

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Paretovo rozdělení v pojištění a zajištění

Bc. Michaela Flachová

Diplomová práce

2011

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Michaela FLACHOVÁ**
Osobní číslo: **E09846**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**
Název tématu: **Paretovo rozdělení v pojištění a zajištění**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky**

Zásady pro vypracování:

Definice a základní charakteristiky Paretova rozdělení.
Paretovo rozdělení výše individuálních škod.
Využití Paretova rozdělení v neproporcionálním zajištění.
Odhad parametrů Paretova rozdělení a testy dobré shody.
Modelování a simulace extrémních škod.
Využití MS Excel a Statgraphics Centurion XV.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- BOLAND, P. J.: Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. London: Chapman&Hall/CRC, 2007. ISBN 1-58488-695-1
BOOTH, P. CHADBURN, R. COOPER, D. HABERMAN, S. JAMES, D.: Modern Actuarial Theory and Practice. Chapman&Hall/CRC, 1999. ISBN 1-4020-2952-7
CIPRA, T.: Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: GRADA Publishing, 2004. ISBN 80-247-0838-8
PACÁKOVÁ, V.: Aplikovaná poistná statistika - 3. prepracované a doplnené vydanie. Bratislava: IURA EDITION, 2004. ISBN 80-8078-004-8
TSE Y.-K.: Nonlife Actuarial Models. Cambridge: University Press, 2009. ISBN 978-0-521-76465-0

Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.**
Ústav matematiky

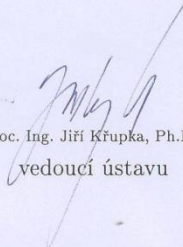
Datum zadání diplomové práce: **30. června 2010**

Termín odevzdání diplomové práce: **6. května 2011**


doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.


doc. Ing. Jiří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. srpna 2010

Prohlášení

Tuto diplomovou práci jsem vypracovala samostatně. Všechny zpracované literární prameny, informace a také zdroje nutné pro tvorbu a citace řádně uvádím v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským, hlavně však, že Univerzita Pardubice má práva na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s tím, že Univerzita Pardubice prezenčně zpřístupní moji diplomovou práci ve své Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 25. 04. 2011

Michaela Flachová

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za odborné vedení, cenné připomínky a rady, které mi pomohly při tvorbě diplomové práce.

ANOTACE

Diplomová práce je zaměřena na využití Paretova rozdělení pravděpodobnosti v pojištění a zajištění. Soustředuje se na oblast neživotního pojištění a neproporcionálního zajištění a také se zabývá simulací a modelováním extrémních škod. Přitom je kladen důraz, kromě teoretického výkladu, na dostatečně výstižné praktické ukázky jednotlivých metod s využitím programů Microsoft Excel a Statgraphic Centurion XV.

KLÍČOVÁ SLOVA

modelování individuálních výšek škod, Pareto rozdělení pravděpodobnosti, odhady parametrů, testy dobré shody, neživotní pojištění, neproporcionální zajištění, nettozajistné, extrémní škody, kvantilová funkce

TITLE

Pareto Distribution in Insurance and Reinsurance

ANNOTATION

Thesis is focused on usage of Pareto probability distribution in insurance and reinsurance. It affects non-life insurance and non-proportional reinsurance and also deals with simulation and modeling of extreme damage. It is emphasized, in addition to theoretical explanations, for sufficiently apposite practical demonstrations of various issues including the use of Microsoft Excel and Statgraphic Centurion XV.

KEYWORDS

modeling of the individual claim sizes, Pareto probability distribution, parameter estimates, goodness of fit tests, non-life insurance, non-proportional reinsurance, net reinsurance premium, extreme damages, quantile function

OBSAH

ÚVOD.....	8
1 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ VÝŠE INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD.....	10
1.1 Všeobecný postup pravděpodobnostního modelování individuální výšky škod	12
1.1.1 Grafická analýza údajů.....	12
1.1.2 Metody odhadu parametrů.....	13
1.1.2.1 Metoda momentů.....	13
1.1.2.2 Metoda maximální věrohodnosti.....	14
1.1.3 Testy dobré shody.....	14
1.1.3.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody.....	15
1.1.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test.....	16
2 PARETOVO ROZDĚLENÍ VÝŠE INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD.....	18
2.1 Americká verze Paretova rozdělení.....	18
2.2 Evropská verze Paretova rozdělení	19
3 VYUŽITÍ PARETOVA ROZDĚLENÍ V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ.....	20
3.1 Charakteristika neživotního pojištění.....	20
3.1.1 Neživotní pojištění osob.....	21
3.1.2 Pojištění majetku	22
3.1.3 Pojištění odpovědnosti za škody.....	24
3.1.4 Pojištění právní ochrany.....	26
3.1.5 Cestovní pojištění	26
3.2 Odhady parametrů Paretova rozdělení	27
3.2.1 Odhad parametrů Paretova rozdělení metodou momentů	27
3.2.2 Odhad parametrů Paretova rozdělení metodou maximální věrohodnosti	27
3.3 Testy dobré shody za předpokladu Paretova rozdělení	29
3.3.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody	29
3.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test	30
3.4 Pravděpodobnostní modelování výše škod pomocí Statgraphics Centurion XV.....	32
3.4.1 Základní charakteristiky.....	32
3.4.2 Rozdělení pravděpodobnosti	36
3.4.2.1 Testy dobré shody v Statgraphic Centurio XV.....	37
4 VYUŽITÍ PARETOVA ROZDĚLENÍ V NEPROPORCIONÁLNÍM ZAJIŠTĚNÍ	42
4.1 Charakteristika neproporcionální zajištění	43
4.2 Stanovení nettozajistného s využitím Paretova rozdělení	46
4.2.1 Grafické stanovení nettozajistného při Paretově rozdělení	47
4.3 Praktická ukázka stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění pomocí modelu založeného na Paretově rozdělení.....	49
5 MODELOVÁNÍ A SIMULACE EXTRÉMních ŠKOD.....	51
5.1 Kvantilový model rozdělení pravděpodobnosti	51
5.2 Uspořádané (pořádkové) statistiky.....	52
5.3 Simulace extrémních hodnot	53
5.4 Praktická ukázka simulace extrémních Paretova rozdělení.....	55
ZÁVĚR.....	58
6 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	60
7 SEZNAM OBRÁZKŮ.....	61
8 SEZNAM TABULEK.....	62

Úvod

Počátky komerčního pojištění sahají do období starověkého Středomoří a souvisejí především s rozvojem námořní dopravy a přepravou zboží. Historie pojišťovnictví na území dnešní České republiky je doložena od konce 17. století. Tehdy se jednalo zejména o pojištění proti požáru. Teorie pravděpodobnosti, jako vědecký základ pojištění, se objevuje v 19. století, kdy dochází k rozvoji pojištění na moderní komerční bázi.

Pojištění lze charakterizovat jako nástroj finanční kompenzace negativních následků nahodilých jevů. Ty vznikají nezávisle na naší vůli a my jen předpokládáme, že mohou nastat. Pro každého jednotlivce je jejich výskyt velmi málo pravděpodobný. Každé riziko lze měřit pomocí určité hodnoty pravděpodobnosti. Právě proto jsou pravděpodobnostní zákony výskytu náhodilých událostí základem pojišťovnictví.

Náhodilé jevy, které nastaly, se označují jako pojistné události a jejich počet a výška je velmi důležitým aspektem v hospodaření pojišťovny a její činnosti. Na základě již zjištěných dat a skutečností pojišťovna hledá pravděpodobnostní zákonitosti, které potřebuje znát na řešení zásadních otázek své činnosti, např. při tvorbě povinných rezerv či při rozhodování o zajištění. Zejména jde o zákony rozdělení pravděpodobnosti počtu pojistných plnění a výšky individuálních pojistných plnění.

Pro modelování ztrát v oblasti pojištění a financí existuje mnoho klasických rozdělení pravděpodobností. Mezi nejznámější patří např. exponenciální, gama, Weibullovo či Paretovo rozdělení. Diplomová práce se zabývá Paretovým rozdělením a jeho využitím v pojištění a zajištění.

Žádná pojišťovna by neměla podceňovat možnost vzniku velkých škod, jejichž pravděpodobnost a počet může být sice menší, ale následky mohou být obrovské. Právě Paretovo rozdělení je vhodné pro modelování vysokých škod, např. v nemocenském pojištění či v pojištění proti požáru, a to díky své vlastnosti, že jeho pravý konec rozdělení konverguje k nule pomaleji než u jiných typů rozdělení.

První část práce je věnována významu a všeobecnému postupu pravděpodobnostního modelování výše škod a dále charakteristice Paretova rozdělení v neživotním pojištění, ve smyslu jak evropské verze, tak americké verze. Jsou zde popsány metody odhadu parametrů, metoda momentů a metoda maximální věrohodnosti, a vypočítány parametry Paretova rozdělení. K hodnocení vhodnosti navrhovaného modelu se používají různé testy

shody. V práci je testována vhodnost Paretova rozdělení pomocí Kolmogorovovo-Smirnovova testu a Pearsonova χ^2 testu.

