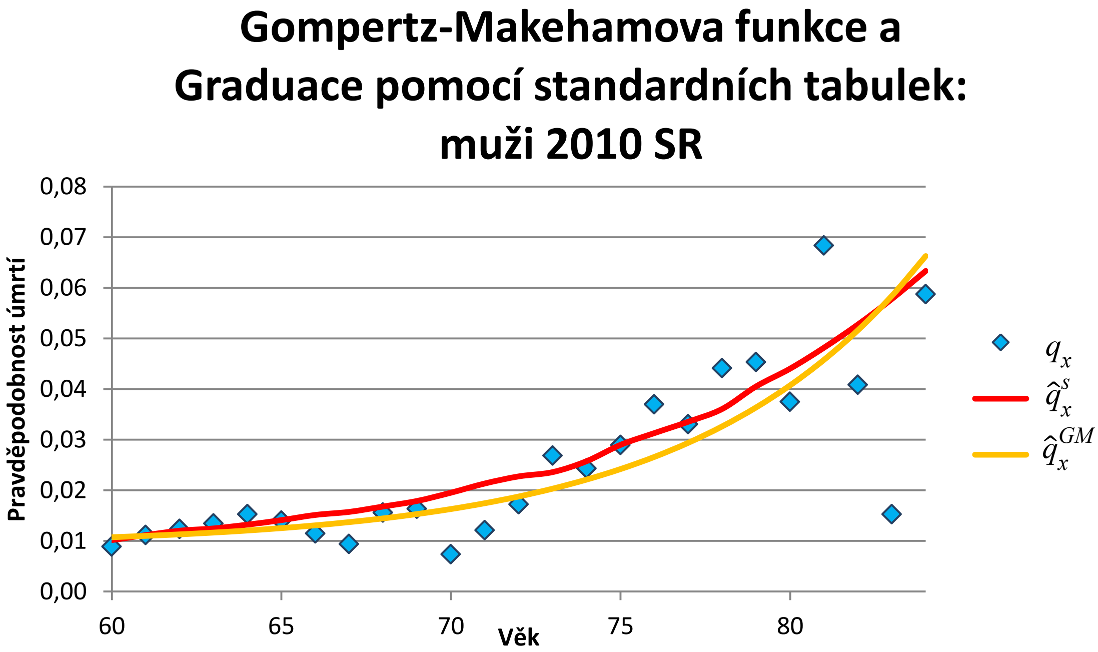
Popíšeme si následující čtyři tabulky. Ve druhém sloupci máme uvedeno q_x, které je spočteno podle vzorce (47). Vyrovnaná hodnota podle Graduace pomocí standardních tabulek je $\hat{q}_x^s$ a vyrovnaná hodnota podle Gompertz-Makehamovi funkce je $\hat{q}_x^{GM}$. Poslední dva sloupce jsou pomocné výpočty, abychom zjistili, která metoda nejlépe vyhlazuje úmrtnostní tabulky. Poslední řádek je suma těchto vyhlazených hodnot. Konkrétní mezivýpočty pro metodu Graduace pomocí standardních tabulek jsou uvedeny v příloze C.

Pro muže z roku 2010 v tabulce 12. můžeme říci, že vyhlazení pro věk 60 až 84 let je lepší pro model Graduace pomocí standardních tabulek.

Tabulka 12.: Porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovi funkce pro rok 2010 - muži Slovenská republika

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
60	0,00889	0,01016	0,01073	1,61E-06	3,37E-06
61	0,01117	0,01114	0,01099	9,30E-10	3,24E-08
62	0,01238	0,01202	0,01129	1,35E-07	1,19E-06
63	0,01342	0,01246	0,01165	9,21E-07	3,16E-06
64	0,01528	0,01321	0,01205	4,29E-06	1,04E-05
65	0,01401	0,01411	0,01253	1,04E-08	2,19E-06
66	0,01149	0,01513	0,01308	1,33E-05	2,53E-06
67	0,00938	0,01573	0,01371	4,03E-05	1,87E-05
68	0,01558	0,01679	0,01445	1,46E-06	1,28E-06
69	0,01638	0,01789	0,0153	2,28E-06	1,16E-06
70	0,00739	0,01952	0,01629	1,47E-04	7,93E-05
71	0,01212	0,02134	0,01744	8,50E-05	2,83E-05
72	0,01725	0,02274	0,01877	3,02E-05	2,32E-06
73	0,02687	0,02359	0,02032	1,07E-05	4,29E-05
74	0,02436	0,02575	0,02211	1,92E-06	5,07E-06
75	0,02893	0,02896	0,02419	1,46E-09	2,25E-05
76	0,03699	0,03129	0,02659	3,24E-05	1,08E-04
77	0,03309	0,03354	0,02938	2,03E-07	1,37E-05
78	0,04413	0,03606	0,03262	6,51E-05	1,33E-04
79	0,04531	0,04052	0,03637	2,3E-05	8E-05
80	0,03746	0,04402	0,04072	4,29E-05	1,06E-05
81	0,06837	0,04816	0,04576	4,08E-04	5,11E-04
82	0,04082	0,05273	0,05161	1,42E-04	1,17E-04
83	0,01529	0,05777	0,05839	1,81E-03	1,86E-03
84	0,05876	0,06332	0,06625	2,08E-05	5,62E-05
			Σ =	**0,0028792**	**0,0031110**

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]



Obrázek 14.: Vyhlazování dle Gompertz-Makehamovy funkce a Graduace pomocí standardních tabulek: muži 2010 SR

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

Na obrázku 14. můžeme vidět průběh jednotlivých vyhlazení a hodnoty pro pravděpodobnost úmrtí. Z obrázku je patrné, že obě dvě metody vyhlazují úmrtnost od 60 asi do 66 let a od 81 do 84 let podobně, ale mezi lety 67 až 80 se rozcházejí. Z grafu můžeme vidět, že lepší vyhlazení úmrtnosti znázorňuje červená křivka (vyhlazené hodnoty – Graduace pomocí standardních tabulek).

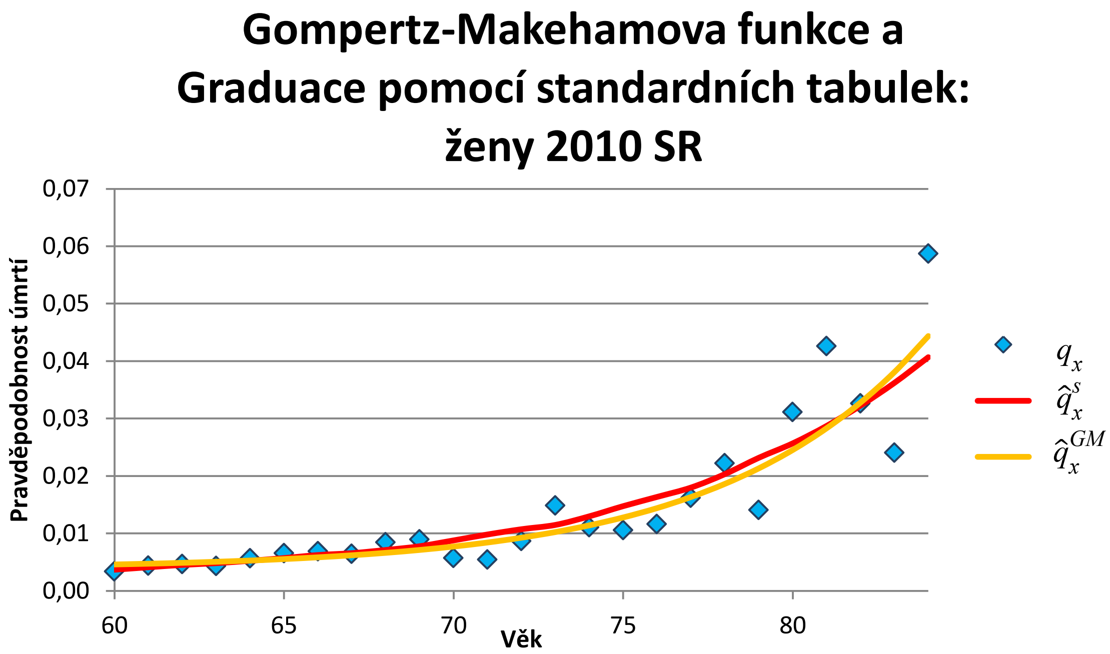
Pro ženy z roku 2010 v tabulce 13. vychází, pro věkové rozhraní 60 až 84 let, jako vhodnější Gompertz-Makehamova funkce.

Tabulka 13.: Porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovi funkce pro rok 2010 - ženy Slovenská republika

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
60	0,00334	0,00369	0,0046	1,20E-07	1,59E-06
61	0,00439	0,00412	0,00473	7,61E-08	1,18E-07
62	0,00464	0,00452	0,00489	1,26E-08	6,42E-08
63	0,0043	0,00482	0,00507	2,73E-07	5,91E-07
64	0,00565	0,00525	0,00529	1,6E-07	1,3E-07
65	0,00651	0,00572	0,00554	6,35E-07	9,40E-07
66	0,0069	0,00624	0,00585	4,28E-07	1,11E-06
67	0,00645	0,00657	0,0062	1,47E-08	6,05E-08
68	0,00845	0,00712	0,00663	1,75E-06	3,31E-06
69	0,00892	0,00778	0,00713	1,32E-06	3,21E-06
70	0,0057	0,00879	0,00772	9,55E-06	4,09E-06

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
71	0,0054	0,00982	0,00843	1,95E-05	9,14E-06
72	0,00867	0,01074	0,00926	4,26E-06	3,45E-07
73	0,01486	0,01149	0,01024	1,14E-05	2,13E-05
74	0,01106	0,01298	0,01141	3,7E-06	1,22E-07
75	0,01054	0,01475	0,01278	1,78E-05	5,05E-06
76	0,01161	0,01636	0,01442	2,25E-05	7,87E-06
77	0,0162	0,01799	0,01635	3,23E-06	2,26E-08
78	0,0222	0,02033	0,01863	3,49E-06	1,27E-05
79	0,01406	0,02317	0,02133	8,3E-05	5,29E-05
80	0,0311	0,02568	0,02453	2,93E-05	4,32E-05
81	0,04262	0,02872	0,02831	1,93E-04	2,05E-04
82	0,03263	0,03225	0,03279	1,47E-07	2,61E-08
83	0,02404	0,03622	0,03809	1,48E-04	1,98E-04
84	0,05871	0,04069	0,04436	0,000325	0,000206
			Σ =	**0,0008792**	**0,0007757**

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]



Obrázek 15.: Vyhlazování dle Gompertz-Makehamovy funkce a Graduace pomocí standardních tabulek: ženy 2010 SR

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

Na obrázku 15. vidíme průběh křivek pro obě metody vyhlazení a hodnoty pravděpodobnosti úmrtí. Výsledné křivky obou metod skoro splývají, ale mezi 71. rokem až 81. rokem života je vidět mírný rozestup a od věku 82 let jednotlivé křivky směřují jinam.

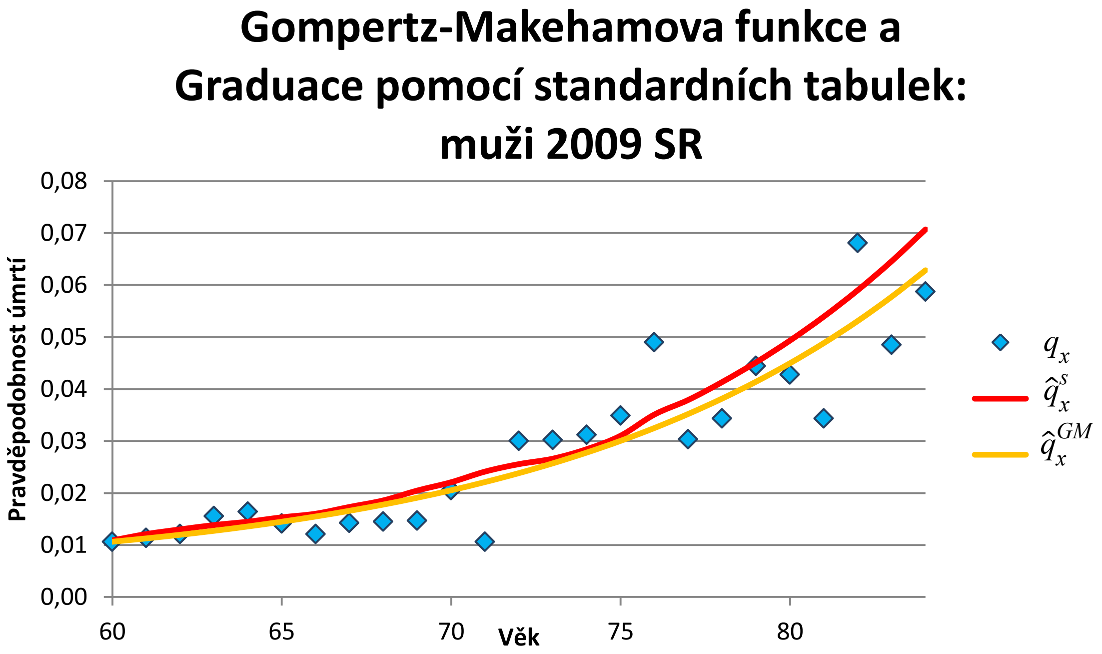
Z obrázku není zcela jasné, která metoda vyhlazuje lépe, ačkoliv se Gompertz-Makehamova funkce spíše blíží k původním hodnotám, patrné je to zejména v intervalu 71 až 81 let.

Pro muže z roku 2009 v tabulce 14. je menší součet metody nejmenších čtverců, pro věkové rozhraní 60 až 84 let, v Gompertz-Makehamově funkci.

Tabulka 14.: Porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovi funkce pro rok 2009 - muži Slovenská republika

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
60	0,01063	0,01089	0,01063	6,63E-08	2,68E-12
61	0,01137	0,0121	0,01127	5,34E-07	1,03E-08
62	0,01212	0,013	0,01196	7,78E-07	2,35E-08
63	0,0156	0,01383	0,01273	3,12E-06	8,23E-06
64	0,01641	0,01448	0,01356	3,71E-06	8,07E-06
65	0,01415	0,01532	0,01448	1,36E-06	1,07E-07
66	0,01213	0,01601	0,01548	1,51E-05	1,12E-05
67	0,01429	0,01732	0,01658	9,18E-06	5,23E-06
68	0,01452	0,01858	0,01778	1,64E-05	1,06E-05
69	0,01469	0,02047	0,01909	3,34E-05	1,94E-05
70	0,02058	0,02207	0,02053	2,24E-06	2,23E-09
71	0,01063	0,02412	0,0221	1,82E-04	1,32E-04
72	0,03005	0,02556	0,02382	2,02E-05	3,88E-05
73	0,03025	0,0266	0,02571	1,33E-05	2,06E-05
74	0,03121	0,02843	0,02777	7,72E-06	1,18E-05
75	0,03491	0,03101	0,03003	1,52E-05	2,38E-05
76	0,04903	0,0351	0,0325	1,94E-04	2,73E-04
77	0,03037	0,03791	0,03521	5,68E-05	2,34E-05
78	0,03433	0,04135	0,03817	4,92E-05	1,47E-05
79	0,04446	0,04514	0,04141	4,67E-07	9,28E-06
80	0,04278	0,04933	0,04496	4,28E-05	4,75E-06
81	0,03433	0,05393	0,04884	3,84E-04	2,11E-04
82	0,06811	0,05901	0,05309	8,29E-05	2,26E-04
83	0,04852	0,06458	0,05775	2,58E-04	8,52E-05
84	0,05876	0,0707	0,06284	0,000143	1,67E-05
			Σ =	**0,0015354**	**0,0011527**

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]



Obrázek 16.: Vyhlazování dle Gompertz-Makehamovy funkce a Graduace pomocí standardních tabulek: muži 2009 SR

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

Na obrázku 16. se nachází křivky vyhlazení dvou metod a hodnoty pravděpodobnosti úmrtí. Obě křivky asi do 75 let skoro splývají. Od 76 let má každá křivka jiný průběh. Mírnějším stoupáním se projevuje Gompertz-Makehamova funkce a jeho křivka se stále více přibližuje hodnotám pravděpodobnosti úmrtí.