Druhá část je věnována využití Paretova rozdělení v neproporcionálním zajištění. Hlavní podstatou této části je stanovení nettozajistného pomocí modelu založeného na Paretově rozdělení včetně praktické ukázky.

Třetí část se zabývá modelováním a simulací extrémních hodnot s využitím aplikace kvantilových funkcí, které se využívají hlavně pro stanovení pravděpodobnosti vzniku extrémních škod. Součástí je praktická ukázka využití kvantilové funkce Paretova rozdělení.

Cílem práce je, kromě teoretického popisu dané problematiky, praktické využití pravděpodobnostního modelování výše škod v pojištění a zajištění. K výpočtům a grafickým výstupům jsou využity programy Microsoft Excel 2007 a STATGRAPHICS Centurion XV. Pro praktické ukázky dané problematiky jsou použity reálné údaje získané ze zdroje [1], představující 120 individuálních výšek škod v pojištění majetku.

Dílními cíli jsou:

- ✓ teoretický popis americké a evropské verze Paretova rozdělení pravděpodobnosti,
- ✓ odhad parametrů Paretova rozdělení,
- ✓ testování, zda mají data předpokládané Paretovo rozdělení pomocí testů dobré shody,
- ✓ praktické využití Paretova rozdělení při výpočtu nettozajistného v neproporcionálním zajištění,
- ✓ modelování a simulace extrémních škod pomocí kvantilové funkce Paretova rozdělení.

1 Pravděpodobnostní modelování výše individuálních škod¹

Lidé a různé společnosti se pojišťují proti dopadům nahodilých událostí mající negativními vliv na jejich život, majetek či zdraví. Jejich výskyt je pro každého pojištěného velmi málo pravděpodobný, ale následky v případě jejich vzniku mohou být velmi závažné.

Pojištění je ekonomická disciplína úzce spjata s náhodnými událostmi, proto zde má velký význam teorie pravděpodobnosti. Ta umožňuje popsat riziko spojené s uzavřením pojištění, které představuje pro pojištěného povinnost platit pojistné a pro pojistitelé povinnost vyplacení pojistného plnění v případě výskytu pojistné události. Pokud je například pravděpodobnost výskytu pojistné události rovna 0,01, pak pojišťovna může očekávat povinnost výplaty pojistného plnění v jednom případě ze sta. To znamená, že výška pojistného, vyinkasovaná od 100 pojištěných, by měla být alespoň taková, aby pokryla výšku pojistného plnění právě pro danou jednu pojistnou smlouvu, u které došlo k pojistné události.

Stanovení výšky pojistného je zásadní činností pojišťovny, pro kterou potřebuje znát především zákonitosti týkající se rozdělení pravděpodobnosti počtu a výše pojistných plnění. Formou vyjádření zákona rozdělení pravděpodobnosti diskrétní i spojité náhodné proměnné je distribuční funkce $F(x)$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná proměnná X nabývá menších nebo stejných hodnot jako je hodnota reálného čísla x . Distribuční funkce je graficky znázorněna na obrázku 2. Náhodnou proměnnou X v diplomové práci představuje výška individuálních škod v rámci pojištění majetku.

Druhým způsobem vyjádření zákona rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné proměnné je hustota pravděpodobnosti, která se dá vyjádřit jako derivace distribuční funkce:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (1.1)$$

přičemž platí, že [2]:

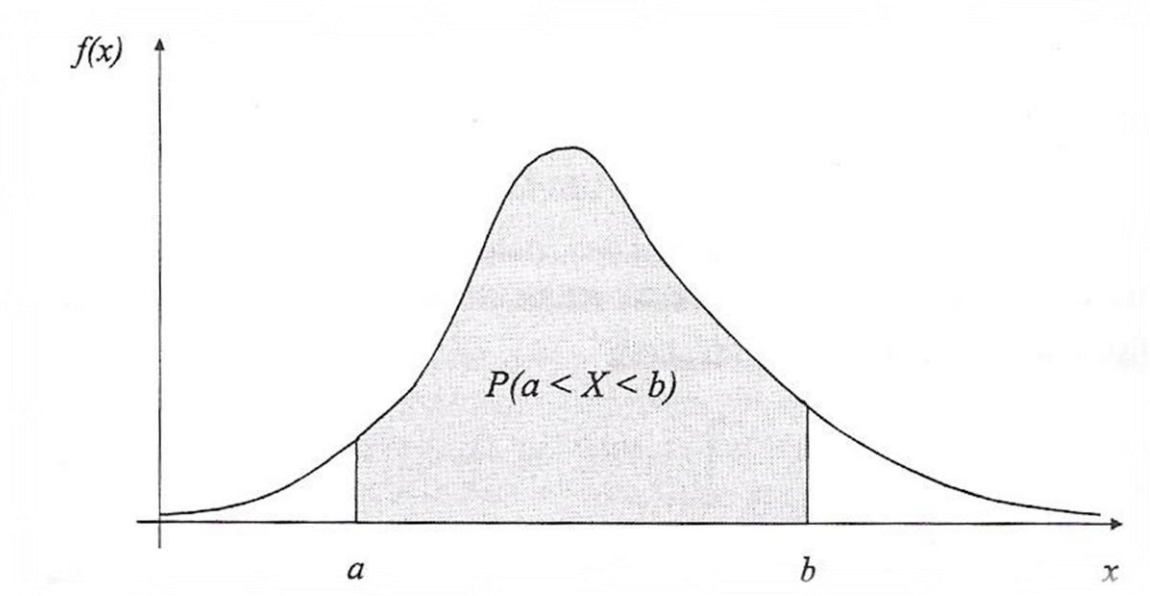
$$F(x) \geq 0, \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (1.3)$$

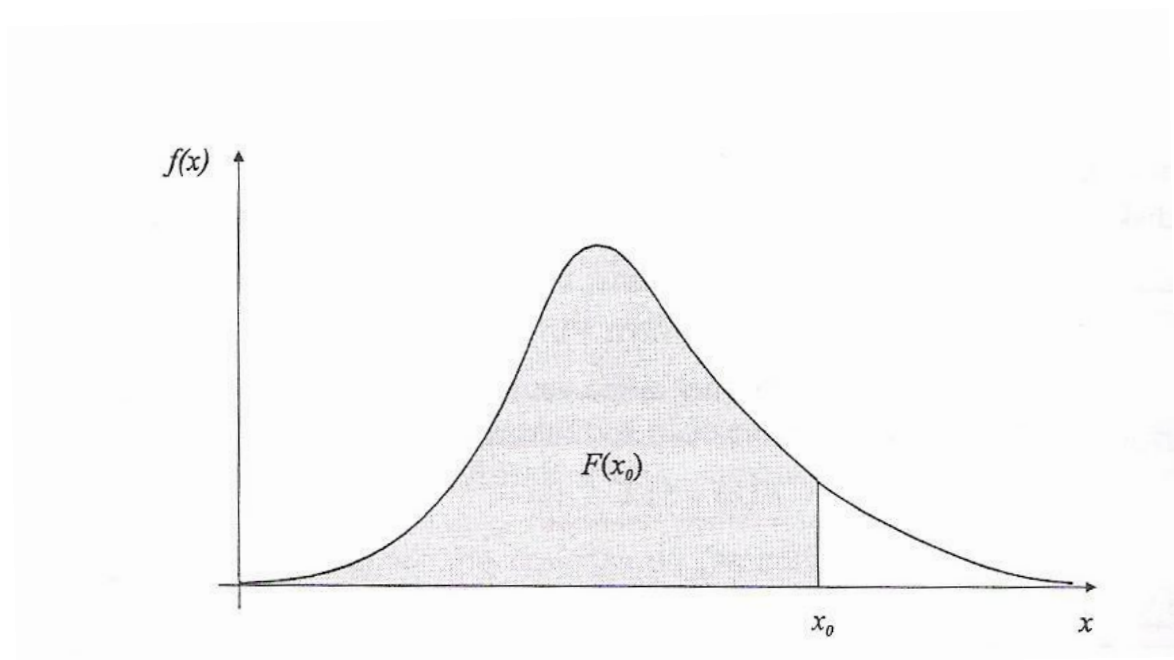
¹ Kapitola 1 zpracována podle: [2], [3], [7].

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{pro } a < b. \quad (1.4)$$

Vlastnost (1.4) je graficky znázorněna na obrázku 1.



Obrázek 1 - Pravděpodobnost intervalu hodnot spojité proměnné, zdroj: [2]



Obrázek 2 - Vzájemný vztah hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce,

zdroj: [2]

Tabulka 1 obsahuje data týkající se individuálních výšek škod pojištění majetku. Tyto data budou použita v diplomové práci pro praktické ukázky k daným problematikám.