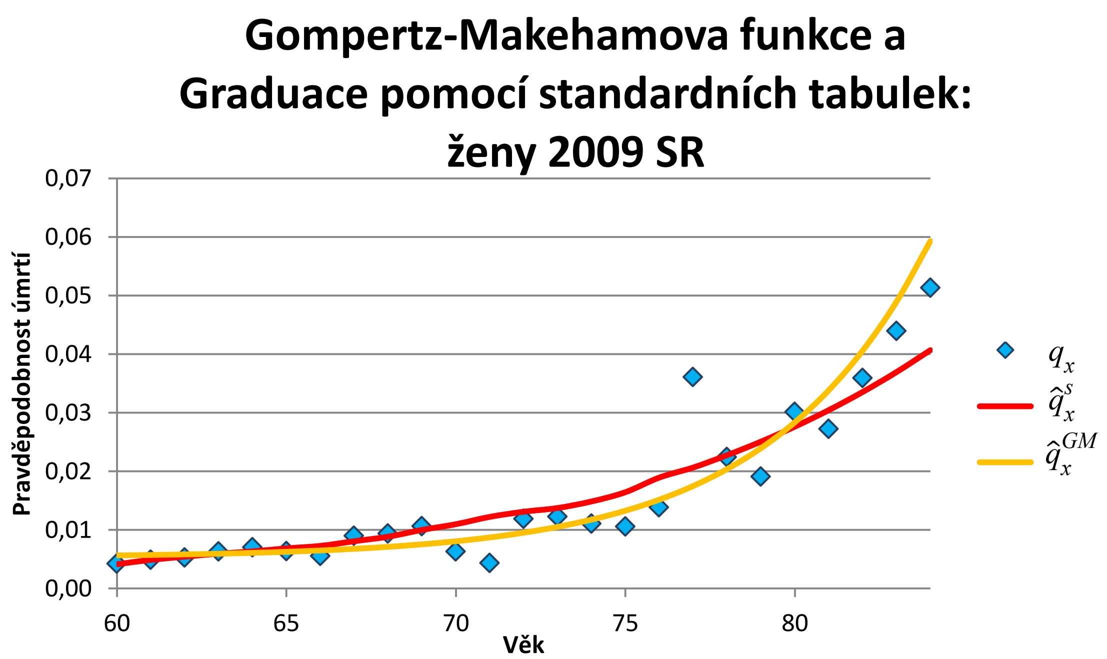
Pro ženy z roku 2009 v tabulce 15. jsme také počítali pro věkové rozhraní 60 až 84 let a opět lépe vyšla Gompertz-Makehamova funkce.

Tabulka 15.: Porovnání Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovi funkce pro rok 2009 - ženy Slovenská republika

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
60	0,00428	0,00415	0,00565	1,75E-08	1,88E-06
61	0,0049	0,00489	0,00573	8,88E-11	6,91E-07
62	0,00527	0,00544	0,00583	2,99E-08	3,13E-07
63	0,00632	0,00595	0,00594	1,43E-07	1,45E-07
64	0,00704	0,00634	0,00609	4,89E-07	9,03E-07
65	0,00641	0,00685	0,00627	1,97E-07	1,94E-08
66	0,00558	0,00728	0,0065	2,90E-06	8,47E-07
67	0,00899	0,00808	0,00677	8,33E-07	4,90E-06
68	0,00939	0,00885	0,00712	2,97E-07	5,16E-06
69	0,01063	0,01	0,00754	4E-07	9,54E-06
70	0,00634	0,01098	0,00807	2,15E-05	2,98E-06
71	0,00435	0,01223	0,00872	6,20E-05	1,91E-05

Věk	q_x	$\hat{q}_x^s$	$\hat{q}_x^{GM}$	$(q_x - \hat{q}_x^s)^2$	$(q_x - \hat{q}_x^{GM})^2$
72	0,01189	0,01311	0,00953	1,48E-06	5,59E-06
73	0,01226	0,01374	0,01052	2,19E-06	3,03E-06
74	0,01108	0,01486	0,01175	1,43E-05	4,50E-07
75	0,01058	0,01644	0,01328	3,43E-05	7,29E-06
76	0,01384	0,01893	0,01516	2,59E-05	1,74E-06
77	0,03608	0,02065	0,0175	2,38E-04	3,46E-04
78	0,02242	0,02275	0,02038	1,08E-07	4,16E-06
79	0,0191	0,02507	0,02395	3,56E-05	2,35E-05
80	0,03016	0,02762	0,02837	6,47E-06	3,24E-06
81	0,02724	0,03044	0,03383	1,02E-05	4,34E-05
82	0,03591	0,03353	0,04058	5,66E-06	2,18E-05
83	0,04395	0,03694	0,04894	4,91E-05	2,50E-05
84	0,05135	0,04067	0,05929	0,000114	6,30E-05
			Σ =	**0,0006265**	**0,0005942**

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]



Obrázek 17.: Vyhlazování dle Gompertz-Makehamovy funkce a Graduace pomocí standardních tabulek: ženy 2009 SR

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

Na obrázku 17. můžeme vidět dvě křivky, které jsou vyhlazeny pomocí Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamovy funkce, a také hodnoty pravděpodobnosti úmrtí. Vyhlazené hodnoty asi do 67 let kopírují svůj průběh, ale od tohoto věku se protínají až v 80. roku života. Jinak je jejich průběh zcela jiný a z obrázku můžeme říci, že lépe vyhlazuje Gompertz-Makehamova funkce.

Vypočítali jsme si pravděpodobnost úmrtí dvěma metodami vyhlazování. Vyhlazovali jsme pro roky 2009 a 2010 pro muže a ženy zvlášť ze Slovenské republiky.

Obecně nejčastěji používanou metodou na vyhlazování úmrtnosti ve vysokém věku je Gompertz-Makehamova funkce. I pro porovnání úmrtnosti České republiky s vybranými evropskými zeměmi byla použita výše zmíněná metoda, protože kromě případu pro muže v roce 2010 nenastala situaci, kdy lépe vyhlazovala metoda Graduace pomocí standardních tabulek.

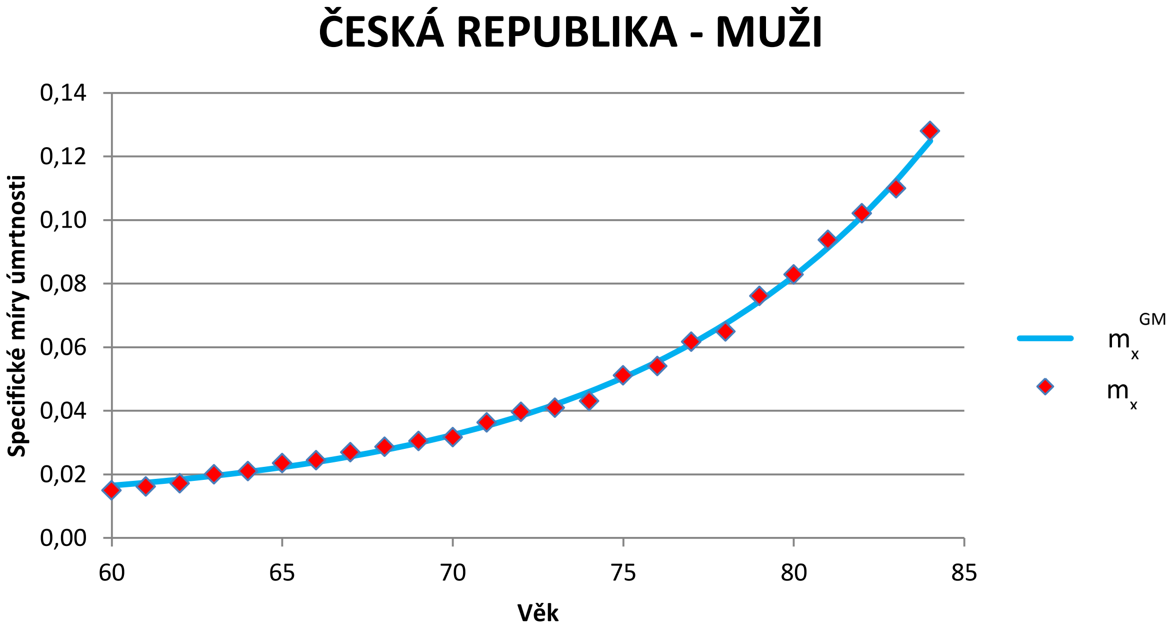
8. Porovnání úmrtnosti České republiky s vybranými evropskými zeměmi

V předchozí kapitole jsme vybrali Gompertz-Makehamovu funkci k porovnávání úmrtnosti České republiky s vybranými evropskými zeměmi.

Pro tuto práci bylo vybráno kromě České republiky dalších pět evropských zemí. A to Norské království (dále jen Norsko nebo zkratkou NOR), Rumunsko (zkratkou ROM), Spojené království Velká Británie a Severního Irska (dále jen Velká Británie nebo zkratkou GBR), Španělské království (dále jen Španělsko nebo zkratkou ESP) a nakonec jsme do výběru evropských zemí zařadili našeho souseda - Slovenskou republiku (dále jen Slovensko nebo zkratkou SVK). Úmrtnost se porovnávala pro již zmíněné země s Českou republikou zvlášť pro ženy i pro muže.

V této kapitole vyrovnáváme specifické míry úmrtnosti pomocí Gompertz-Makehamovy funkce pro věk 60 až 84 let. Tento věk byl určen ze dvou důvodů. První důvod je vysvětlen v kapitole 6, týká se velkých rozdílů specifických měr úmrtnosti pro nejvyšší věk nad 85 let, někdy nad 90 let. A druhý důvod se týká přístupnosti dat. Následující data jsou získána z Eurostatu, který čerpá z národních úmrtnostních tabulek. Na Eurostatu jsou nejnovější data z roku 2011 a dostupné hodnoty specifických měr úmrtnosti do 84 let. Použitá velikost intervalu k se rovná 8, tato hodnota se ukázala jako nejvhodnější díky výpočtům pomocí metody nejmenších čtverců. Výsledné hodnoty všech zemí pro Gompertz-Makehamovu funkci jsou v příloze D.

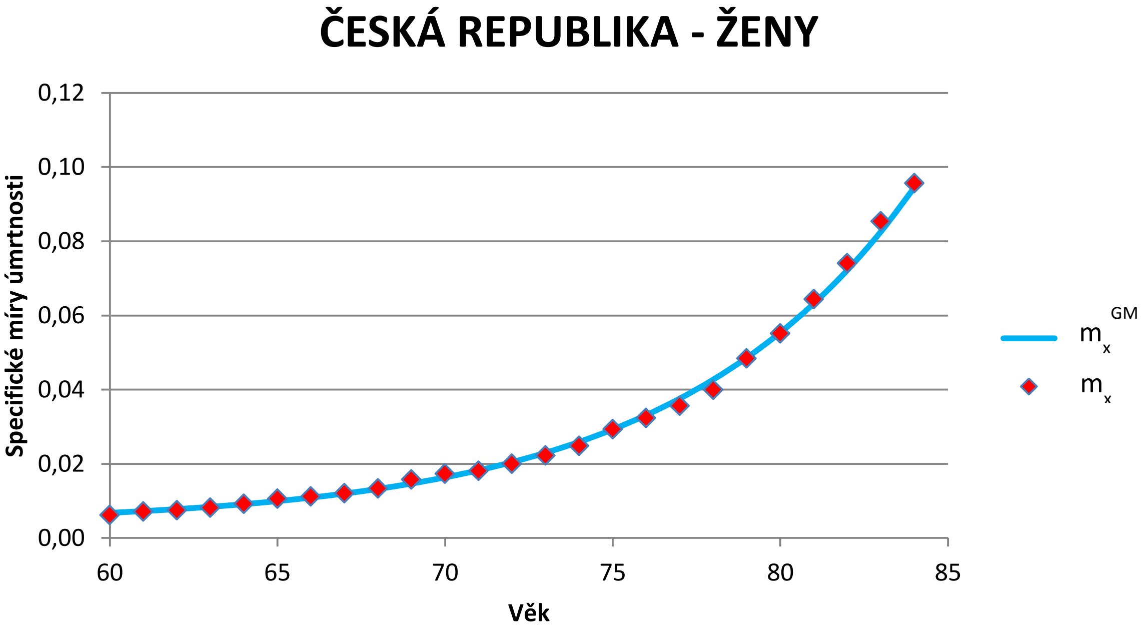
Na následujících dvou obrázkách (obrázek 19. a obrázek 20.) jsou specifické míry úmrtnosti m_x pro Českou republiku pro muže i pro ženy. Vyhlazené hodnoty jsou označeny m_x^{GM}.



Obrázek 18.: Česká republika muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

Na obrázku 19. můžeme vidět specifické míry úmrtnosti m_x pro české muže. Můžeme říci, že od věku 60 do 70 let m_x pozvolna roste. Od 72. do 74. roku života se růst m_x hodně zpomalil, ale od roku 75 let a výše nabírá velikou rychlost růstu.



Obrázek 19.: Česká republika ženy 2011

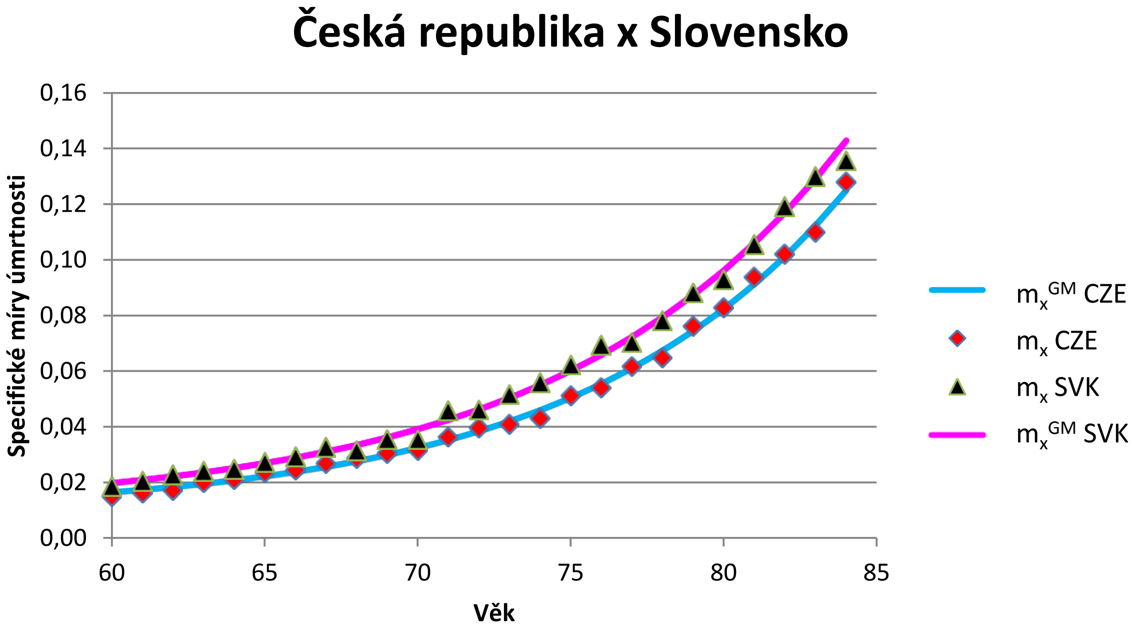
Vlastní zpracování dle [15]

Obrázek 20. nám ukazuje vývoje specifické míry úmrtnosti m_x pro české ženy. Můžeme vidět asi do věku 74 let pozvolný růst. Od 75. roku života m_x zrychluje svůj růst, ale není tak prudký jako u českých mužů.

Pokud bychom srovnali úmrtnost Čechů a Češek, můžeme si všimnout, že Češi mají ve vyšším věku větší sklon umírat. Protože pro věk 84 let Češky m_x ani zdaleka nedosahují na hodnotu 0,10, na druhou stranu Češi se velice blíží k hodnotě 0,13.

8.1. Porovnávání specifických měr úmrtnosti u mužů

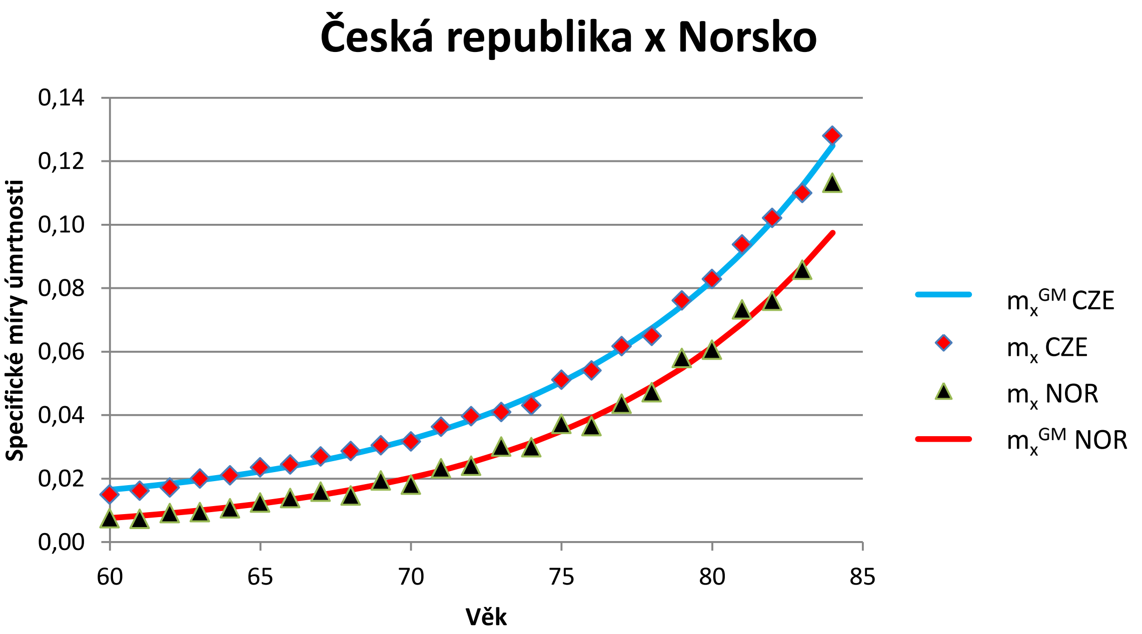
V této části porovnáváme specifické míry úmrtnosti pouze pro mužskou populaci, v již zmíněných zemích. S Českou republikou srovnáváme jednotlivé země v tomto pořadí: Slovensko, Norsko, Rumunsko, Velká Británie a Španělsko. Na konci porovnáme specifické míry úmrtnosti mužů pro všechny země najednou.



Obrázek 20.: Česká republika x Slovensko muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

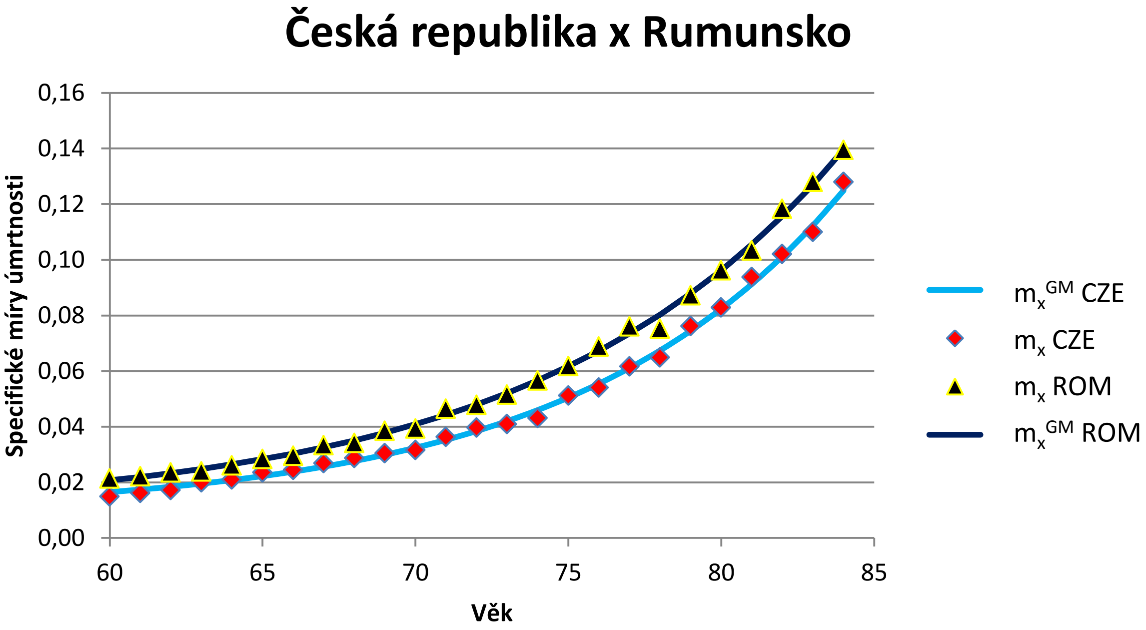
Na obrázku 21. můžeme vidět porovnání specifických měr úmrtnosti mezi Českou republikou a Slovenskem. Slováci mají vyšší m_x než Češi. Kromě vyšší pravděpodobnosti smrti mají Slováci podobný průběh m_x. Od věku 60 do 70 let můžeme říci, že mají obě země podobný výboj m_x. Ale od 71. roku života se m_x velice liší. Kromě let 72, 77, 80, ale i 84 let, se k sobě m_x velice přibližují.



Obrázek 21.: Česká republika x Norsko muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

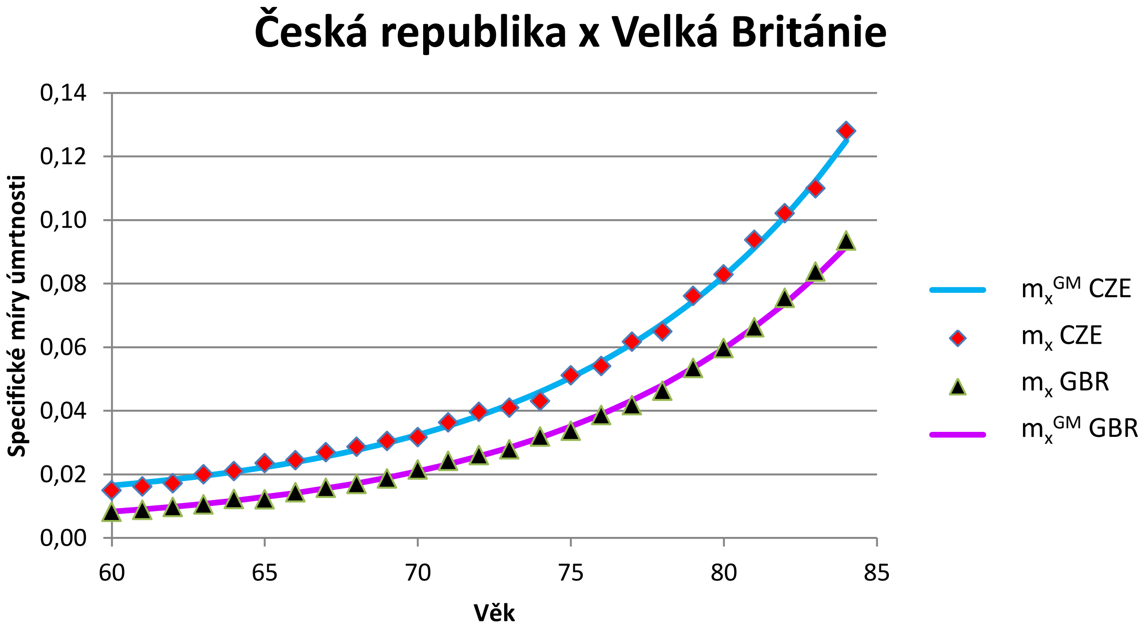
Obrázek 22. nám ukazuje průběh specifických měr úmrtnosti pro Českou republiku a Norsko. Jak je vidět Češi mají bohužel oproti Norům vyšší pravděpodobnost smrti. Sice průběh m_x je dosti podobný, ale jak můžeme vidět už od roku 60 let, mají m_x jiný počátek a liší se okolo jedné setiny m_x. Vyhlazení u Čechů sleduje specifické míry úmrtnosti, ale u Norů hodnota pro věk 84 let velice uskočila od vyhlazení. Nicméně to nic nemění na faktu, že Norové mají menší pravděpodobnost smrti i při této hodnotě.



Obrázek 22.: Česká republika x Rumunsko muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

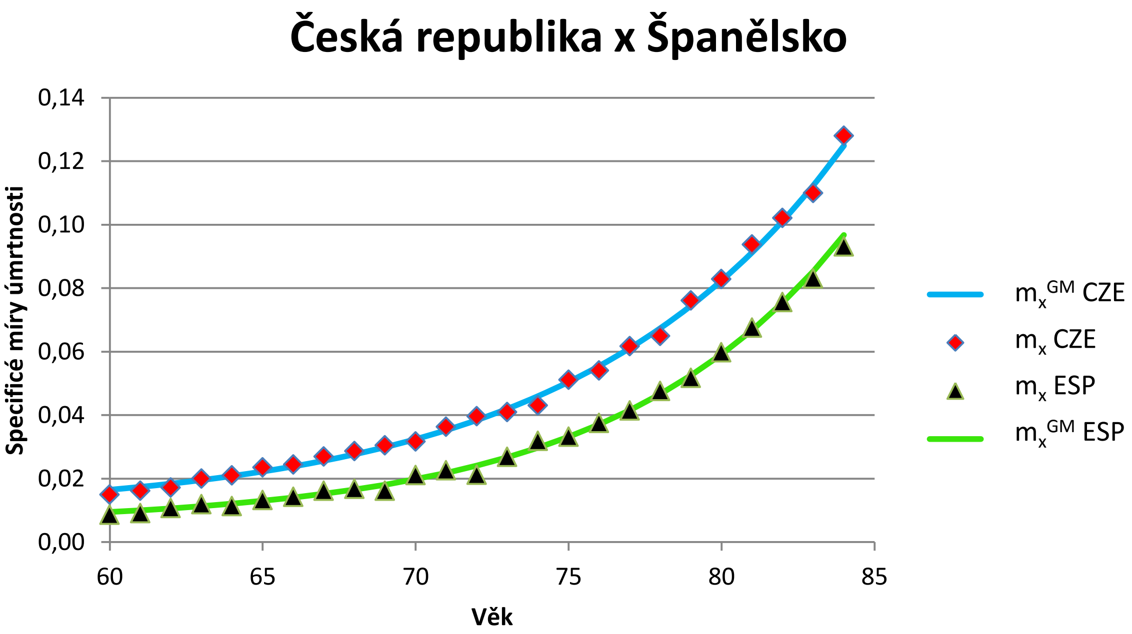
Porovnání specifických měr úmrtnosti pro Českou republiku a Rumunsko můžeme vidět na obrázku 23., kde je podobný průběh m_x jako u Slovenska. Také můžeme říci, že hodnoty od 60 do 70 let jsou dosti podobné. Od 71. roku života je průběh m_x ve skoro stejném vzdálenosti. Češi mají menší pravděpodobnost skonu než Rumuni.



Obrázek 23.: Česká republika x Velká Británie muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

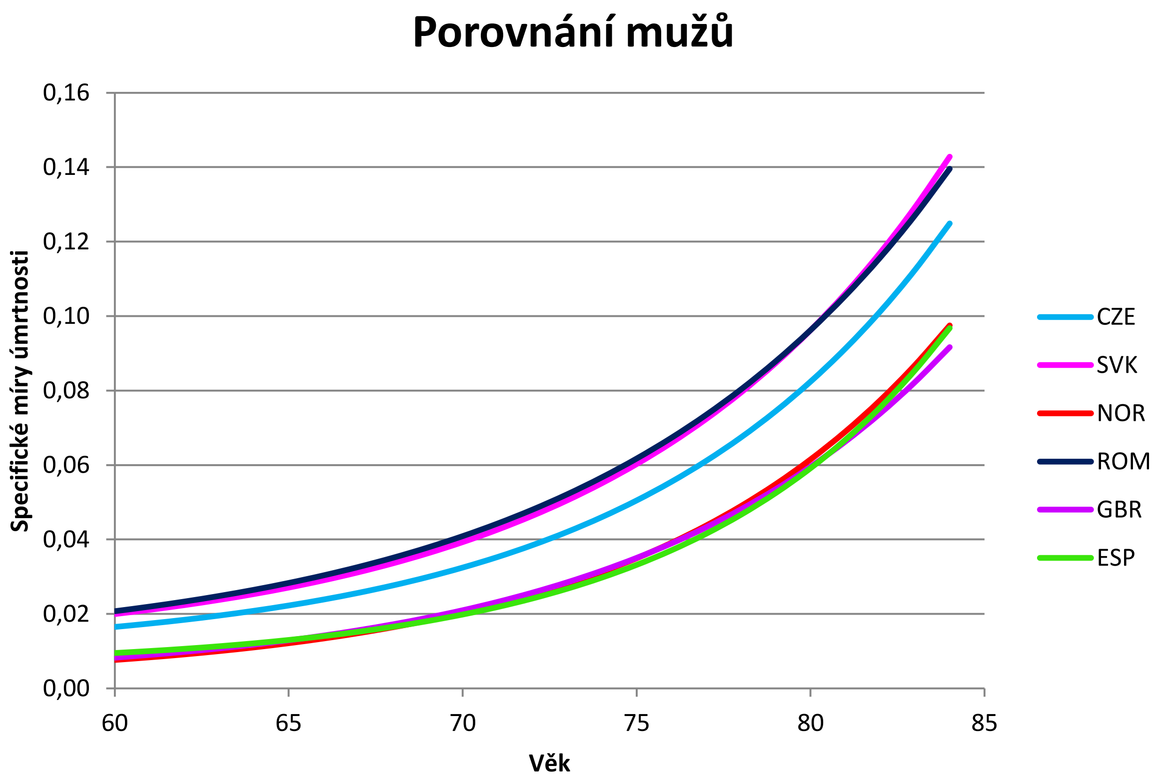
Z obrázku 24. vidíme nižší pravděpodobnost smrti u Velké Británie. Češi se ze začátku snaží udržet podobné hodnoty m_x, ale od roku 63 let se začínají velice odlišovat. Britové mají pozvolný průběh m_x asi do roku 75 let. Sice od 76. roku života se jim průběh o trochu zrychlí, ale pořád si udržují m_x nižší než Češi.