Tabulka 1 – Individuální výšky škod pojištění domácnosti v tis. p.j.², zdroj: [1]

3	104	205	273	473	743	877	1194	1369	1772	2964	6240
11	121	207	275	475	756	942	1209	1373	1780	3156	6385
27	130	216	278	503	784	942	1223	1383	1858	3858	7089
36	138	224	281	510	786	945	1282	1395	1922	3872	7482
47	139	233	396	534	819	998	1283	1436	2042	4084	8059
49	140	237	405	565	826	1029	1288	1470	2247	4620	8079
54	143	254	412	656	841	1066	1296	1512	2348	4901	8316
77	153	257	423	656	842	1101	1310	1607	2377	5021	11453
78	193	259	436	716	853	1128	1320	1699	2418	5331	22274
85	195	265	456	734	860	1167	1367	1720	2795	5771	32043

1.1 Všeobecný postup pravděpodobnostního modelování individuální výšky škod

Všeobecný postup při výběru vhodného rozdělení výše škod se skládá ze tří základních kroků:

- grafická analýza, na jejímž základě se stanoví předpokládané rozdělení výšky škod,
- odhady parametrů předpokládaného rozdělení,
- testování vhodnosti předpokládaného rozdělení na zjištěné údaje pomocí testů dobré shody.

1.1.1 Grafická analýza údajů

Grafická analýza údajů je důležitou součástí modelování a získávání informací z dat jakéhokoliv typu. Grafické znázornění může poskytnout důležité informace o datech.

² Zkratka p.j. znamená peněžní jednotky.

Je možné tak opticky posoudit např. rozdělení dat, jejich symetrii či asymetrii, homogenitu, odlehlé hodnoty, anomálie atd.

Grafické znázornění dat je možné provádět různými prostředky, jako jsou:

- Histogram – tento typ grafu představuje jednotlivé třídy a jejich četnosti. Pomocí histogramu je vidět přibližný tvar rozdělení.
- Kvantilový graf (Q-Q graf) – pomocí kvantilového grafu je možné pozorovat, jak dané hodnoty kopírují přímkou určitého typu rozdělení. Pokud hodnoty dobře kopírují přímkou určitého rozdělení, lze předpokládat, že data mají daný druh rozdělení. V Q-Q grafu je možné najednou pozorovat i více typů rozdělení a okamžitě tak porovnat, které z nich nejlépe modeluje daná data. Mírně rostoucí trend hodnot v pravé části kvantilového grafu svědčí o tom, že hodnoty skutečného rozdělení konvergují k ose x pomaleji jak předpokládané rozdělení.
- Bodový graf – bodový graf znázorňuje jednotlivé hodnoty dat a interval jejich výskytu. Je možné tak vyčíst do jakého intervalu patří nejvíce dat a také zda jsou v datech odlehlé hodnoty.

1.1.2 Metody odhadu parametrů

Jedním z nutných úkolů při hledání vhodného pravděpodobnostního rozdělení výše škod je určení parametrů předpokládaného rozdělení. Při výpočtu parametrů je snaha o určení jejich přibližné hodnoty. To znamená, že tyto parametry odhadujeme. Ve statistice je možné se setkat s odhady bodovými, kdy výsledkem odhadu je jedna číselná hodnota, nebo s odhady intervalovými, kdy výsledkem odhadu je interval nebo-li tzv. interval spolehlivosti. Pro účely diplomové práce jsou v této části popsány obecné postupy dvou metod bodových odhadů a to metoda momentů a metoda maximální věrohodnosti.

1.1.2.1 Metoda momentů

Výhodou této metody je to, že je obvykle výpočetně méně náročnější. Naopak nevýhodou je, že výsledky získané touto metodou nejsou tak přesné jako např. výsledky získané pomocí metody maximální věrohodnosti. Princip metody momentů spočívá v tom, že momenty základního souboru jsou odhadovány odpovídajícími výběrovými momenty. Takže například střední hodnotu EX náhodné veličiny X , což je její první počáteční moment, je odhadována prvním výběrovým počátečním momentem, kterým je nazýván aritmetický průměr

a je označován \bar{x} . Stejně tak disperzi DX , což je druhý centrální moment náhodné veličiny X , je odhadována pomocí druhého výběrového centrálního momentu, který je nazýván výběrovou disperzí nebo-li výběrovým rozptylem a označujeme jej s^2 .

1.1.2.2 Metoda maximální věrohodnosti

Tato metoda je využitelná v rozmanitých situacích a odhady získané touto metodou mají velmi dobré vlastnosti. Principem metody je předpoklad, že výběrové hodnoty x_i , $i=1, 2, \dots, n$, mají největší pravděpodobnosti a je očekáváno, že funkce věrohodnosti $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ nabude svého maxima právě v těchto hodnotách.

Nechť $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je vektor n nezávislých výběrových pozorování ze základního souboru s rozdělením $f(x; \theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ je vektor p neznámých parametrů.

Funkce věrohodnosti $L(\theta; \mathbf{x})$ je definována vztahem:

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (1.5)$$

a její přirozený logaritmus je definován:

$$l(\theta; \mathbf{x}) = \ln L(\theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta). \quad (1.6)$$

Definice:

Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$ je takový vektor θ , který maximalizuje $L(\theta; \mathbf{x})$, resp. $l(\theta; \mathbf{x})$.

Vlastnosti maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}$:

- má asymptoticky normální rozdělení,
- je asymptoticky nezkreslený,
- je asymptoticky vydatný,
- je konzistentní,
- je invariantní, tzn. $\hat{\gamma}(\theta) = \gamma(\hat{\theta})$, přičemž $\gamma(\theta)$ je libovolná funkce odhadovaných parametrů.

1.1.3 Testy dobré shody

U testů dobré shody je testována statistická hypotéza, která se týká samotného rozdělení pravděpodobnosti základního souboru. Jde vlastně o testování, zda předpokládané rozdělení pravděpodobnosti, tedy teoretické, se shoduje se skutečným, tedy empirickým. Proto

je důležité, jak již bylo zmíněno, sestavit před formulací hypotézy nějaké grafické znázornění náhodného výběru, aby bylo možné vyloučit rozdělení pravděpodobnosti, jejichž průběh se od něj podstatně liší.

U všech testů jde vlastně o to, aby na hladině významnosti α (většinou volíme $\alpha=0,05$ nebo $\alpha=0,01$) byla zamítnuta resp. přijata nulová hypotéza, že statistický soubor má předpokládané rozdělení pravděpodobnosti.

Na ověření vhodnosti zvoleného rozdělení pravděpodobnosti lze použít např. Kolmogorovův-Smirnovův či Pearsonův χ^2 test dobré shody.

1.1.3.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Tento test se používá na ověření toho, jak dobře předpokládané teoretické rozdělení (spojité či diskrétní) modeluje daná data.

Testované hypotézy:

H_0 : náhodná proměnná X má rozdělení s hustotou $f(x; \theta)$.

H_1 : náhodná proměnná X nemá rozdělení s hustotou $f(x; \theta)$.

Testovací kritérium má tvar:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(k-1-p), \quad (1.7)$$

kde:

p – počet odhadovaných parametrů předpokládaného teoretického rozdělení,

k – počet intervalů skutečných empirických udajů,

O_i – skutečně zjištěné četnosti intervalu hodnot x_i ,

E_i – předpokládané četnosti hodnot x_i , vyjádřené vztahem np_i , kde n je rozsah výběrového souboru a p_i je:

- pravděpodobnost hodnoty x_i pro diskrétní proměnnou:

$$p_i = P(x_i) = P(X = x_i),$$

- pravděpodobnost intervalu $x \in (x_{i-1}, x_i)$ pro spojitou proměnnou:

$$p_i = P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad \text{kde } F(x) \text{ je distribuční funkce předpokládaného teoretického rozdělení.}$$

Kritická oblast:

$$W = \{ \chi; \chi > \chi_{\alpha, k-1-p}^2 \} \text{ kde } \chi_{\alpha, k-1-p}^2 = F_{\chi^2, k-1-p}^{-1}(1 - \alpha). \quad (1.8)$$

Nulová hypotéza H_0 je přijata tehdy, pokud hodnota testovacího kritéria nepadne do kritické oblasti, v opačném případě je zamítnuta. To vlastně znamená, že čím větší je rozdíl mezi předpokládaným a skutečným rozdělením pravděpodobnosti, tím budou větší rozdíly mezi skutečnými a předpokládanými četnostmi, takže hodnota testovacího kritéria bude velká. Což vede k závěru, že náhodná proměnná X nemá předpokládaný typ rozdělení. Naopak malá hodnota testovacího kritéria naznačuje malé rozdíly mezi předpokládanými a skutečnými četnostmi, což signalizuje přijetí nulové hypotézy, že náhodná veličina X má předpokládané rozdělení pravděpodobnosti.

Tento test není vhodný pro soubory malého rozsahu, jelikož není možné vytvořit dostatečný počet tříd. Alternativou je Kolmogorovův-Smirnovův test, který nepracuje s třídami, ale s jednotlivými daty.

1.1.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test

Tento test je založen na porovnání rozdílů mezi distribuční funkcí předpokládaného a skutečného empirického rozdělení pravděpodobnosti. Kolmogorovův-Smirnovův test lze použít i pro výběry menších rozsahů. Mezi hlavní výhody patří:

- nemusí být splněna omezující podmínka $np_i > 5$,
- test vychází z původních dat, nikoliv z údajů zařazených do tříd, takže nedochází ke ztrátě informací,
- má větší sílu než χ^2 test.