Obrázek 24.: Česká republika x Španělsko muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

Na obrázku 21. vidíme specifické míry úmrtnosti pro Českou republiku a Španělsko. Když bychom porovnali obrázek 25. s předchozím obrázkem 24., můžeme říci, že průběh m_x pro Španělsko a Velkou Británii je dosti podobný. Pro české muže ani v jednom případě průběh m_x nevypadá optimisticky. Pokud se podíváme na obrázek 25., specifické míry úmrtnosti pro Španěly mají pozvolný charakter po celé své délce. Jen asi od 76. roku života se m_x mírně zrychluje. Pokud bychom hodnotu m_x položili rovno cca 0,06, odpovídala by tato hodnota pro Čechy věku 77 let a pro Španěly 80 let. Zde je patrný rozdíl tři roky.



Obrázek 25.: Celkové porovnání specifických měr úmrtnosti muži 2011

Vlastní zpracování dle [15]

Celkové porovnání všech zemí pro mužskou populaci můžeme vidět na obrázku 26., na kterém se vyskytují průběhy specifické míry úmrtnosti. Čeští muži se udržují ve zlatém středu mezi těmito zeměmi.

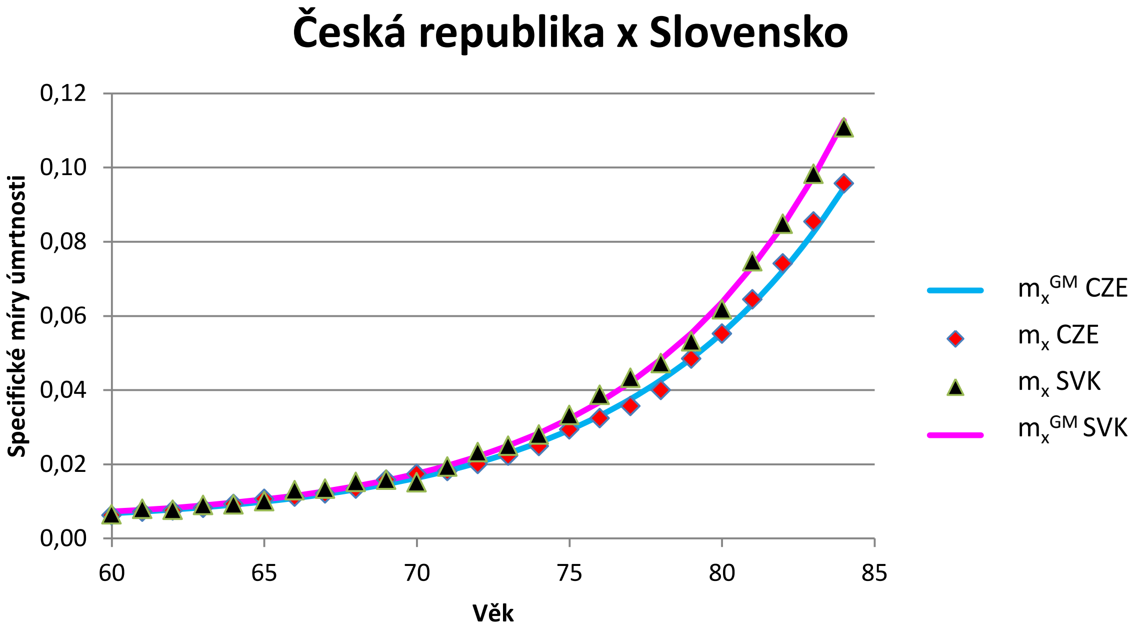
Nejnižší úmrtnost mají tři země, a to Norsko, Španělsko a Velká Británie. Od věku 60 let si udržují podobnou úmrtnost. Od 69. do 81. roku má nejnižší m_x Španělsko. A v dalších letech má nejnižší hodnotu m_x Velká Británie. Pro Velkou Británii je hodnota m_x v 84. roce rovna 0,09 a Španělsko s Norskem se blíží k hodnotě 0,1 m_x.

Nejvyšší pravděpodobnost smrti se střídá u dvou zemí a to Slovensko a Rumunsko. Slovensko hned od počátku (tj. 60 let) asi do 80 let má lepší průběh m_x než Rumunsko, které má od 80 let až do 84 let menší míru úmrtnosti.

Česká republika se se svojí výškou m_x spíše blíží Rumunsku se Slovenskem, ale stále je tu patrný rozdíl m_x pro Českou republiku, který má hodnotu asi jedné setiny.

8.2. Porovnání specifických měr úmrtnosti u žen

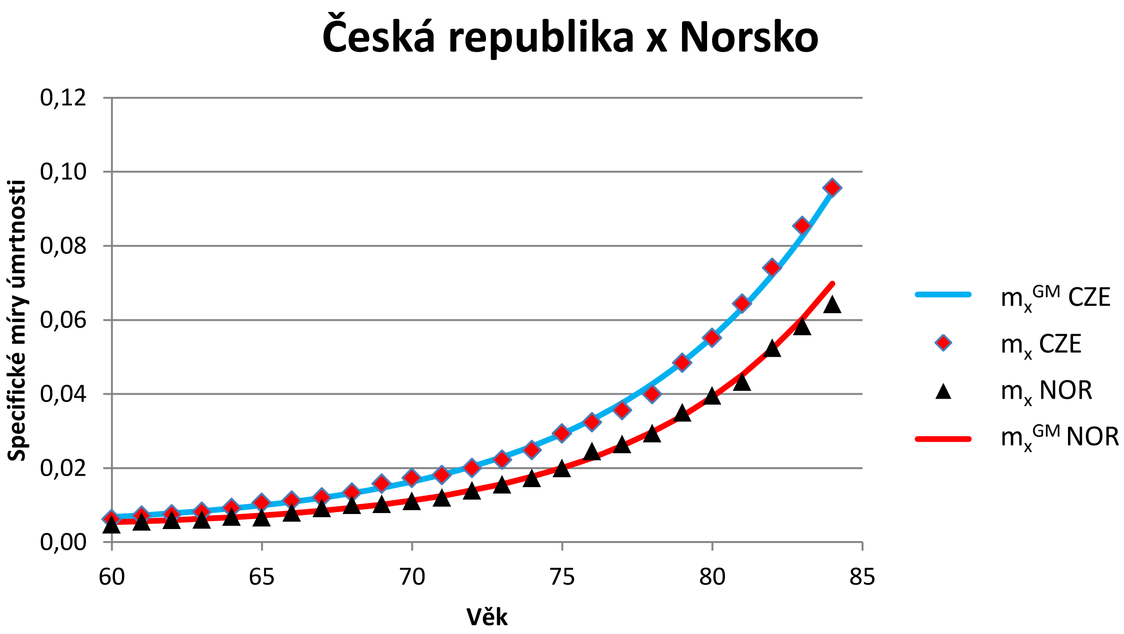
Zde porovnáváme specifické míry úmrtnosti pouze pro ženskou část populace. S Českou republikou srovnáváme všechny již jmenované země v tomto pořadí: Slovensko, Norsko, Rumunsko, Velká Británie a Španělsko. Poté bude porovnání specifických měr úmrtnosti žen pro všechny země najednou.



Obrázek 26.: Česká republika x Slovensko ženy 2011

Vlastní zpracování dle [15]

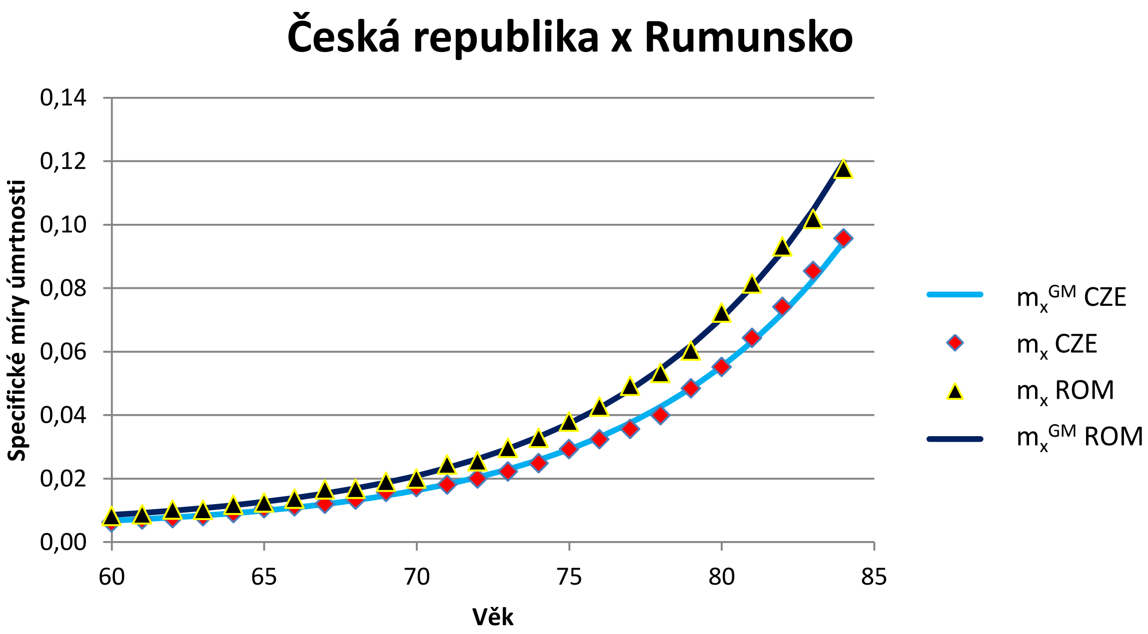
Nejprve se podíváme na specifické míry úmrtnosti pro Českou republiku a Slovensko, které jsou na obrázku 27. Můžeme si všimnout, že od 60 do75 let je průběh m_x dosti podobný (např. u 70 let mají Slovenky menší pravděpodobnost smrti než Češky). Od věku 76 let se míra úmrtnosti začínají rozcházet a pro věk 85 let je rozdíl velký okolo jedné desetiny m_x. Celkový průběh je pomalu rostoucí pro obě země. Ale u Slovenek dochází mezi 69. a 70. rokem života k mírnému poklesu m_x. Od věku asi 78 let průběh m_x se pomalu zrychluje pro obě země.



Obrázek 27.: Česká republika x Norsko ženy 2011

Vlastní zpracování dle [15]

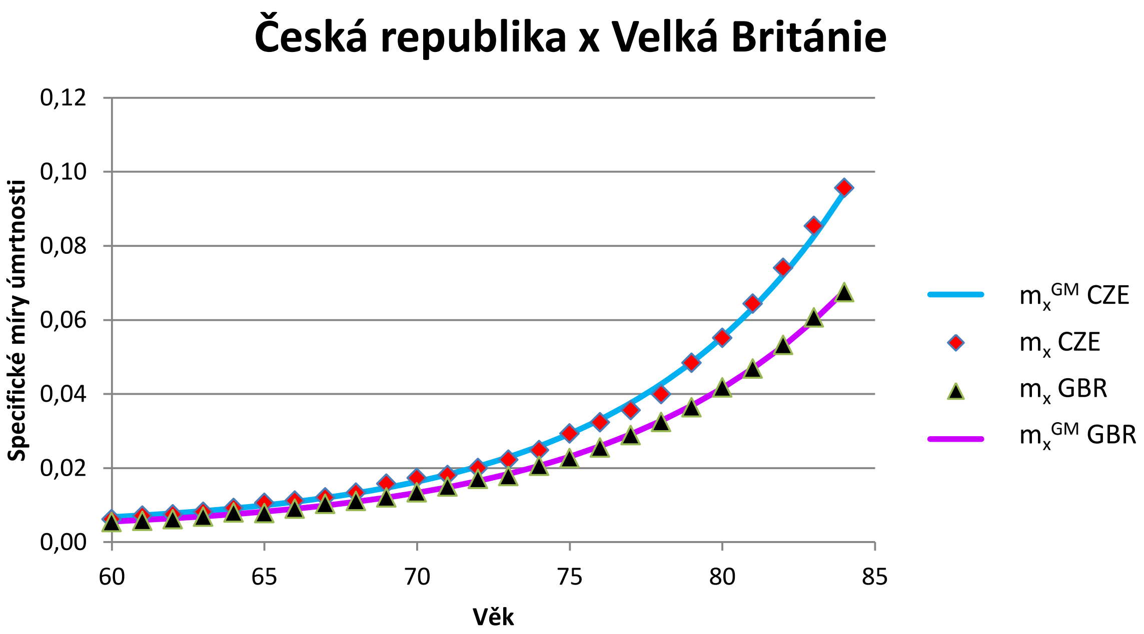
Specifické míry pro české a norské ženy jsou znázorněny na obrázku 28. Od 60 asi do 65let je m_x hodně podobná. Sice od 65 let se začínají m_x trochu lišit, ale není mezi nimi veliký rozdíl, ovšem okolo věku 70 let se začínají objevovat větší rozdíly v neprospěch českých žen. Největší rozdíly se objevují po 79. roku života, kde se od sebe m_x začínají velice odlišovat v jednotlivých letech života Češek a Norek. Největší rozdíl nastává v 84. roku a dosahuje velikosti až tří setin.



Obrázek 28.: Česká republika x Rumunsko ženy 2011

Vlastní zpracování dle [15]

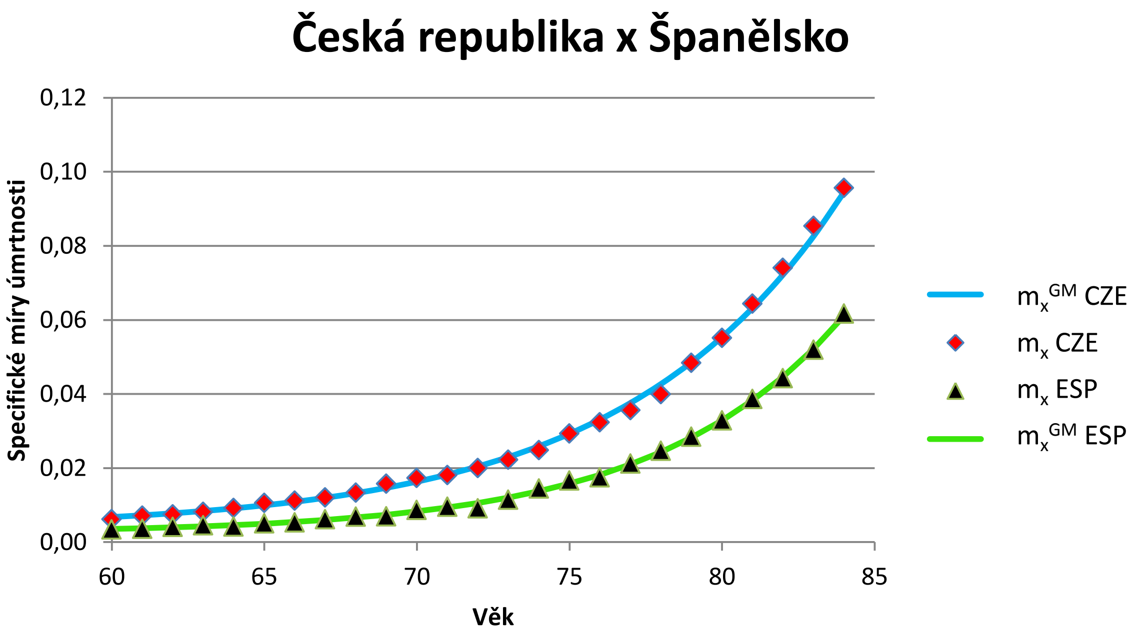
Specifické míry úmrtnosti pro české a rumunské ženy z obrázku 29. jsou dosti podobné asi do 74 let života. Od věku 75 let se začínají lišit ve prospěch Češek a tato tendence se udržuje až do věku 84 let. Právě v roce 84 let je nejvyšší rozdíl mezi m_x, Je to mírně přes jednu desetinu.



Obrázek 29.: Česká republika x Velká Británie ženy 2011

Vlastní zpracování dle [15]

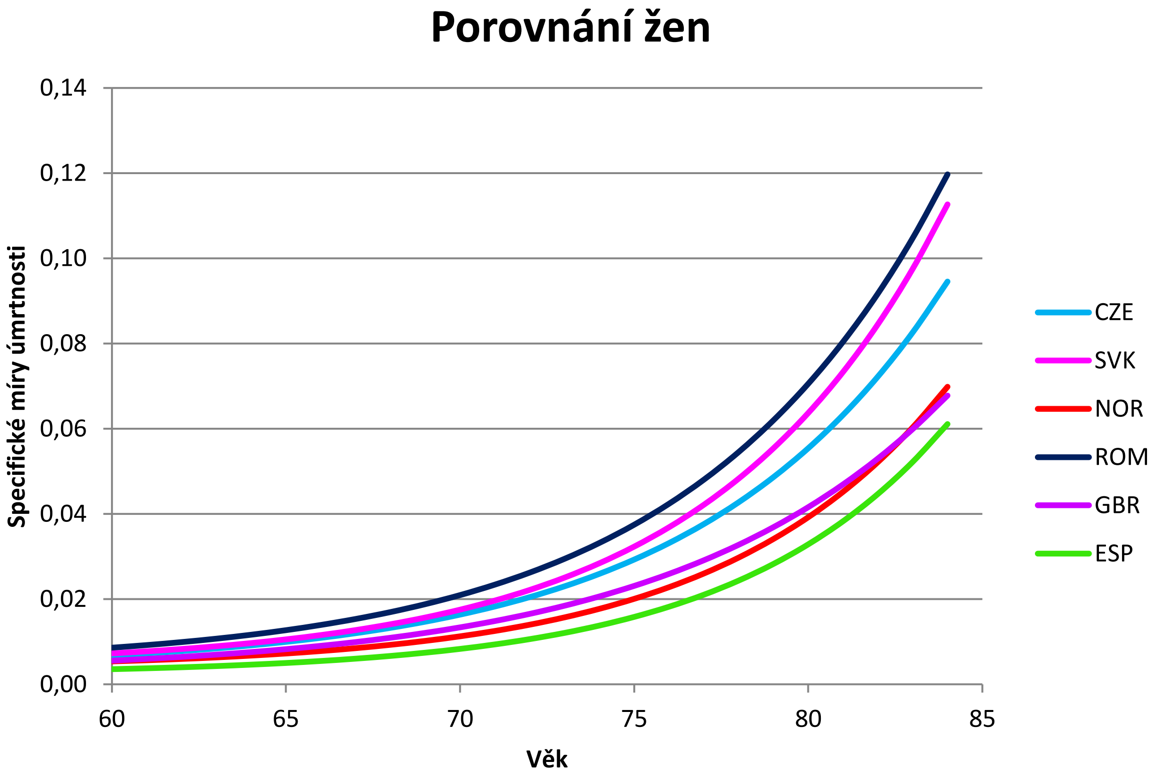
Také porovnání specifických měr úmrtnosti pro Českou republiku a Velkou Británii je v počáteční fázi dosti podobný a to do věku 75 let, což si můžeme ověřit na obrázku 30. Můžeme říci, že ve věku 76 a 77 let se m_x k sobě navzájem přibližují, ale od věku 78 let je jasný průběh m_x o hodně lepší pro Britky než pro Češky. Dokonce ve věku 84 let je tento rozdíl velký až ke třem setinám m_x. Hodnotu m_x pro ženy z Velké Británie má tendenci pozvolného růstu skoro v celé své délce, jen asi od věku 80 let života se o trochu rychleji zvětšuje hodnota m_x.



Obrázek 30.: Česká republika x Španělsko ženy 2011

Vlastní zpracování dle [15]

Zde na obrázku 31. také vidíme podobný průběh specifických měr úmrtnosti, ale pouze asi do věku 67 let. Pak bohužel pro české ženy se m_x velice výrazně liší od španělských žen. Španělky mají asi do 73 let hodně podobnou pravděpodobnost smrti jako ve věku 60 let. Od věku 74 let se mírně zvyšuje průběh m_x. Pro porovnání použijeme hodnotu m_x rovno 0,06, španělské ženy se dožívají až 84 let na rozdíl od českých žen, které nedosahují ani na věk 81 let. Což znamená, že více než tři roky je rozdíl v takto vysokém věku mezi těmito zeměmi.



Obrázek 31.: Celkové porovnání specifických měr úmrtnosti žen 2011

Vlastní zpracování dle [15]

Pokud porovnáme specifické míry úmrtnosti pro ženskou populace, která je na obrázku 32., okamžitě můžeme říci, že mají nižší pravděpodobnost smrti než muži v jejich rodných zemích.

Na Slovensku muži mají m_x ve věku 84 let přibližně rovnou 0,14 zatím, co ženy dosahují k 0,11 m_x.

Srovnáme-li ženy z obrázku 32. mezi sebou můžeme vidět menší rozestupy než u mužů z obrázku 26. Tady suverénně nejnižší specifické míry úmrtnosti mají Španělky, které si svojí suverénnost drží od 60 do 84 let. Norky a Britky začínají ve věku 60 let na hodně podobné m_x, ale poté mají Norky menší úmrtnost asi do věku 83 let. Britky ve věku 84 let mají menší pravděpodobnost smrti, ale tento rozdíl je skoro minimální.

Pokud se podíváme na průběh m_x pro země, které mají nejvyšší m_x, tj. Rumunsko a Slovensko, již od začátku (tj. 60 let) je jasně vidět z obrázku 28., že Rumunky mají mírně vyšší hodnoty m_x než Slovenky a to se již v 63 letech začíná pozvolna potvrzovat.

Nesmíme zapomenout ani na srovnání Češek na obrázku 32. Ve výsledné části dopadly obdobně, jako muži, také skončily mezi dvěma skupinami. První skupina se vyznačuje menšími mírami úmrtnosti (Španělky, Britky a Norky) a druhá skupina má charakter s nejvyššími mírami úmrtnosti (Slovenky a Rumunky).

Pokud bychom srovnávali opět ženy s muži, tak Rumunky mají nejvyšší specifickou míru úmrtnosti pro věk 84 let rovno 0,11766, což je nejbližší m_x pro Čechy, kteří mají hodnotu ve věku 84 let rovnu 0,12805.

Závěrem můžeme říci, že nejnižší specifické míry úmrtnosti, jak pro muže tak i pro ženy, mezi těmito šesti zeměmi mají ve Španělsku. Nejvyšší hodnoty specifických měr úmrtnosti mají v Rumunsku a na Slovensku. Česká republika si udržuje zlatý střed v tomto srovnání.

Závěr

K modelování úmrtnosti obyvatelstva ve vysokém věku a k jejímu porovnání ve vybraných evropských zemích byly použity úmrtnostní tabulky pro muže a ženy z roku 2011 pro Českou republiku, dále pak data a úmrtností tabulky pro ostatní evropské země, z Eurostatu.

Podobně vytvořené podklady, na základě vlastních portfolií, používají i komerční instituce k vyhodnocení míry úmrtnosti, aby mohly flexibilně reagovat na stárnutí obyvatelstva. Zejména pojišťovny si modelují úmrtnost, aby aktualizovaly podmínky pro důchodové a životní pojištění.

Schopnost posoudit a potenciálně odhadnout délku lidského života potřebují jednotlivé země k tomu, aby uměly rozvrhnout své finanční prostředky mezi obyvatele. Zvyšování počtu starších a různě zdravotně poškozených lidí, zejména v závislosti na dnešní vysoké úrovni zdravotní péče a relativně nízké porodnosti, vede k nutným finančním změnám, které mají dopad na celé hospodářství státu.

Jak bylo výše uvedeno, jako podklad pro modelování úmrtnosti slouží úmrtnostní tabulky, jejichž sestrojování je popsáno ve třetí kapitole.

Nezbytnou součástí modelování je vyhlazování. V kapitole - Graduace úmrtnostních tabulek jsou uvedeny metody neparametrikého vyrovnávání, kterými bylo zjištěno, že nejlepší hladkost graduace pomocí součtu třetích diferencí – Spenserova 21-bodová metoda, je pro věk 30 až 60 let. Dále je zde vysvětlen princip Graduace pomocí standardních tabulek, který byl následně použit ve výpočtech v závěru této práce.

Obsahem šesté kapitoly je definování termínu – vysoký věk. Ten se, dle odborných publikací, uvádí od 60 do cca 85 let. Daný interval je nutné vyhladit. Nejčastěji používanou metodou je Gompertz-Makehamova funkce, která je v práci blíže popsána, definována a byly zde uvedeny výpočty pro jednotlivé parametry.

Na vyhlazování hodnot úmrtnostních tabulek pro slovenské muže a ženy z let 2009 a 2010 byly použity dvě metody. A to Graduace pomocí standardních tabulek a Gompertz-Makehamova funkce. Po srovnání hodnot pomocí metody nejmenších čtverců bylo zjištěno, že lepší vyhlazení má druhá jmenovaná metoda, která byla následně použita.

Po tomto zjištění byly srovnávány úmrtnosti pro české muže a ženy s vybranými evropskými zeměmi, tj. Slovensko, Norsko, Rumunsko, Velká Británie a Španělsko, na základě čehož bylo zjištěno, že České republice se daří udržovat středové hodnoty specifické míry úmrtnosti v porovnání s ostatními zmíněnými zeměmi.

Lze konstatovat, že Španělsko, Velká Británie a Norsko mají nižší úmrtnost, než Česká republika, Slovensko a Rumunsko. Úmrtnost u mužů vypadá dosti podobně, ale u žen to naprosto jednoznačně nejlépe vypadalo pro Španělsko a Norsko, a Velká Británie má naproti tomu téměř stejnou míru úmrtnosti.

Slovensko a Rumunsko reprezentuje hodně podobná míra úmrtnosti, Česká republika se lehce blíží, ale určitý rozestup je patrný. Největší úmrtnost u žen je v Rumunsku, menší na Slovensku a naše země je opět lehce vzdálena.

Na závěr lze říci, že Česká republika si, co se míry úmrtnosti ve vysokém věku týče, udržuje zlatý střed.

Seznam literatury

[1] BENJAMIN, Bernard a John Hurlstone POLLARD. *The analysis of Mortality and other actuarial statistics*. London: [Published by] Cambridge University Press, 1993. ISBN 05-210-7749-4

[2] CIPRA, Tomáš. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha: Grada, 2006, 374 s. ISBN 80-247-1633-X.

[3] CIPRA, Tomáš. *Matematické metody demografie a pojištění*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990, 455 s. ISBN 80-030-0222-2.

[4] CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika: Teorie a praxe*. 1.vyd. Praha: Ekopress, 1999, 398 s. ISBN 80-861-1917-3.

[5] Country codes. *Knihovna Akademie věd ČR* [online]. © 2012 [cit. 2013-04-25]. Dostupné na: <http://www.lib.cas.cz/space.40/ZKR/STAT.HTM>.

[6] DAŇHEL, Jaroslav. *Pojistná teorie*. 2. vyd. Praha: Professional Publishing, 2006, 338 s. ISBN 80-869-4600-2.

[7] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2005, 178 s. ISBN 80-861-1992-0.

[8] EU nařídila sjednotit ceny pojistek pro obě pohlaví. Co vy na to?. *Pojišťovna České spořitelny* [online]. © 2013 [cit. 2013-04-26]. Dostupné na: <http://www.pojistovnacs.cz/zivotni-pojisteni/aktualne/eu-naridila-sjednotit-ceny-pojistek-pro-obe-pohlavi-co-vy-na-to.html>

[9] FIALA, Tomáš. *Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru*. 1. vyd. Praha: Oeconomica, 2005, 177 s. ISBN 80-245-0821-4.

[10] KOSCHIN, Felix. *Aktuárská demografie: úmrtnost a životní pojištění*. 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky, 2000, 123 s. ISBN 80-245-0022-1.

[11] KOSCHIN, Felix. *Vybrané demografické modely*. 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2002, 51 s. ISBN 80-245-0273-9.

[12] KOZÁK, Josef. *Úvod do analýzy ekonomických časových řad*. 1.vyd. Praha: VŠE, 1994, 208 s. ISBN 80-707-9760-6.

[13] KUBANOVÁ, Jana. *Matematické metody v modelu analýzy přežití* [online]. Pardubice: Univerzita Pardubice, 1999, s. 195-198 [cit. 2013-02-27]. ISSN 1211-555X. Dostupné na: <http://hdl.handle.net/10195/32211>

[14] KUBANOVÁ, Jana. *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*. 3. vyd. Bratislava: Statis, 2008, 247 s. ISBN 978-80-85659-47-4.

[15] Life table. *Eurostat* [online]. 20.3.2013 [cit. 2013-03-20]. Dostupné na: <http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/setupModifyTableLayout.do>

[16] MAJOROVÁ, Martiny. Web stránka Martiny Majorovej. *Fakulta ekonomiky a manažmentu* [online]. © 2006-2010 [cit. 2013-03-18]. Dostupné na: <www.fem.uniag.sk/Martina.Majorova/files/Prednaska6.doc>

[17] *Ministerstvo zahraničních věcí České republiky* [online]. 2013 [cit. 2013-04-19]. Dostupné na: <http://www.mzv.cz/jnp/>

[18] PACÁKOVÁ, Viera. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3. přeprac. a dopl. vyd. Bratislava: Elita, 2004, 248 s. ISBN 80-807-8004-8.