Test vychází z netříděných a vzestupně uspořádaných výběrových údajů. Uspořádanému náhodnému výběru přísluší empirická distribuční funkce, definovaná vztahem:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{(1)} \\ \frac{j}{n} & x_{(j)} < x \leq x_{(j+1)} \\ 1 & x > x_{(n)} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.9)$$

Testované hypotézy:

H_0 : náhodná proměnná X má rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí $F(x)$.

H_1 : náhodná proměnná X nemá rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí $F(x)$.

Testovací kritérium:

Testovací kritérium je maximální absolutní rozdíl mezi předpokládanou teoretickou a skutečnou empirickou distribuční funkcí a má tvar:

$$d_n = \sup |F_n(x) - F(x)| \quad (1.10)$$

V případě souborů s rozsahem $n > 100$ při rozhodování o přijmutí či zamítnutí nulové hypotézy určíme kritické hodnoty $d_{n;0,95}$ a $d_{n;0,99}$ podle vztahů:

$$d_{n;0,95} = \frac{1,358}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad d_{n;0,99} = \frac{1,628}{\sqrt{n}}. \quad (1.11)$$

Hypotéza, že náhodný výběr pochází z rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$ je přijata tehdy, když $d_n < d_{n;1-\alpha}$, kde $\alpha=0,05$ resp. $\alpha=0,01$ je hladina významnosti.

V případě souborů s rozsahem $n < 100$ je možné nalézt kritické hodnoty $d_{n;0,95}$ a $d_{n;0,99}$ v tabulkách.

2 Paretovo rozdělení výše individuálních škod³

Toto rozdělení nese jméno italského ekonoma a sociologa Vilfreda Pareta. Ten nejprve řešil nerovnoměrné rozdělení bohatství a zdrojů. Později se ukázalo, že takové nerovnoměrnosti mezi vstupy a výstupy lze pozorovat v mnohem výraznější míře. Dnes je Paretovo rozdělení velmi časté i v pojišťovnictví. Tento typ rozdělení se používá zejména při výskytu extrémních hodnot, jako např. v nemocenském pojištění či v pojištění proti požáru. Výhodou Paretova rozdělení od ostatních (např. exponenciálního) je, že pravděpodobnost nejvyšších hodnot konverguje k nule pomaleji a tak dobře aproximuje odlehle hodnoty. Paretovo rozdělení má dvě verze, evropskou a americkou. V další části budou charakterizovány obě verze Paretova rozdělení.

2.1 Americká verze Paretova rozdělení

Pravý konec Paretova rozdělení s parametry α, λ má tvar:

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha. \quad (2.1)$$

Z předchozího vztahu vyplývá vztah pro distribuční funkci:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha. \quad (2.2)$$

Po zderivování distribuční funkce vzniká vztah pro hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\alpha \times \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha-1} \times \left(-\frac{\lambda}{(\lambda + x)^2}\right) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}. \quad (2.3)$$

Definice:

Náhodná proměnná X má americké Paretovo rozdělení $\text{Pa}(\alpha, \lambda)$ právě tehdy, když funkční vyjádření její hustoty pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad \text{pro } x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0. \quad (2.4)$$

³ Kapitola 2 podle: [1], [2], [4], [5], [6]

Základní charakteristiky:

Střední hodnota:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}, \quad \text{pro } \alpha > 1 \quad (2.5)$$

Disperze:

$$D(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \text{pro } \alpha > 2 \quad (2.6)$$

2.2 Evropská verze Paretova rozdělení

Pravý konec Paretova rozdělení s parametry a , b má tvar:

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^b. \quad (2.7)$$

Vztah pro distribuční funkci má pak tvar:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b. \quad (2.8)$$

Po zderivování distribuční funkce vzniká vztah pro hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{ba^b}{x^{b+1}}. \quad (2.9)$$

Definice:

Náhodná proměnná X má evropské Paretovo rozdělení $\text{Pa}(a,b)$ právě tehdy, když funkční vyjádření její hustoty pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}, \quad \text{pro } x > a, b > 0, a > 0. \quad (2.10)$$

Základní charakteristiky:

Střední hodnota:

$$E(X) = \frac{ba}{b-1}, \quad \text{pro } b > 1 \quad (2.11)$$

Disperze:

$$D(X) = \frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)}, \quad \text{pro } b > 2 \quad (2.12)$$

3 Využití Paretova rozdělení v neživotním pojištění

3.1 Charakteristika neživotního pojištění⁴

Neživotní pojištění kryje velkou škálu rizik týkajících se života nebo zdraví osob (úraz, nemoc atd.), přes rizika vyvolávající věcné škody (živelné pohromy, vandalství, krádež atd.) po rizika finančních ztrát (přerušení provozu, úvěrové riziko atd.).

V neživotním pojištění se pojistné smlouvy uzavírají na kratší doby, než je tomu u životního pojištění, většinou na jeden rok s případným prodlužováním. Narozdíl od životního pojištění se pojistná plnění v neživotním pojištění týkají skutečného rozsahu škody (např. pojištění proti odcizení) nebo doby trvání následků škody (např. pojištění denní dávky při pracovní neschopnosti).

Jednotlivé typy pojistných produktů lze různě kombinovat, lze kombinovat i produkty neživotního pojištění s produkty životního pojištění za účelem komplexní pojistné ochrany.

Existuje více forem neživotního pojištění, jsou to pojištění obnosová (pojistné plnění se rovná pojistné částce) nebo pojištění škodová (pojistné plnění je menší nebo rovno pojistné částce). U škodového pojištění záleží na tom, zda je pojištění sjednáno jako ryzí zájmové pojištění (pojistné plnění se rovná škodě), pojištění na první riziko (pojistné plnění je rovno škodě, pokud je škoda menší jak pojistná částka, nebo je rovno pojistné částce, pokud je škoda větší nebo rovna pojistné částce) a pojištění na plnou hodnotu (stanovuje se hodnota pojištěného majetku, což je vlastně pojistná částka, která by měla být stejná nebo větší než hodnota daného majetku). Dále se k základnímu pojištění mohou sjednávat tzv. doplňkové formy pojištění. Jedná se o excedentní frančizu (částka, která se odečítá od pojistného plnění), procentní spoluúčast (pojištěný se podílý určitým procentem na úhradě škody) a integrální frančizu (částka, do jejíž výše se pojistné plnění nevyplácí, jde o vyloučení menších škod). Všechna doplňková pojištění mají pro pojištěného výhodu v podobě nižší hodnoty pojistného. U některých pojištění se lze pojistit proti jednomu riziku, více rizikům najednou (např. pojištění FLEXA) nebo všem rizikům najednou, což je pojištění tzv. All Risks.

⁴ Kapitola 3.1 podle: [8]

3.1.1 Neživotní pojištění osob

Úrazové pojištění

Týká se pojistného plnění v důsledku úrazu, při kterém došlo k přechodnému nebo trvalému poškození zdraví nebo smrti pojištěného.

Úrazové pojištění kryje:

- trvalé následky úrazu,
- smrt následkem úrazu,
- plnění po dobu nezbytného léčení,
- denní odškodné za dobu pracovní neschopnosti,
- denní odškodné při pobytu v nemocnici,
- úhradu nákladů spojených s úrazem,
- pojištění drobných úrazů.

Velikost pojistného závisí kromě na druhu pojištění také na rizikovosti, tzn. na pravděpodobnosti realizace rizika podle vykonávaných činností pojištěného. Proto pojišťovny zařazují pojištěné do tzv. tarifních skupin⁵.

Nemocenské pojištění

Toto pojištění se využívá pro případy, které nejsou kryty povinným zdravotním pojištěním a povinným sociálně nemocenským pojištěním. Dále slouží pro osoby, které nejsou do povinného pojištění zahrnuty.

Nemocenské pojištění kryje rizika jako:

- pojištění léčebných výloh v zahraničí,
- pojištění nadstandardního vybavení při pobytu v nemocnici,
- pojištění vážných onemocnění,
- pojištění stomatologických výkonů nehrazených nebo částečně hrazených veřejným zdravotním pojištěním,
- pojištění denní podpory při pobytu v nemocnici atd.

⁵ Tarifní skupiny jsou homogenní skupiny pojistných smluv, pro něž je pojištěné riziko přibližně stejné, takže v rámci každé tarifní skupiny je možné vyžadovat jednotnou pojistnou sazbu.

3.1.2 Pojištění majetku

Pojištění majetku obyvatelstva

Mezi nejdůležitější pojištění majetku obyvatelstva patří:

- ❖ **Pojištění domácnosti** – objektem tohoto pojištění je soubor zařízení domácnosti, které slouží pro její členy. Nejčastěji je do tohoto pojištění zahrnuto riziko odcizení, riziko živelní nebo vodovodní. Pojistná částka se sjednává na základě ohodnocení předmětů zahrnutých v souboru zařízení dané domácnosti. Pro předměty, které se svoji hodnotou (např. starožitnosti, umělecké předměty) nebo množstvím vymykají standardnímu vybavení domácnosti, je možné sjednat dopňkové pojištění. Doplnkově lze pojistit i rizika, která nejsou obsažena v základním pojištění. Výše pojistného se odvíjí od sjednané pojistné částky, která závisí na hodnotě majetku, a je odlišeno podle umístění domácnosti (město, vesnice atd.) a podle míry zabezpečení domácnosti proti rizikům (např. proti krádeži).