[19] Pojišťovnictví. *Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity* [online]. © 2013 [cit. 2013-03-20]. Dostupné na: <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/petraskova/fm-pojistovnictvi.pdf>

[20] SEKERKA, Bohuslav a Pavla JINDROVÁ. *Finanční a pojistná matematika*. 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005, 174 s. ISBN 80-719-4810-1.

[21] SEKERKA, Bohuslav. *Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění*. Praha: Profess Consulting, 2002, 397 s. ISBN 80-725-9031-6.

[22] SIVAŠOVÁ, Daniela. *Aktuárska demografia v prostredí konkurenčného poistného trhu*. 1. vyd. Bratislava: Ekonóm, 2008, 98 s. ISBN 978-80-225-2509-1

[23] Úmrtností tabulka. *Intranet.EuroMISE.cz* [online]. 2002 [cit. 2013-02-03]. Dostupné na: <http://ucebnice.euromise.cz/index.php?conn=0&section=epidem&node=node52>

[24] Úmrtnostné tabuľky za SR. *Štatistický úrad Slovenskej republiky* [online]. 18.09.2012 [cit. 2013-04-19]. Dostupné na: <http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=33032>

[25] Úmrtnostní tabulky: ČSÚ. *ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD* [online]. © 2013 [cit. 2013-03-27]. Dostupné na: <http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky>

[26] Vyhláška, kterou se provádějí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví. In: *434/2009*. 2009. Dostupné na: <http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vyhlasky/vyhl_434_2009.pdf>

[27] Zverejňovanie údajov podľa smernice č. 2004/113/ES. *NÁRODNÁ BANKA SLOVENSKA* [online]. 2. februára 2012 [cit. 2013-04-19]. Dostupné na: <http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom/zverejnovanie-udajov-podla-smernice-c-2004-113-es>

Seznam příloh

Příloha A: Úmrtnostní tabulky - muži Česká republika 2011

2011 **Česká republika**

Muži ***Males***								
věk ***age***	D_x	P_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	174	58500	0,003119	100000	312	99735	7469443	74,69
1	15	61514	0,000244	99688	24	99676	7369708	73,93
2	13	62386	0,000208	99664	21	99653	7270032	72,95
3	11	61618	0,000179	99643	18	99634	7170379	71,96
4	11	58196	0,000150	99625	15	99618	7070744	70,97
5	6	54359	0,000109	99610	11	99605	6971127	69,98
6	2	51677	0,000080	99599	8	99595	6871522	68,99
7	4	49476	0,000073	99591	7	99588	6771926	68,00
8	5	48244	0,000098	99584	10	99579	6672338	67,00
9	6	47502	0,000107	99574	11	99569	6572759	66,01
10	5	47047	0,000107	99564	11	99558	6473190	65,02
11	3	46398	0,000095	99553	9	99548	6373632	64,02
12	6	46115	0,000097	99544	10	99539	6274083	63,03
13	4	46444	0,000105	99534	10	99529	6174545	62,03
14	7	46649	0,000117	99523	12	99518	6075016	61,04
15	7	48166	0,000163	99512	16	99504	5975498	60,05
16	13	52418	0,000311	99496	31	99480	5875995	59,06
17	29	58772	0,000475	99465	47	99441	5776514	58,08
18	46	62886	0,000662	99417	66	99385	5677073	57,10
19	49	65122	0,000816	99352	81	99311	5577689	56,14
20	59	67302	0,000839	99271	83	99229	5478378	55,19
21	60	67430	0,000831	99187	82	99146	5379149	54,23
22	49	68803	0,000848	99105	84	99063	5280003	53,28
23	60	70269	0,000777	99021	77	98982	5180940	52,32
24	59	71188	0,000748	98944	74	98907	5081958	51,36
25	45	72757	0,000802	98870	79	98830	4983051	50,40
26	62	73981	0,000761	98791	75	98753	4884220	49,44
27	67	74435	0,000766	98715	76	98678	4785467	48,48
28	50	75392	0,000841	98640	83	98598	4686790	47,51
29	67	76508	0,000870	98557	86	98514	4588192	46,55
30	81	79462	0,000928	98471	91	98425	4489678	45,59
31	84	85972	0,000991	98380	97	98331	4391252	44,64
32	87	91395	0,000940	98282	92	98236	4292921	43,68
33	84	93409	0,000918	98190	90	98145	4194685	42,72
34	88	95384	0,000974	98100	96	98052	4096541	41,76
35	109	97232	0,001098	98004	108	97950	3998489	40,80
36	124	98655	0,001237	97896	121	97836	3900539	39,84

věk *age*	D_x	P_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
37	134	96375	0,001360	97775	133	97709	3802703	38,89
38	125	89024	0,001414	97642	138	97573	3704994	37,94
39	125	81933	0,001489	97504	145	97432	3607421	37,00
40	125	77917	0,001740	97359	169	97274	3509989	36,05
41	148	75022	0,002007	97190	195	97092	3412715	35,11
42	180	71869	0,002234	96995	217	96886	3315623	34,18
43	161	69988	0,002383	96778	231	96663	3218737	33,26
44	174	70365	0,002541	96547	245	96425	3122074	32,34
45	194	71981	0,002827	96302	272	96166	3025649	31,42
46	250	75095	0,003107	96030	298	95880	2929484	30,51
47	278	75122	0,003601	95731	345	95559	2833603	29,60
48	252	69893	0,004031	95387	385	95194	2738044	28,70
49	325	65268	0,004490	95002	427	94789	2642850	27,82
50	314	63819	0,005141	94576	486	94332	2548061	26,94
51	372	62768	0,006010	94089	566	93807	2453729	26,08
52	442	64359	0,006820	93524	638	93205	2359922	25,23
53	539	68863	0,007548	92886	701	92535	2266718	24,40
54	607	72167	0,008271	92185	762	91804	2174182	23,59
55	619	73222	0,008960	91422	819	91013	2082379	22,78
56	758	73396	0,009869	90603	894	90156	1991366	21,98
57	803	73377	0,011098	89709	996	89211	1901210	21,19
58	930	73849	0,012474	88713	1107	88160	1811998	20,43
59	1024	73772	0,013662	87607	1197	87008	1723838	19,68
60	1088	72699	0,014795	86410	1278	85771	1636830	18,94
61	1144	70478	0,016130	85132	1373	84445	1551059	18,22
62	1207	69982	0,017528	83758	1468	83024	1466614	17,51
63	1430	71362	0,019345	82290	1592	81494	1383590	16,81
64	1471	70075	0,021072	80698	1700	79848	1302096	16,14
65	1432	60782	0,022911	78998	1810	78093	1222247	15,47
66	1329	54346	0,024569	77188	1896	76240	1144154	14,82
67	1450	53763	0,026522	75292	1997	74293	1067915	14,18
68	1400	48778	0,027894	73295	2044	72272	993622	13,56
69	1329	43604	0,029905	71250	2131	70185	921349	12,93
70	1305	41191	0,032429	69119	2241	67999	851164	12,31
71	1347	36996	0,035249	66878	2357	65699	783166	11,71
72	1296	32675	0,037506	64521	2420	63311	717466	11,12
73	1231	30057	0,040798	62101	2534	60834	654156	10,53
74	1194	27710	0,043760	59567	2607	58264	593322	9,96
75	1347	26284	0,048429	56960	2759	55581	535058	9,39
76	1368	25301	0,053291	54202	2888	52758	479477	8,85
77	1496	24216	0,059087	51313	3032	49797	426719	8,32

věk ***age***	**D_x**	**P_x**	**q_x**	**l_x**	**d_x**	**L_x**	**T_x**	**e_x**
78	1523	23477	0,064875	48281	3132	46715	376922	7,81
79	1693	22212	0,072086	45149	3255	43522	330207	7,31
80	1696	20479	0,079714	41895	3340	40225	286685	6,84
81	1727	18395	0,087811	38555	3386	36862	246460	6,39
82	1643	16110	0,096681	35169	3400	33469	209598	5,96
83	1529	13877	0,107070	31769	3402	30068	176128	5,54
84	1526	11939	0,118332	28368	3357	26689	146060	5,15
85	1494	10139	0,130875	25011	3273	23374	119371	4,77
86	1346	8494	0,144746	21738	3146	20164	95996	4,42
87	1195	7003	0,160059	18591	2976	17103	75832	4,08
88	1087	5619	0,176928	15615	2763	14234	58729	3,76
89	917	4195	0,195466	12853	2512	11597	44495	3,46
90	728	3051	0,215786	10340	2231	9225	32898	3,18
91	594	1961	0,237992	8109	1930	7144	23673	2,92
92	295	1084	0,262178	6179	1620	5369	16529	2,67
93	150	531	0,288424	4559	1315	3902	11160	2,45
94	121	429	0,316784	3244	1028	2730	7258	2,24
95	110	311	0,347285	2216	770	1832	4528	2,04
96	133	318	0,379915	1447	550	1172	2696	1,86
97	110	217	0,414615	897	372	711	1524	1,70
98	59	174	0,451271	525	237	407	813	1,55
99	27	67	0,489704	288	141	218	407	1,41
100	17	64	0,529661	147	78	108	189	1,29
101	15	16	0,570812	69	39	49	81	1,17
102	5	19	0,612745	30	18	21	32	1,06
103	2	2	0,654969	11	8	8	11	0,95
104	4	17	0,696920	4	3	3	3	0,80
105	1	3	1,000000	1	1	1	1	0,50

Příloha B: Vyhlazení hrubých měr úmrtnosti - muži 2011 Česká republika

Věk	D_x	P_x	q_x	Schärtlinova metoda	Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 b)	Spenserova metoda (21 b)	Hendersonova metoda	Woolhouseova metoda	Karapova metoda
0	174	58500	0,002970					0,002073		
1	15	61514	0,000244					0,000939		
2	13	62386	0,000208					0,000010		
3	11	61618	0,000179					0,000191		
4	11	58196	0,000189	0,000053	0,000263			0,000172		
5	6	54359	0,000110	0,000110	0,000129			0,000110		
6	2	51677	0,000039	0,000080	0,000110			0,000056	0,000039	
7	4	49476	0,000081	0,000078	0,000101	0,000063		0,000070	0,000092	
8	5	48244	0,000104	0,000095	0,000098	0,000088		0,000108	0,000089	0,000082
9	6	47502	0,000126	0,000108	0,000098	0,000091		0,000122	0,000091	0,000089
10	5	47047	0,000106	0,000102	0,000101	0,000092	0,000065	0,000098	0,000096	0,000090
11	3	46398	0,000065	0,000099	0,000106	0,000089	0,000076	0,000090	0,000095	0,000091
12	6	46115	0,000130	0,000094	0,000117	0,000088	0,000091	0,000098	0,000094	0,000094
13	4	46444	0,000086	0,000104	0,000140	0,000101	0,000125	0,000115	0,000108	0,000114
14	7	46649	0,000150	0,000116	0,000191	0,000141	0,000184	0,000124	0,000152	0,000163
15	7	48166	0,000145	0,000179	0,000264	0,000222	0,000267	0,000156	0,000231	0,000245
16	13	52418	0,000248	0,000300	0,000365	0,000343	0,000372	0,000262	0,000356	0,000357
17	29	58772	0,000493	0,000485	0,000484	0,000485	0,000486	0,000498	0,000483	0,000487
18	46	62886	0,000731	0,000664	0,000598	0,000628	0,000597	0,000692	0,000615	0,000611
19	49	65122	0,000752	0,000792	0,000690	0,000744	0,000694	0,000791	0,000737	0,000716
20	59	67302	0,000876	0,000846	0,000762	0,000813	0,000764	0,000866	0,000798	0,000790
21	60	67430	0,000889	0,000845	0,000794	0,000838	0,000805	0,000846	0,000824	0,000821
22	49	68803	0,000712	0,000822	0,000798	0,000831	0,000820	0,000785	0,000834	0,000822

Věk	D_x	P_x	q_x	Schärtlinova metoda	Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 b)	Spenserova metoda (21 b)	Hendersonova metoda	Woolhouseova metoda	Karapova metoda
23	60	70269	0,000853	0,000791	0,000801	0,000805	0,000816	0,000819	0,000800	0,000809
24	59	71188	0,000828	0,000770	0,000792	0,000782	0,000805	0,000782	0,000778	0,000789
25	45	72757	0,000618	0,000764	0,000781	0,000773	0,000798	0,000707	0,000786	0,000778
26	62	73981	0,000838	0,000775	0,000797	0,000777	0,000799	0,000805	0,000774	0,000785
27	67	74435	0,000900	0,000787	0,000820	0,000799	0,000811	0,000834	0,000797	0,000809
28	50	75392	0,000663	0,000819	0,000838	0,000836	0,000831	0,000756	0,000850	0,000838
29	67	76508	0,000875	0,000873	0,000873	0,000873	0,000855	0,000846	0,000874	0,000869
30	81	79462	0,001019	0,000943	0,000908	0,000903	0,000881	0,000995	0,000896	0,000897
31	84	85972	0,000977	0,000966	0,000931	0,000925	0,000910	0,000995	0,000927	0,000919
32	87	91395	0,000951	0,000946	0,000960	0,000943	0,000944	0,000941	0,000944	0,000946
33	84	93409	0,000899	0,000926	0,001004	0,000972	0,000984	0,000899	0,000982	0,000989
34	88	95384	0,000922	0,000980	0,001059	0,001024	0,001036	0,000947	0,001041	0,001040
35	109	97232	0,001120	0,001096	0,001136	0,001098	0,001105	0,001099	0,001108	0,001108
36	124	98655	0,001256	0,001240	0,001228	0,001191	0,001194	0,001269	0,001189	0,001195
37	134	96375	0,001389	0,001341	0,001338	0,001303	0,001304	0,001364	0,001309	0,001305
38	125	89024	0,001403	0,001416	0,001474	0,001432	0,001436	0,001431	0,001442	0,001448
39	125	81933	0,001524	0,001521	0,001626	0,001583	0,001586	0,001489	0,001599	0,001603
40	125	77917	0,001603	0,001721	0,001792	0,001758	0,001750	0,001637	0,001781	0,001771
41	148	75022	0,001971	0,002005	0,001983	0,001953	0,001927	0,002027	0,001950	0,001950
42	180	71869	0,002501	0,002225	0,002198	0,002151	0,002120	0,002353	0,002156	0,002150
43	161	69988	0,002298	0,002391	0,002417	0,002360	0,002332	0,002403	0,002366	0,002371
44	174	70365	0,002470	0,002540	0,002652	0,002585	0,002572	0,002420	0,002617	0,002600
45	194	71981	0,002692	0,002801	0,002950	0,002844	0,002852	0,002768	0,002883	0,002881
46	250	75095	0,003324	0,003175	0,003292	0,003155	0,003188	0,003289	0,003166	0,003196

Věk	D_x	P_x	q_x	Schärtlinova metoda	Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 b)	Spenserova metoda (21 b)	Hendersonova metoda	Woolhouseova metoda	Karapova metoda
47	278	75122	0,003694	0,003546	0,003684	0,003543	0,003591	0,003537	0,003581	0,003581
48	252	69893	0,003599	0,004031	0,004154	0,004022	0,004069	0,003954	0,004048	0,004064
49	325	65268	0,004967	0,004499	0,004740	0,004586	0,004618	0,004572	0,004630	0,004640
50	314	63819	0,004908	0,005199	0,005362	0,005241	0,005233	0,005174	0,005265	0,005286
51	372	62768	0,005909	0,005949	0,006036	0,005954	0,005904	0,005821	0,006000	0,005960
52	442	64359	0,006844	0,006812	0,006782	0,006691	0,006628	0,006879	0,006701	0,006691
53	539	68863	0,007797	0,007583	0,007562	0,007444	0,007403	0,007779	0,007442	0,007457
54	607	72167	0,008376	0,008219	0,008364	0,008233	0,008237	0,008191	0,008280	0,008264
55	619	73222	0,008418	0,008986	0,009246	0,009094	0,009133	0,008817	0,009138	0,009159
56	758	73396	0,010274	0,009888	0,010244	0,010051	0,010100	0,009883	0,010119	0,010128
57	803	73377	0,010884	0,011140	0,011302	0,011131	0,011146	0,011152	0,011156	0,011183
58	930	73849	0,012514	0,012398	0,012446	0,012296	0,012281	0,012401	0,012340	0,012311
59	1024	73772	0,013785	0,013656	0,013694	0,013530	0,013508	0,013768	0,013544	0,013554
60	1088	72699	0,014854	0,014850	0,015006	0,014829	0,014837	0,014913	0,014862	0,014876
61	1144	70478	0,016101	0,016060	0,016397	0,016213	0,016256	0,015924	0,016297	0,016282
62	1207	69982	0,017099	0,017630	0,017878	0,017708	0,017754	0,017507	0,017736	0,017779
63	1430	71362	0,019839	0,019256	0,019490	0,019325	0,019314	0,019330	0,019376	0,019373
64	1471	70075	0,020773	0,021160	0,021148	0,021030	0,020942	0,021258	0,021043	0,021040
65	1432	60782	0,023284	0,022807	0,022896	0,022750	0,022625	0,022811	0,022810	0,022758
66	1329	54346	0,024158	0,024682	0,024623	0,024488	0,024369	0,024567	0,024486	0,024482
67	1450	53763	0,026610	0,026300	0,026491	0,026265	0,026172	0,026378	0,026346	0,026305
68	1400	48778	0,028293	0,028100	0,028470	0,028121	0,028074	0,028397	0,028185	0,028231
69	1329	43604	0,030019	0,029901	0,030584	0,030146	0,030096	0,029685	0,030271	0,030287
70	1305	41191	0,031185	0,032403	0,032815	0,032373	0,032302	0,031835	0,032548	0,032458

Věk	D_x	P_x	q_x	Schärtlinova metoda	Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 b)	Spenserova metoda (21 b)	Hendersonova metoda	Woolhouseova metoda	Karapova metoda
71	1347	36996	0,035754	0,035041	0,035480	0,034822	0,034728	0,035431	0,034948	0,034963
72	1296	32675	0,038887	0,037883	0,038357	0,037544	0,037487	0,038653	0,037621	0,037722
73	1231	30057	0,040128	0,040413	0,041583	0,040646	0,040651	0,039967	0,040983	0,040909
74	1194	27710	0,042174	0,044048	0,045244	0,044203	0,044315	0,043337	0,044479	0,044498
75	1347	26284	0,049957	0,048111	0,049667	0,048334	0,048499	0,048447	0,048673	0,048740
76	1368	25301	0,052633	0,053490	0,054519	0,053204	0,053293	0,054006	0,053375	0,053569
77	1496	24216	0,059908	0,058507	0,060176	0,058789	0,058737	0,058365	0,059260	0,059142
78	1523	23477	0,062813	0,065066	0,066474	0,065033	0,064908	0,064594	0,065381	0,065412
79	1693	22212	0,073388	0,071985	0,073525	0,071927	0,071817	0,071869	0,072351	0,072291
80	1696	20479	0,079480	0,080231	0,081192	0,079564	0,079547	0,080608	0,079853	0,079905
81	1727	18395	0,089612	0,088020	0,089979	0,088019	0,088061	0,088903	0,088467	0,088582
82	1643	16110	0,096958	0,096805	0,099564	0,097490	0,097477	0,096560	0,097992	0,098164
83	1529	13877	0,104329	0,107314	0,110064	0,108099	0,107976	0,105454	0,108806	0,108601
84	1526	11939	0,119985	0,120082	0,121766	0,119466	0,119893	0,120129	0,120257	0,119967
85	1494	10139	0,137010	0,133400	0,134658	0,131966	0,133267	0,135744	0,131900	0,132699
86	1346	8494	0,146547	0,146390	0,148260	0,146148	0,148003	0,146577	0,146462	0,146866
87	1195	7003	0,156876	0,158979	0,164176	0,162360	0,163405	0,157998	0,163250	0,163618
88	1087	5619	0,175890	0,176601	0,180950	0,180178	0,179301	0,175801	0,180353	0,180882
89	917	4195	0,196352	0,197253	0,197670	0,198270	0,195458	0,193156	0,199295	0,197545
90	728	3051	0,212278	0,222517	0,213312	0,214412	0,212359	0,222778	0,213847	0,212673
91	594	1961	0,261332	0,236531	0,229369	0,228823	0,229172	0,245981	0,226981	0,227811
92	295	1084	0,238253	0,244521	0,244052	0,243273	0,246452	0,248691	0,242839	0,244293
93	150	531	0,246093	0,244869	0,261857	0,260609	0,262864	0,238796	0,262246	0,263295
94	121	429	0,245765	0,267562	0,278512	0,278951	0,279306	0,254731	0,281681	0,280592

Věk	D_x	P_x	q_x	Schärtlinova metoda	Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 b)	Spenserova metoda (21 b)	Hendersonova metoda	Woolhouseova metoda	Karapova metoda
95	110	311	0,297913	0,299117	0,296628	0,298648	0,294975	0,291985	0,297778	0,297151
96	133	318	0,341795	0,342066	0,308732	0,314002		0,356283	0,310616	0,307600
97	110	217	0,397647	0,334018	0,328282	0,325636		0,360962	0,324517	0,326836
98	59	174	0,287575	0,336880	0,334806	0,338592		0,332908	0,331560	
99	27	67	0,331678	0,304961	0,353452			0,264765	0,369776	
100	17	64	0,233273	0,374314	0,363780			0,368664		
101	15	16	0,608394	0,386639	0,378703			0,405735		
102	5	19	0,231379					0,461487		
103	2	2	0,632121					0,417283		
104	4	17	0,209662					0,351248		
105	1	3	0,283469					0,228273		

Příloha C: Graduace pomocí standardních tabulek – Slovenská republika

ROK 2010 MUŽI SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
60	0,019167	261	261	261	29215	29215,5	29215,474	559,98	559,98	1119,96	0,0101614
61	0,021465	278	539	800	24745	53960,8	83176,237	531,15	1091,13	2742,24	0,0111411
62	0,023517	287	826	1626	23031	76991,4	160167,63	541,62	1632,75	4916,61	0,0120165
63	0,024566	279	1105	2731	20645	97636,1	257803,76	507,17	2139,91	7563,68	0,0124639
64	0,026322	258	1363	4094	16752	114389	372192,34	440,95	2580,86	10585,50	0,0132125
65	0,028421	133	1496	5590	9429,4	123818	496010,29	267,99	2848,86	13702,35	0,0141079
66	0,030810	34	1530	7120	2943	126761	622771,18	90,67	2939,53	16732,55	0,0151267
67	0,032235	22	1552	8672	2333,5	129094	751865,53	75,22	3014,75	19822,52	0,0157346
68	0,034713	30	1582	10254	1910,4	131005	882870,27	66,32	3081,06	22969,90	0,0167912
69	0,037291	28	1610	11864	1695,2	132700	1015570,2	63,21	3144,28	26177,39	0,0178905
70	0,041122	8	1618	13482	1078,4	133778	1149348,5	44,35	3188,62	29410,36	0,0195246
71	0,045378	9	1627	15109	738	134516	1283864,8	33,49	3222,11	32665,97	0,0213397
72	0,048673	10	1637	16746	574,69	135091	1418955,8	27,97	3250,09	35944,02	0,0227449
73	0,050653	48	1685	18431	1762,5	136854	1555809,4	89,28	3339,36	39372,66	0,0235892
74	0,055710	49	1734	20165	1986,7	138840	1694649,7	110,68	3450,04	42933,39	0,0257461
75	0,063255	52	1786	21951	1771,6	140612	1835261,5	112,06	3562,11	46607,56	0,0289639
76	0,068717	53	1839	23790	1406,3	142018	1977279,7	96,64	3658,74	50362,94	0,0312933
77	0,073989	42	1881	25671	1248,1	143266	2120545,9	92,35	3751,09	54206,37	0,0335415
78	0,079906	50	1931	27602	1107,7	144374	2264919,9	88,51	3839,60	58134,49	0,0360649
79	0,090344	40	1971	29573	862,58	145237	2410156,5	77,93	3917,53	62129,95	0,0405168
80	0,098552	23	1994	31567	602,34	145839	2555995,4	59,36	3976,90	66166,21	0,0440171

ROK 2010 MUŽI SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
81	0,108269	33	2027	33594	466	146305	2702300,3	50,45	4027,35	70244,01	0,0481610
82	0,118990	16	2043	35637	383,94	146689	2848989,1	45,69	4073,03	74362,73	0,0527335
83	0,130805	5	2048	37685	324,6	147013	2996002,6	42,46	4115,49	78520,68	0,0577723
84	0,143805	16	**2064**	**39749**	264,22	**147278**	**3143280,2**	38,00	**4153,49**	**82712,17**	0,0633166

Hodnoty parametrů:	
a	0,426477
b	0,001987

ROK 2010 ŽENY SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
60	0,012935	83	83	83	24801	24800,6	24800,6	320,80	320,80	320,80	0,0036876
61	0,014196	96	179	262	21812	46613	71413,567	309,65	630,44	951,24	0,0041157
62	0,015397	92	271	8	19801	66414,1	137827,65	304,87	935,31	1886,55	0,0045233
63	0,016285	78	349	882	18090	84503,8	222331,44	294,59	1229,90	3116,45	0,0048249
64	0,017531	85	434	1316	15006	99510,1	321841,5	263,08	1492,98	4609,43	0,0052481
65	0,018909	58	492	1808	8876,2	108386	430227,72	167,84	1660,82	6270,25	0,0057160
66	0,020464	29	521	2329	4189,7	112576	542803,64	85,74	1746,56	8016,81	0,0062439
67	0,021430	21	542	2871	3245,1	115821	658624,62	69,54	1816,10	9832,91	0,0065717
68	0,023055	22	564	3435	2593,2	118414	777038,83	59,79	1875,89	11708,80	0,0071235
69	0,024975	19	583	4018	2119,7	120534	897572,76	52,94	1928,83	13637,63	0,0077755
70	0,027968	8	591	4609	1399,3	121933	1019506	39,14	1967,97	15605,59	0,0087917
71	0,031008	5	596	5205	922,88	122856	1142362,2	28,62	1996,58	17602,17	0,0098236
72	0,033696	6	602	5807	688,94	123545	1265907,3	23,21	2019,80	19621,97	0,0107362
73	0,035904	20	622	6429	1335,8	124881	1390788,2	47,96	2067,76	21689,73	0,0114860
74	0,040308	16	638	7067	1438,9	126320	1517108,1	58,00	2125,76	23815,49	0,0129811
75	0,045528	14	652	7719	1321,5	127641	1644749,4	60,16	2185,92	26001,41	0,0147535
76	0,050254	13	665	8384	1113,2	128754	1773503,9	55,94	2241,86	28243,27	0,0163581
77	0,055066	16	681	9065	979,93	129734	1903238,3	53,96	2295,82	30539,10	0,0179917
78	0,061950	20	701	9766	890,94	130625	2033863,6	55,19	2351,02	32890,11	0,0203290
79	0,070319	11	712	10478	776,84	131402	2165265,8	54,63	2405,64	35295,76	0,0231705
80	0,077725	19	731	11209	601,37	132004	2297269,4	46,74	2452,39	37748,14	0,0256848
81	0,086657	19	750	11959	436,27	132440	2429709,3	37,81	2490,19	40238,33	0,0287175
82	0,097054	14	764	12723	422	132862	2562571,1	40,96	2531,15	42769,48	0,0322473

ROK 2010 ŽENY SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
83	0,108756	9	773	13496	369,89	133232	2695802,8	40,23	2571,38	45340,86	0,0362206
84	0,121907	19	**792**	**14288**	314,04	**133546**	**2829348,6**	38,28	**2609,66**	**47950,52**	0,0406853

Hodnoty parametrů:	
a	0,3395169
b	-0,0007041

ROK 2009 MUŽI SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
60	0,019643	285	285	285	26674	26673,7	26673,688	523,94	523,94	523,94	0,0108853
61	0,022096	279	564	849	24402	51075,7	77749,373	539,20	1063,14	1587,07	0,0120994
62	0,023917	264	828	8	21654	72729,4	150478,82	517,88	1581,02	3168,09	0,0129999
63	0,025598	274	1102	2779	17429	90158,6	240637,42	446,15	2027,16	5195,26	0,0138317
64	0,026907	258	1360	4139	15597	105756	346393,27	419,68	2446,84	7642,10	0,0144796
65	0,028604	132	1492	5631	9260,5	115016	461409,58	264,89	2711,73	10353,83	0,0153192
66	0,030009	33	1525	7156	2703,7	117720	579129,58	81,14	2792,87	13146,69	0,0160144
67	0,032646	29	1554	8710	2014,9	119735	698864,49	65,78	2858,64	16005,34	0,0173189
68	0,035194	26	1580	10290	1777,1	121512	820376,49	62,54	2921,19	18926,53	0,0185795
69	0,039015	19	1599	11889	1284,1	122796	943172,62	50,10	2971,29	21897,81	0,0204702
70	0,042254	18	1617	13506	865,81	123662	1066834,6	36,58	3007,87	24905,68	0,0220726
71	0,046388	6	1623	15129	561,58	124224	1191058,1	26,05	3033,92	27939,61	0,0241182
72	0,049294	56	1679	16808	1835,3	126059	1317116,9	90,47	3124,39	31063,99	0,0255558
73	0,051405	63	1742	18550	2051,1	128110	1445226,7	105,43	3229,82	34293,82	0,0266003
74	0,055099	59	1801	20351	1861	129971	1575197,5	102,54	3332,36	37626,18	0,0284278
75	0,060324	53	1854	22205	1491,5	131462	1706659,9	89,98	3422,34	41048,51	0,0310132
76	0,068581	66	1920	24125	1312,9	132775	1839435,1	90,04	3512,37	44560,89	0,0350984
77	0,074258	36	1956	26081	1167,2	133942	1973377,5	86,67	3599,05	48159,93	0,0379074
78	0,081208	32	1988	28069	915,91	134858	2108235,8	74,38	3673,43	51833,36	0,0413458
79	0,088878	29	2017	30086	637,7	135496	2243731,9	56,68	3730,10	55563,47	0,0451406
80	0,097335	22	2039	32125	503,18	135999	2379731,1	48,98	3779,08	59342,55	0,0493251
81	0,106652	14	2053	34178	400,71	136400	2516131	42,74	3821,82	63164,36	0,0539347
82	0,116903	24	2077	36255	340,21	136740	2652871,1	39,77	3861,59	67025,95	0,0590069