- ❖ **Pojištění budov** – předmětem pojištění budov jsou rodinné domky, nájemní obytné domy, rozestavěné domy, hospodářské budovy, rekreační zařízení, garáže, dílny atd. Obvykle kryje rizika živelní, vodovodní a odcizení. Pojištěný stanoví hodnotu pojistného předmětu, na základě čehož je stanovena pojistná částka a pojistné.

- ❖ **Havarijní pojištění** – toto pojištění slouží ke krytí škod na motorových vozidlech, ať už je řidič vozidla způsobil či nezpůsobil. Základem je tedy krytí rizika havárie, dale rizika živelního, vandalství, odcizení či strojního. Součástí je i pojištění asistenčních služeb. Pojišťovny vyplácí pojistné plnění ve výši nákladů na opravu, nepřekročí-li cenu vozidla před pojistnou událostí. Velikost pojistného se určuje dle řady kritérií, např. pořizovací cena vozidla, jeho stáří, typ, obsah, garážování, uplatnění zabezpečovacího zařízení proti krádeži, dále také věk řidiče, pohlaví, počet osob využívající dané vozidlo atd. Pro stanovení výše pojistného u havarijního pojištění je typické uplatňování bonusů či malusů, což jsou slevy resp. přírážky k pojistnému, podle nehodovosti pojištěného v daném období ve srovnání s jeho nehodovostí v předchozím období.

Pojištění podnikatelských a průmyslových rizik

- ❖ **Živelní pojištění** – toto pojištění kryje škody na majetku, které byly způsobeny živelním rizikem, např. požár, výbuch, blesk, vichřice, povodeň atd. Pojistné plnění je obvykle vypláceno ve výši potřebné opravy nebo znovuzřízení pojištěného majetku. Velikost pojistného plnění pak opět závisí na hodnotě daného majetku a na rizikové situaci podniku (např. konstrukce stavby, stavební materiály, realizace nebezpečných činností jako je např. chemická výroba, úroveň zabezpečení před rizikem apod.).

- ❖ **Pojištění technická** – do technických pojištění patří:
 - *Pojištění strojní*, které zahrnuje krytí škod v souvislosti s poškozením strojů a strojních zařízení způsobené jejich provozem.
 - *Pojištění montážních a stavebních rizik*, která kryje rizika spojená s montáží strojů a strojních zařízení. Pojištění stavebních rizik kryje všechny škody způsobené na stavebních dílech a materiálech po dobu výstavby.

- ❖ **Pojištění pro případ přerušení provozu (šomázní pojištění)** – kryje následky škody, která vzniká v důsledku přerušení provozu, ke kterému dochází na základě poškození majetku živelnou nebo jinou událostí. Velikost pojistné částky se odvozuje od hrubého zisku zahrnující ušlý zisk a fixní náklady.

- ❖ **Pojištění úvěru** – kryje finanční ztráty v případě nesplacení poskytnutého úvěru, patří sem např. riziko spojené s úmrtím dlužníka, riziko spojené s pracovní neschopností dlužníka, majetkové pojištění zástav, pojištění obchodního úvěru, pojištění bankovního úvěru, pojištění vývozního úvěru, pojištění zemědělských úvěrů. Dále lze úvěrová rizika členit na komerční úvěrová rizika (např. kursová rizika) a politická rizika (např. přírodní katastrofa v zemi dovozce).

- ❖ **Pojištění proti odcizení** – kryje rizika spojená s jednáním pachatele, které směřovala ke krádeži vloupáním nebo loupežnému přepadení, přičemž podmínkou nároku na pojistné plnění je odcizení nebo poškození způsobem, při kterém musel pachatel překonat překážky nebo opatření chránící majetek. Pojistné je pak diferencováno podle úrovně zabezpečení majetku.

- ❖ **Pojištění dopravní** – jedná se o pojištění pro případ poškození, zničení nebo ztráty věci při dopravě. Kryje rizika havárie, dále např. živelní rizika či riziko odcizení. Dopravní pojištění zahrnuje pojištění kaska, tj. pojištění škod na dopravních prostředcích, a pojištění karga, tj. pojištění škod na přepravovaných předmětech.

Pojištění zemědělských rizik

- ❖ **Pojištění plodin** – kryje rizika škod na rostlinné produkci. Toto pojištění má několik podob, patří sem:
 - krupobitní pojištění,
 - pojištění proti vybraným rizikům (např. povodeň, mráz atd.),
 - pojištění úrody plodin.
- ❖ **Pojištění hospodářských zvířat** – kryje škody s uhynutím, utracením nebo nutnou porážkou v důsledku nákazy nebo infekční nemoci, rizika živelného, úrazu či neinfekční nemoci. Patří sem i pojištění zvířat, které se chovají ke specifickým účelům (např. závodní koně).

3.1.3 Pojištění odpovědnosti za škody

Toto pojištění souvisí s tím, že pojištěný subjekt může způsobit škody jinému subjektu na majetku, na zdraví, na životě či finanční škody. Pojistné plnění zahrnuje:

- náhradu škody,
- náklady na obhajobu pojištěného v souvislosti se škodou, kterou má pojišťovna uhradit,
- náklady na soudní řízení.

Odpovědnostní pojištění za škody při provozu vozidel

Pojištěný má na základě tohoto pojištění nárok, aby za něj pojišťovna uhradila:

- škody na zdraví nebo usmrcení,
- škody vzniklé poškozením, zničením nebo ztrátou věci,
- škody mající povahu ušlého zisku,
- účelně vynaložené náklady spojené s právním zastoupením.

Pojistitel nehradí:

- škody, které utrpěl řidič vozidla,
- majetkové škody, za které pojištěný odpovídá svým příbuzným,
- škody na vozidle, na které se nevztahuje pojištění.

Odpovědnostní pojištění při pracovním úrazu nebo nemoci z povolání

Povinnost sjednat toto pojištění má každý zaměstnavatel, který zaměstnává alespoň jednoho zaměstnance. Sazby pojistného jsou stanoveny v právním předpise a jsou diferencovány podle odvětví činnosti zaměstnavatele.

Profesní odpovědnostní pojištění

Toto pojištění je podmínkou pro výkon povolání některých profesí. Patří sem odpovědnostní pojištění:

- advokátů,
- stomatolobů, lékárníků a lékařů,
- veterinárních lékařů,
- notářů,
- daňových poradců,
- auditorů,
- architektů, inženýrů a techniků,
- patentových zástupců,
- komerčních právníků,
- pojišťovacích zprostředkovatelů.

Obecné odpovědnostní pojištění

Do tohoto druhu pojištění spadá:

- pojištění odpovědnosti za škody jednotlivců,
- obecné odpovědnostní pojištění podniků,
- pojištění odpovědnosti za výrobek,
- pojištění odpovědnosti za škodu manažerů, ředitelů a členů představenstev.

3.1.4 Pojištění právní ochrany

V rámci pojistného plnění jsou obvykle kryty:

- soudní výdaje a náklady,
- náklady na svědky a soudní znalce,
- odměny právního zástupce,
- náklady na provedení výkonu rozhodnutí,
- výdaje na cesty pojištěného k soudnímu líčení,
- služby pojišťovny na objasnění skutečnosti, ověření existence pojistné události, jmenování advokáta, dohled nad průběhem procesu.

Součástí pojištění právní ochrany je také poskytování právních rad a právní asistence. Toto pojištění se uplatňuje ve třech základních podobách a to pojištění právní ochrany rodiny, pojištění právní ochrany motorového vozidla a pojištění právní ochrany podniků.

3.1.5 Cestovní pojištění

Do cestovního pojištění spadají následující pojistné produkty:

- pojištění zdravotní, kryjící náklady na lékařskou péči, ošetření, léky atd.,
- pojištění úrazové,
- pojištění storna zájezdu,
- pojištění zavazadel,
- pojištění odpovědnosti za škody,
- pojištění právní ochrany.

Pojištění cestovních kancelářů

Jde vlastně o pojištění cestovní kanceláře proti úpadku. Pojistné plnění se v rámci tohoto pojištění vyplácí tehdy, pokud cestovní kancelář z důvodu svého úpadku:

- neposkytne zákazníkovi dopravu z místa pobytu v zahraničí do České republiky,
- nevrátí zákazníkovi zaplacenou zálohu nebo cenu zájezdu v případě, že se zájezd neuskutečnil,
- nevrátí zákazníkovi rozdíl mezi zaplacenou cenou zájezdu a cenou částečně poskytnutého zájezdu v případě, že se zájezd uskutečnil pouze z části.

3.2 Odhady parametrů Paretova rozdělení

3.2.1 Odhad parametrů Paretova rozdělení metodou momentů

Při odhadu parametrů Paretova rozdělení $\text{Pa}(\alpha, \lambda)$ jsou pomocí metody momentů určeny výběrové charakteristiky \bar{x} a s^2 a řešena soustava rovnic [2]:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \quad (3.1)$$

$$s^2 = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad (3.2)$$

Jsou tak získány odhady parametrů α a λ metodou momentů ve tvaru [2]:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2 - \bar{x}^2} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1)\bar{x} \quad (3.4)$$

Podle vztahů (3.1) a (3.2) byl z použitých dat výpočítán průměr a směrodatná odchylka:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{120} \times 242335 = 2019,458333,$$

$$s^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = 15602529,26.$$

Po dosazení průměru a směrodatné odchylky do vztahů (3.3) a (3.4) jsou získány odhady parametrů Paretova rozdělení metodou momentů a to $\tilde{\alpha} = 2,708$ a $\tilde{\lambda} = 3448,75$.

3.2.2 Odhad parametrů Paretova rozdělení metodou maximální věrohodnosti

Při této metodě jsou prováděny maximálně věrohodné odhady parametrů $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\lambda}$, postup je následující [2]:

- nejprve je vyjádřena funkce věrohodnosti:

$$L(\alpha, \lambda, x) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}},$$

- dále je funkce věrohodnosti zlogaritmována:

$$l(\alpha, \lambda, x) = \sum_{i=1}^n [\ln \alpha + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \ln(\lambda + x_i)] = n \ln \alpha + n \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i),$$

- je nalezena parciální derivace $l(\alpha, \lambda, x)$ podle α : $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i)$,
- parciální derivace je položena rovna nule a je tak získán maximálně věrohodný odhad $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})} = A$,
- stejně tak je určena parciální derivace podle λ : $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}$,
- opět je položena parciální derivace rovna nule a je získán maximálně věrohodný odhad $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} = B$,
- nyní jsou k dispozici dvě různá vyjádření pro maximálně věrohodný odhad parametru $\hat{\alpha}$. Jejich rozdílem je získána funkce pro druhý parameter λ :

$$f(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})}$$

Při aplikaci těchto vztahů na používaná data je vypočítána hodnota $A = 2,86019$ a rovněž $B = 2,9841602$, kdy za parametr λ je nejprve dosazen odhad tohoto parametru získaný metodou momentů. Dále je nutné, aby platilo $A - B = 0$. V tomto případě je použita v programu Excel na kartě „data“ nabídka „analýza hypotéz“ a dále „hledání řešení“. To znamená, že je hledáno řešení $\hat{\lambda}$, tak aby platilo $A - B = 0$. Řešitel v tomto případě našel řešení $\hat{\lambda} = 1868,4402$ a sám si přepočítal odhady parametru $\hat{\alpha}$ s novým parametrem $\hat{\lambda}$.

Po všech uvedených výpočtech jsou konečné výsledky pro odhad parametru α a λ Paretova rozdělení pomocí metody maximální věrohodnosti:

$$\hat{\alpha} = A = 1,879 \text{ nebo } \hat{\alpha} = B = 1,879$$

$$\hat{\lambda} = 1868,44.$$

Postup výpočtu maximálně věrohodných odhadů parametru Paretova rozdělení pravděpodobnosti je znázorněn v tabulce 2.

**Tabulka 2 – Ukázka maximálně věrohodných odhadů parametrů Paretova rozdělení,
zdroj:autor**

n	x_i	$\ln(1+x_i/\lambda)$	$1/(\lambda+x_i)$	$x_i/(\lambda*(\lambda+x_i))$
1	3	0,000869503	0,000289709	2,52012E-07
2	11	0,00318449	0,000289039	9,21908E-07
3	27	0,007798447	0,000287708	2,25245E-06
4	36	0,010384473	0,000286965	2,99551E-06
5	47	0,013536116	0,000286062	3,89849E-06
6	49	0,014108077	0,000285898	4,06206E-06
7	54	0,015536548	0,00028549	4,47017E-06
8	77	0,022081362	0,000283628	6,33255E-06
9	78	0,02236495	0,000283548	6,41297E-06
10	85	0,024347815	0,000282986	6,97465E-06

.....
.....
.....

suma	242335	41,9552837	0,026061862	0,008733399
	A	2,860188025	B	2,984160175

3.3 Testy dobré shody za předpokladu Paretova rozdělení

3.3.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Na hladině významnosti $\alpha=0,05$ je ověřována hypotéza, že výšky pojistných plnění mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti s parametry $Pa(\alpha, \lambda)$. Opět jsou použity parametry získané metodou maximální věrohodnosti, tedy:

$$\alpha = 1,879$$

$$\lambda = 1868,44$$

Testované hypotézy:

H_0 : náhodná proměnná X má Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

H_1 : náhodná proměnná X nemá Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 3 - Postup ověřování hypotézy pomocí Pearsonova χ^2 testu, zdroj: autor

i	$(x_{i-1}, x_i]$	O_i	HH	$F(HH)$	p_i	E_i	$(O_i-E_i)^2/E_i$
1	<0; 1000)	65	1000	0,553	0,55311	66,373	0,02841684
2	<1000; 2000)	29	2000	0,745	0,19212	23,055	1,53310329
3	<2000; 3000)	7	3000	0,835	0,08937	10,725	1,29355295
4	<3000; 4000)	3	4000	0,884	0,04896	5,8754	1,40718705
5	<4000; 5000)	3	5000	0,913	0,02983	3,5761	0,09282046
6	<5000; 6000)	3	6000	0,933	0,01953	2,3431	0,18418083
7	<6000; 8000)	4	8000	0,956	0,02326	2,791	0,52374904
8	<8000; ∞)	6			0,04385	5,2617	0,10360848
	Suma	120			1		5,16661892

Tabulka 3 znázorňuje postup ověřování hypotézy pomocí Pearsonova χ^2 testu. Ve druhém sloupci jsou uvedené intervaly výšky škod. Ve třetím sloupci jsou empirické četnosti intervalů $(x_{i-1}, x_i]$ hodnot x spojité proměnné X . Ve čtvrtém sloupci jsou uvedené horní hranice intervalů a v pátém sloupci distribuční funkce Paretova rozdělení pro tyto hranice. V šestém sloupci je vypočítána pravděpodobnost p_i intervalu hodnot spojité proměnné jako rozdíl mezi distribučními funkcemi Paretova rozdělení v horní a dolní hranice intervalu. V sedmém sloupci jsou očekávané četnosti vyjádřené vztahem np_i . Hodnota testovacího kritéria je získána jako suma hodnot z posledního sloupce. V tomto případě je $\chi^2 = 5,167$. Testovací kritérium má podle (1.7) 5 stupňů volnosti. Na hladině významnosti $\alpha=0,05$ je pak vypočítána hodnota 95. percentilu pomocí funkce CHIINV v programu Excel, tedy $\chi^2_{0,95} = 11,07$.

Protože $\chi^2 < \chi^2_{0,95}$ je nulová hypotéza je, že výšky škod mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, na hladině významnosti $\alpha=0,05$ přijata.

3.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test

Na hladině významnosti $\alpha=0,05$ je ověřována hypotéza, že individuální výšky škod mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti s parametry $Pa(\alpha, \lambda)$. Jsou použity parametry získané metodou maximální věrohodnosti, tedy:

$$\alpha = 1,879$$

$$\lambda = 1868,44$$

Testované hypotézy:

H_0 : náhodná proměnná X má Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

H_1 : náhodná proměnná X nemá Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 4 - Ukázka ověřování hypotézy pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu, zdroj: autor

j	$x_{(j)}$	$F_{120}/X_{(j)}$	$F_{120}/X_{(j+1)}$	$F/x_{(j)}$	$ F_{120}(x_{(j)})-F(x_{(j)}) $	$ F_{120}(x_{(j+1)})-F(x_j) $
1	3	0	0,00833	0,0030099	0,0030099	0,0053234
2	11	0,00833	0,01667	0,010969	0,0026356	0,0056977
3	27	0,01667	0,025	0,0265977	0,0099310	0,0015977
4	36	0,025	0,03333	0,0352232	0,0102231	0,0018898
5	47	0,03333	0,04167	0,045607	0,0122739	0,0039407
6	49	0,04167	0,05	0,0474769	0,005810	0,0025230
7	54	0,05	0,05833	0,0521266	0,0021265	0,0062068
8	77	0,05833	0,06667	0,0730733	0,014739	0,0064066
9	78	0,06667	0,075	0,0739678	0,0073012	0,0010322
10	85	0,075	0,08333	0,0801931	0,0051931	0,0031402

.....

120	32043	0,99167	1	0,9956885	0,0040218	0,0043115
					maximum	0,0580281

Postup ověřování hypotézy je znázorněn v prvním řádku tabulky 4. V prvním sloupci jsou uvedena pořadová čísla j , v druhém sloupci vzestupně uspořádané hodnoty výšky škod. V třetím a čtvrtém sloupci jsou hodnoty empirické distribuční funkce. V pátém sloupci jsou hodnoty předpokládané distribuční funkce $1-(\lambda/(\lambda + x))^\alpha$. Poslední dva sloupce obsahují absolutní rozdíly hodnot empirické a předpokládané distribuční funkce.

Maximální aboslutní odchylka z posledních dvou sloupců je $d_{120} = 0,058028094$, což je hodnota testovacího kritéria. Potom podle vztahu (1.11) dostáváme kritickou hodnotu $d_{120;0,95} = 0,123967872$.