ROK 2009 MUŽI SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
83	0,128170	14	2091	38346	281,5	137022	2789892,8	36,08	3897,67	70923,62	0,0645812
84	0,140535	16	**2107**	**40453**	264,22	**137286**	**2927178,6**	37,13	**3934,80**	**74858,43**	0,0706991

Hodnoty parametrů:	
a	0,4947678
b	0,0011668

ROK 2009 ŽENY SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
60	0,019643	98	98	98	22849	22849,5	22849,459	448,82	448,82	448,82	0,0041474
61	0,022096	101	199	297	20569	43418,6	66268,089	454,51	903,33	1352,15	0,0048888
62	0,023917	98	297	8	18562	61980,3	128248,39	443,93	1347,26	2699,40	0,0054387
63	0,025598	97	394	988	15289	77269,2	205517,63	391,36	1738,62	4438,02	0,0059466
64	0,026907	94	488	1476	13303	90571,9	296089,54	357,94	2096,56	6534,58	0,0063423
65	0,028604	56	544	2020	8706,2	99278,1	395367,6	249,03	2345,59	8880,17	0,0068550
66	0,030009	21	565	2585	3755,1	103033	498400,76	112,69	2458,28	11338,44	0,0072795
67	0,032646	24	589	3174	2658	105691	604091,96	86,77	2545,05	13883,49	0,0080761
68	0,035194	20	609	3783	2119,8	107811	711902,91	74,60	2619,65	16503,14	0,0088459
69	0,039015	17	626	4409	1590,3	109401	821304,12	62,04	2681,70	19184,84	0,0100004
70	0,042254	7	633	5042	1100,1	110501	931805,39	46,48	2728,18	21913,02	0,0109790
71	0,046388	3	636	5678	687,94	111189	1042994,6	31,91	2760,09	24673,11	0,0122281
72	0,049294	16	652	6330	1337,7	112527	1155521,5	65,94	2826,03	27499,14	0,0131060
73	0,051405	18	670	7000	1458,9	113986	1269507,3	74,99	2901,02	30400,16	0,0137438
74	0,055099	15	685	7685	1346	115332	1384839,1	74,16	2975,19	33375,35	0,0148598
75	0,060324	12	697	8382	1128,4	116460	1501299,3	68,07	3043,26	36418,60	0,0164386
76	0,068581	14	711	9093	1004,4	117465	1618763,9	68,88	3112,14	39530,75	0,0189332
77	0,074258	34	745	9838	925,15	118390	1737153,7	68,70	3180,84	42711,59	0,0206485
78	0,081208	18	763	10601	793,81	119184	1856337,3	64,46	3245,30	45956,89	0,0227482
79	0,088878	12	775	11376	622,29	119806	1976143,2	55,31	3300,61	49257,50	0,0250655
80	0,097335	14	789	12165	457,09	120263	2096406,1	44,49	3345,10	52602,61	0,0276208
81	0,106652	12	801	12966	434,47	120697	2217103,6	46,34	3391,44	55994,05	0,0304356
82	0,116903	14	815	13781	382,8	121080	2338183,8	44,75	3436,19	59430,24	0,0335330

ROK 2009 ŽENY SLOVENSKÁ REPUBLIKA											
Věk	q_x	D_x	$\sum D_x$	$\sum\sum D_x$	P_x	$\sum P_x$	$\sum\sum P_x$	$P_x \cdot q_x$	$\sum P_x \cdot q_x$	$\sum\sum P_x \cdot q_x$	$\hat{q}_x$
83	0,128170	15	830	14611	333,77	121414	2459597,8	42,78	3478,97	62909,21	0,0369370
84	0,140535	18	**848**	**15459**	341,45	**121755**	**2581353,3**	47,99	**3526,96**	**66436,16**	0,0406728

Hodnoty parametrů:	
a	0,3021314
b	-0,0017872

Příloha D: Vyhlazování Gompertz-Makehamova funkcí

ROK 2011 MUŽI CZE		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,014970	0,016501
61	0,016230	0,017405
62	0,017250	0,018419
63	0,020040	0,019555
64	0,021000	0,020828
65	0,023550	0,022256
66	0,024470	0,023856
67	0,026960	0,025650
68	0,028720	0,027661
69	0,030470	0,029915
70	0,031690	0,032442
71	0,036390	0,035275
72	0,039690	0,038451
73	0,040940	0,042011
74	0,043120	0,046001
75	0,051210	0,050475
76	0,054120	0,055490
77	0,061740	0,061111
78	0,064930	0,067413
79	0,076170	0,074477
80	0,082900	0,082397
81	0,093760	0,091274
82	0,102120	0,101226
83	0,110030	0,112382
84	0,128050	0,124888

ROK 2011 MUŽI SVK		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,018640	0,019965
61	0,020520	0,021097
62	0,022740	0,022359
63	0,024080	0,023765
64	0,024710	0,025331
65	0,027270	0,027076
66	0,029180	0,029020
67	0,032660	0,031186
68	0,031370	0,033599
69	0,035490	0,036288
70	0,035490	0,039284
71	0,045860	0,042621
72	0,046040	0,046339
73	0,051650	0,050482
74	0,055810	0,055097
75	0,062240	0,060240
76	0,069410	0,065969
77	0,070350	0,072352
78	0,078200	0,079464
79	0,088140	0,087387
80	0,092930	0,096215
81	0,105520	0,106050
82	0,119160	0,117008
83	0,129950	0,129216
84	0,135570	0,142818

k	8
$G1$	0,164470
$G2$	0,302230
$G3$	0,645770
c	1,121003
b	0,000007
a	0,009031
K_c	12379,229973
c^k	2,493757

k	8
$G1$	0,199800
$G2$	0,363950
$G3$	0,753660
c	1,114134
b	0,000014
a	0,010043
K_c	8323,929826
c^k	2,374109

ROK 2011 MUŽI NOR		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,007540	0,007634
61	0,007360	0,008335
62	0,009190	0,009123
63	0,009410	0,010010
64	0,010640	0,011008
65	0,012500	0,012132
66	0,013920	0,013397
67	0,015900	0,014821
68	0,014690	0,016425
69	0,019430	0,018229
70	0,018140	0,020260
71	0,023250	0,022547
72	0,024090	0,025121
73	0,030070	0,028018
74	0,029910	0,031279
75	0,037250	0,034950
76	0,036570	0,039083
77	0,043610	0,043734
78	0,047240	0,048971
79	0,057980	0,054865
80	0,060680	0,061499
81	0,073360	0,068967
82	0,076030	0,077374
83	0,085860	0,086837
84	0,113180	0,097489

ROK 2011 MUŽI ROM		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,021410	0,020724
61	0,022180	0,021952
62	0,023630	0,023310
63	0,023930	0,024812
64	0,026100	0,026474
65	0,028410	0,028313
66	0,029530	0,030347
67	0,033340	0,032597
68	0,034130	0,035086
69	0,038560	0,037840
70	0,039400	0,040886
71	0,046530	0,044256
72	0,047870	0,047984
73	0,051600	0,052108
74	0,056610	0,056671
75	0,061850	0,061718
76	0,068790	0,067301
77	0,076080	0,073478
78	0,075270	0,080311
79	0,087270	0,087870
80	0,096290	0,096232
81	0,103390	0,105483
82	0,118320	0,115717
83	0,128020	0,127038
84	0,139570	0,139562

k	8
$G1$	0,08646
$G2$	0,196830
$G3$	0,481330
c	1,125651
b	0,000004
a	0,002063
K_c	16173,033979
c^k	2,577693

k	8
$G1$	0,208530
$G2$	0,376550
$G3$	0,753430
c	1,106255
b	0,000026
a	0,009171
K_c	5264,876661
c^k	2,243066

ROK 2011 MUŽI GBR		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,008250	0,008253
61	0,008900	0,008988
62	0,009790	0,009809
63	0,010610	0,010727
64	0,012320	0,011752
65	0,012170	0,012897
66	0,014390	0,014177
67	0,015780	0,015607
68	0,017030	0,017204
69	0,018750	0,018988
70	0,021530	0,020981
71	0,024230	0,023209
72	0,026080	0,025697
73	0,027940	0,028477
74	0,031900	0,031582
75	0,033730	0,035052
76	0,038630	0,038929
77	0,041820	0,043259
78	0,046350	0,048098
79	0,053520	0,053504
80	0,059750	0,059543
81	0,066310	0,066290
82	0,075520	0,073828
83	0,083800	0,082250
84	0,093540	0,091658

ROK 2011 MUŽI ESP		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,008670	0,009490
61	0,009140	0,010018
62	0,010800	0,010621
63	0,011980	0,011311
64	0,011340	0,012099
65	0,013330	0,012999
66	0,014330	0,014028
67	0,016180	0,015204
68	0,016770	0,016547
69	0,016230	0,018083
70	0,021180	0,019838
71	0,022660	0,021843
72	0,021240	0,024134
73	0,026910	0,026753
74	0,031940	0,029746
75	0,033180	0,033166
76	0,037520	0,037074
77	0,041510	0,041540
78	0,047670	0,046644
79	0,051760	0,052477
80	0,059820	0,059142
81	0,067560	0,066759
82	0,075610	0,075463
83	0,083060	0,085411
84	0,093140	0,096778

k	8
$G1$	0,092210
$G2$	0,201190
$G3$	0,465700
c	1,117215
b	0,000008
a	0,001981
K_c	9948,689094
c^k	2,427143

k	8
$G1$	0,095770
$G2$	0,190110
$G3$	0,464510
c	1,142776
b	0,000001
a	0,005793
K_c	42924,880461
c^k	2,908628

ROK 2011 ŽENY CZE		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,006190	0,006784
61	0,007120	0,007252
62	0,007510	0,007790
63	0,008180	0,008410
64	0,009190	0,009124
65	0,010650	0,009946
66	0,011240	0,010892
67	0,012100	0,011981
68	0,013360	0,013235
69	0,015780	0,014678
70	0,017350	0,016339
71	0,018150	0,018252
72	0,020020	0,020454
73	0,022270	0,022989
74	0,024850	0,025907
75	0,029340	0,029267
76	0,032400	0,033134
77	0,035610	0,037587
78	0,039960	0,042712
79	0,048450	0,048613
80	0,055190	0,055406
81	0,064370	0,063226
82	0,074110	0,072229
83	0,085410	0,082593
84	0,095660	0,094524

ROK 2011 ŽENY SVK		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,006500	0,007242
61	0,007910	0,007719
62	0,007710	0,008272
63	0,008970	0,008915
64	0,009110	0,009663
65	0,010040	0,010532
66	0,012960	0,011542
67	0,013400	0,012715
68	0,015220	0,014080
69	0,015750	0,015665
70	0,015100	0,017508
71	0,019340	0,019650
72	0,023250	0,022139
73	0,024950	0,025032
74	0,027970	0,028395
75	0,033190	0,032303
76	0,038630	0,036845
77	0,043240	0,042124
78	0,047210	0,048260
79	0,053120	0,055392
80	0,061720	0,063680
81	0,074650	0,073314
82	0,084820	0,084510
83	0,098260	0,097524
84	0,110750	0,112648

k	8
$G1$	0,072180
$G2$	0,161120
$G3$	0,435500
c	1,151216
b	0,000001
a	0,003690
K_c	69103,684305
c^k	3,085001

k	8
$G1$	0,076600
$G2$	0,174770
$G3$	0,501650
c	1,162254
b	0,000000
a	0,004308
K_c	128183,520407
c^k	3,329734

ROK 2011 ŽENY NOR		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,004840	0,005364
61	0,005600	0,005629
62	0,006010	0,005938
63	0,006100	0,006300
64	0,006910	0,006722
65	0,006720	0,007216
66	0,007980	0,007793
67	0,009270	0,008467
68	0,010090	0,009255
69	0,010340	0,010175
70	0,011100	0,011251
71	0,012090	0,012508
72	0,013990	0,013977
73	0,015630	0,015693
74	0,017360	0,017699
75	0,020000	0,020043
76	0,024580	0,022782
77	0,026490	0,025983
78	0,029450	0,029724
79	0,035050	0,034095
80	0,039630	0,039204
81	0,043360	0,045173
82	0,052520	0,052148
83	0,058330	0,060300
84	0,064290	0,069826

ROK 2011 ŽENY ROM		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,008210	0,008580
61	0,008710	0,009190
62	0,010260	0,009892
63	0,010150	0,010698
64	0,011810	0,011625
65	0,012470	0,012690
66	0,013650	0,013914
67	0,016650	0,015321
68	0,016810	0,016937
69	0,019030	0,018794
70	0,020020	0,020929
71	0,024420	0,023382
72	0,025450	0,026201
73	0,029750	0,029441
74	0,032810	0,033164
75	0,038000	0,037442
76	0,042710	0,042359
77	0,049220	0,048009
78	0,053290	0,054502
79	0,060310	0,061963
80	0,072290	0,070538
81	0,081470	0,080392
82	0,093130	0,091717
83	0,101790	0,104730
84	0,117660	0,119686

k	8
$G1$	0,053430
$G2$	0,110600
$G3$	0,309410
c	1,168581
b	0,000000
a	0,003794
K_c	182206,635043
c^k	3,477523

k	8
$G1$	0,091910
$G2$	0,206290
$G3$	0,554210
c	1,149188
b	0,000001
a	0,004486
K_c	61651,269232
c^k	3,041791

ROK 2011 ŽENY GBR		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,005470	0,005541
61	0,005790	0,005951
62	0,006210	0,006418
63	0,006890	0,006948
64	0,007990	0,007550
65	0,007810	0,008236
66	0,009090	0,009015
67	0,010310	0,009901
68	0,011100	0,010908
69	0,012050	0,012053
70	0,013420	0,013356
71	0,014970	0,014836
72	0,017050	0,016520
73	0,017890	0,018434
74	0,020590	0,020610
75	0,022730	0,023084
76	0,025580	0,025897
77	0,028910	0,029096
78	0,032440	0,032733
79	0,036430	0,036868
80	0,041760	0,041570
81	0,046910	0,046916
82	0,053260	0,052994
83	0,060690	0,059905
84	0,067470	0,067763

ROK 2011 ŽENY ESP		
Věk	m_x	m_x^{GM}
60	0,003480	0,003536
61	0,003600	0,003740
62	0,004130	0,003981
63	0,004580	0,004264
64	0,004180	0,004598
65	0,005040	0,004992
66	0,005330	0,005456
67	0,006230	0,006002
68	0,006900	0,006646
69	0,006960	0,007404
70	0,008730	0,008298
71	0,009530	0,009351
72	0,009120	0,010591
73	0,011510	0,012053
74	0,014530	0,013774
75	0,016640	0,015803
76	0,017540	0,018193
77	0,021190	0,021010
78	0,024720	0,024328
79	0,028510	0,028237
80	0,032860	0,032843
81	0,038640	0,038270
82	0,044300	0,044663
83	0,051980	0,052196
84	0,061740	0,061072

k	8
$G1$	0,059560
$G2$	0,129800
$G3$	0,325980
c	1,136996
b	0,000001
a	0,002548
K_c	30922,792621
c^k	2,792995

k	8
$G1$	0,036570
$G2$	0,083920
$G3$	0,259740
c	1,178199
b	0,000000
a	0,002390
K_c	309955,029654
c^k	3,713200