Protože $d_{120} < d_{120;0,95}$ je nulová hypotéza, že výšky škod mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, na hladině významnosti $\alpha=0,05$ přijata.

3.4 Pravděpodobnostní modelování výše škod pomocí Statgraphics Centurion XV

3.4.1 Základní charakteristiky

V předchozích kapitolách byla výše škod modelována pomocí programu Microsoft Excel. Tato kapitola obsahuje praktickou ukázkou toho, jak lze individuální výše škod modelovat v systému Statgraphics Centurion XV.

Nejprve jsou určeny základní charakteristiky výše škod, pomocí nichž lze hned na začátku usuzovat o jejich rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 5 - Základní charakteristiky výše škod v tis. p.j., zdroj: Statgraphic Centurion XV

Count	120
Average	2019,46
Median	868,5
Standard deviation	3950,0
Coeff. of variation	195,597%
Minimum	3,0
Maximum	32043,0
Skewness	5,16235
Kurtosis	33,0946

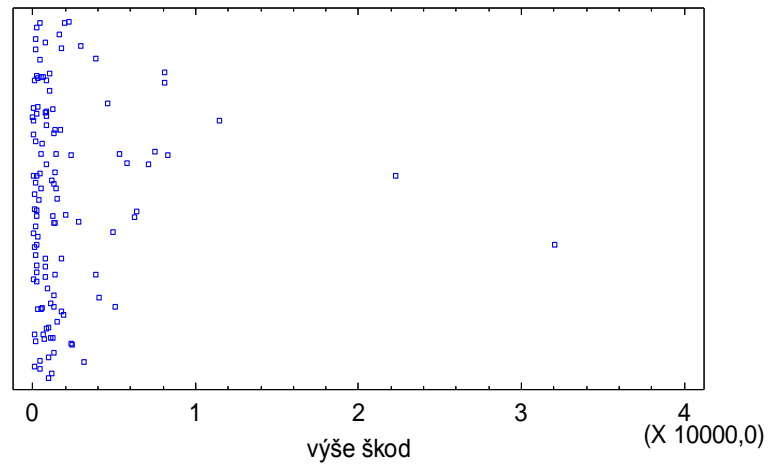
- ✓ Počet individuálních škod je 120,
- ✓ průměrná výše škody je 2 019,46,
- ✓ medián je roven 868,5,

- ✓ směrodatná odchylka je 3 950,
- ✓ variační koeficient je 195,597%,
- ✓ minimální hodnota je 3,
- ✓ maximální hodnota je 32 043,
- ✓ koeficient šikmosti je 5,16235,
- ✓ koeficient špičatosti je 33,0946.

Tabulka 5 zobrazuje přehled výběrových statistik pro výše škod, zachycuje jejich úroveň, variabilitu dat, dále koeficienty šikmosti a špičatosti, které mohou být použity k určení, zda vzorek pochází z normálního rozdělení. Hodnoty těchto statistik mimo rozsah -2 až +2 ukazují významné odchylky od normálu [9]. V tomto případě hodnota koeficientu šikmosti ani hodnota koeficientu špičatosti není v rozsahu očekávaných hodnot a proto už víme, že výše škod nepochází z normálního rozdělení. Většina škod je menšího rozsahu s větší pravděpodobností vzniku. Vyskytují se zde ale i odlehlé hodnoty s menší pravděpodobností vzniku, což způsobuje velkou variabilitu (variační koeficient má hodnotu 195,597%). Koeficient šikmosti je kladný, to znamená, že se jedná o pravostraně zešikmené rozdělení pravděpodobnosti, mezi které Paretovo rozdělení patří.

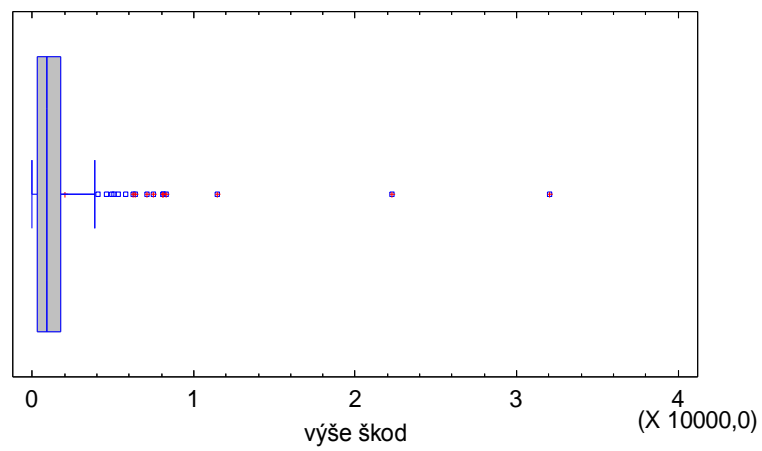
Na obrázku 3 a 4 jsou pomocí bodového grafu a krabicového grafu znázorněny výše škod. Každý graf má jinou formu znázornění, ale na obou lze pozorovat, že největší výskyt výše škod je v intervalu od 0 do 2 000 000 p.j., a že se zde vyskytují i dvě extrémní hodnoty s výší škody nad 20 mil. Kč. Na obrázku 5 je hustota pravděpodobnosti výšky škod. Z obrázku 6 na histogramu lze pozorovat, že výšky škod dobře modelují lognormální a loglogistické rozdělení, dokonce lépe než Paretovo rozdělení v evropském tvaru, které je využito v programu STATGRAPHICS Centurion XV.

Scatterplot

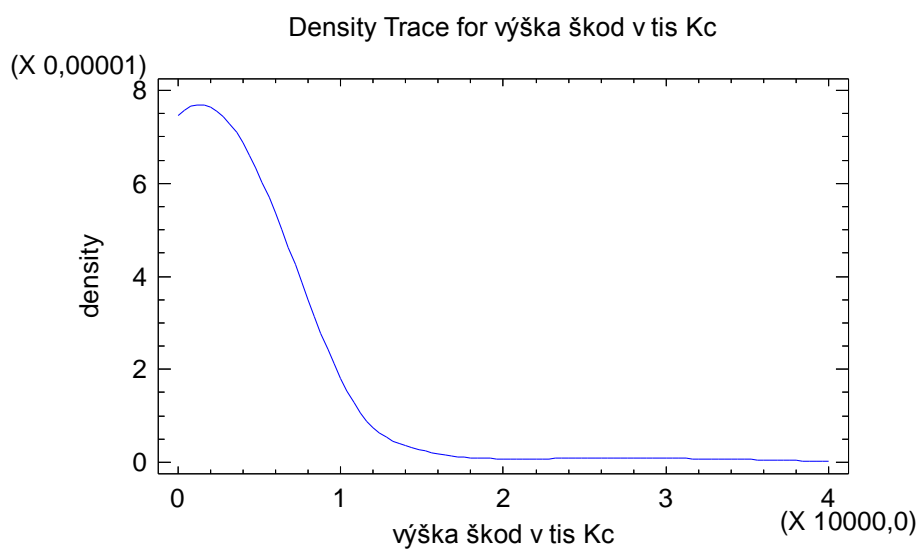


Obrázek 3 - Bodový graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV

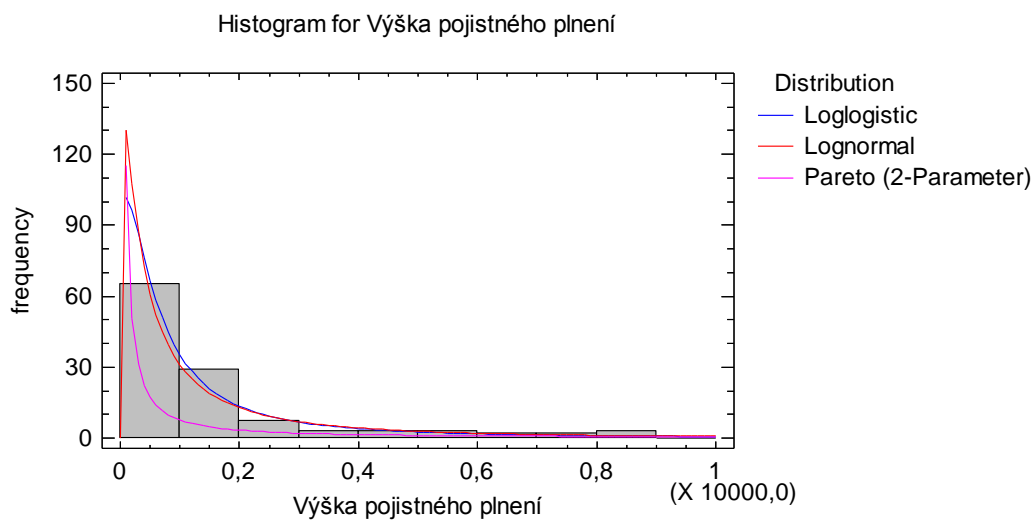
Box-and-Whisker Plot



Obrázek 4 - Krabicový graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV



Obrázek 5 – Hustota pravděpodobnosti výšky škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV



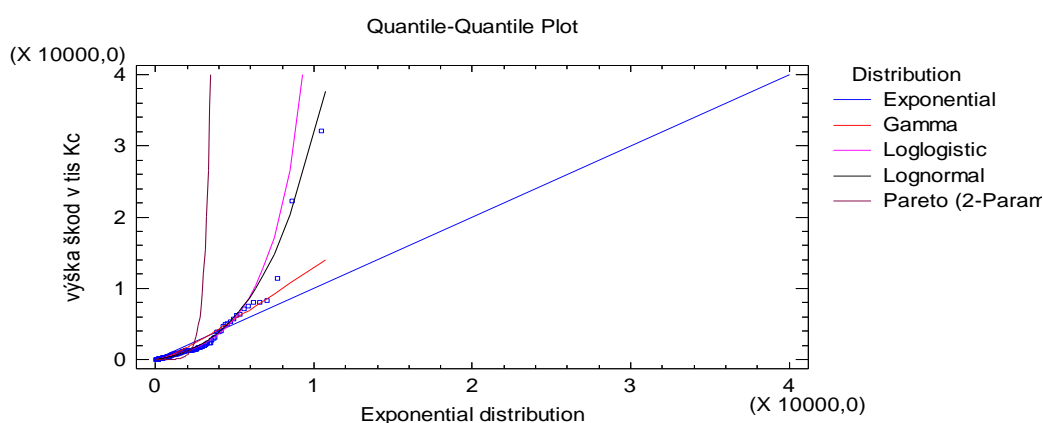
Obrázek 6 – Histogram výšky škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV

3.4.2 Rozdělení pravděpodobnosti

Statistický programový balík STATGRAPHICS Centurion XV nabízí širokou škálu rozdělení pravděpodobnosti, které lze použít při ověřování vhodnosti vybraného rozdělení na základě zjištěných údajů. Shodu předpokládaného a empirického rozdělení můžeme ověřovat pomocí testů dobré shody. Cílem je zjistit, zda mají data Paretovo rozdělení pravděpodobnosti. Je nutné podotknout, že v tomto programu je použit evropský tvar Paretova rozdělení, jehož tvar se liší od amerického tvaru, který byl použit při výpočtech v programu Microsoft Excel.

Pro vizuální posouzení je použit nejprve Q-Q graf, kde je vždy jedno rozdělení zvoleno pro definování osy X , která má tvar diagonály. Ostatní rozdělení mají tvar křivky. V tomto případě, jak je vidět na obrázku 7, bylo zvoleno pro definování osy X exponenciální rozdělení. Škody se od této osy výrazně odchylují, proto můžeme usuzovat, že exponenciální rozdělení nebude vhodným typem rozdělení pro soubor dat. Normální rozdělení bylo už vyloučeno v předchozí části, proto už může být z testování vynecháno. Z obrázku 7 je vidět, že nejlépe škody kopírují křivky lognormálního a loglogistického rozdělení. Lze tedy předpokládat, že nejvhodnější pro soubor škod bude jedno z nich. Naopak křivka Paretova rozdělení evropského tvaru se výrazně odchyluje a nelze tedy předpokládat, že by škody měly toto rozdělení (použit je dvouparametrický typ).

Zda jsou předpoklady správné, je ověřeno pomocí testů dobré shody.



Obrázek 7 – Q-Q graf pro různé typy rozdělení, zdroj: Statgraphic Centurion XV

3.4.2.1 Testy dobré shody v Statgraphic Centurion XV

Statgraphic centurion XV nabízí 7 různých testů dobré shody. Kolmogorův-Smirnovův a Pearsonův χ^2 jsou všeobecné testy, které mohou být použity na všechny typy souborů dat. Tyto dva testy jsou teoreticky popsány v kapitole 1 a jsou použity i v tomto případě na testování shody předpokládaného a empirického rozdělení pravděpodobnosti.

Pro rozhodování, které z analyzovaných rozdělení je nejvhodnější pro soubor dat, lze použít dvě kritéria:

- minimální hodnotu testovací charakteristiky – nejlepší rozdělení je to, jehož hodnota testovací charakteristiky je nejmenší,
- maximální p-hodnota (P-Value) – nejlepší rozdělení je to, jehož p-hodnota je největší. Pokud je hodnota P-Value menší než 0,05, zamítáme předpoklad, že dané rozdělení pravděpodobnosti je rozdělením základního souboru škod. Čím více se hodnota P-Value blíží k hodnotě 1, tím lépe se toto rozdělení blíží skutečnému rozdělení základního souboru škod. [9]

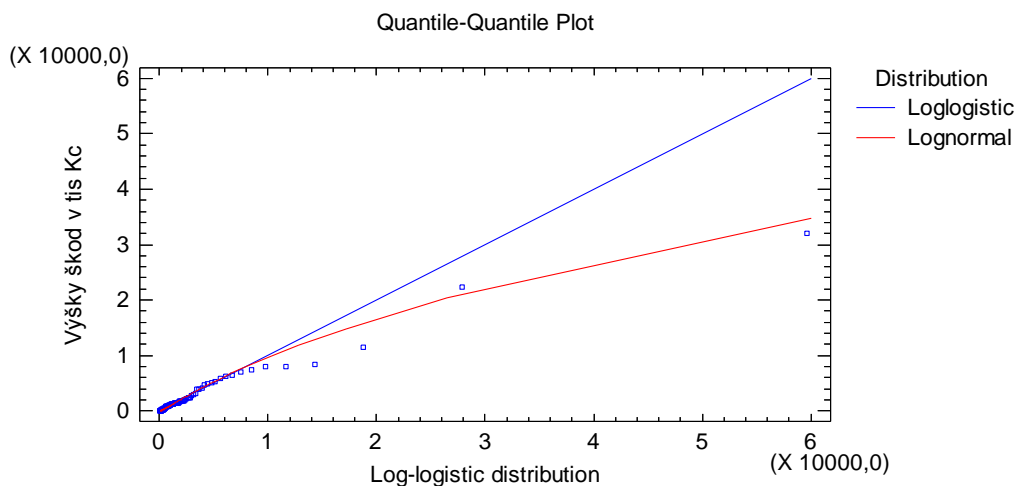
V tomto případě je použito druhé zmíněné kritérium a to maximální p-hodnota. Z tabulky 6 lze vidět, že podle velikosti P-Value bude hledaným rozdělením buď lognormální či loglogistické rozdělení. V případě χ^2 testu má největší P-Value lognormální rozdělení pravděpodobnosti. V případě K-S testu má však největší P-Value loglogistické rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 6 – Porovnání rozdělení pravděpodobnosti výše škod pomocí velikosti P-Value, zdroj: autor (upraveno na základě výstupu ze STATGRAPHIC Centurion XV)

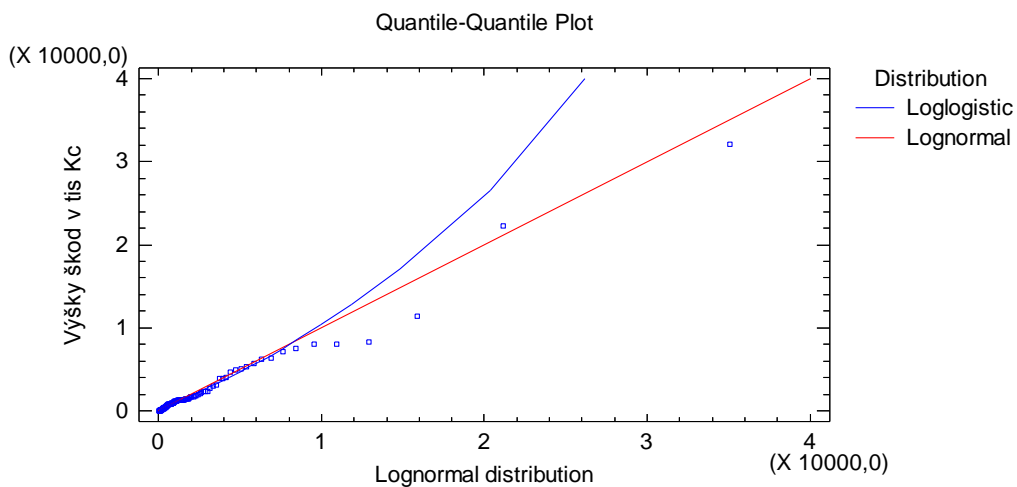
<i>Rozdělení</i>	<i>P-Value χ^2 testu</i>	<i>P-Value K-S testu</i>
exponenciální	0,00214622	0,000120847
gama	0,0302365	0,0189847
loglogistické	0,0556913	0,641291
lognormální	0,081668	0,327394
Paretovo (2-parametrické)	0,0	0,0

Výsledky testů jsou sporné. Rozhodnutí je třeba stanovit buď na základě zkušeností s daným typem rozdělení, nebo na základě grafického výstupu. Proto je použit, na porovnání

rozdělení pravděpodobnosti, Q-Q graf. Tentokrát jen s lognormálním a loglogistickým rozdělením. Na obrázku 8 je Q-Q graf, kde bylo za osu x zvoleno loglogistické rozdělení. Na obrázku 9 je Q-Q graf, kde osu x představuje lognormálním rozdělením.

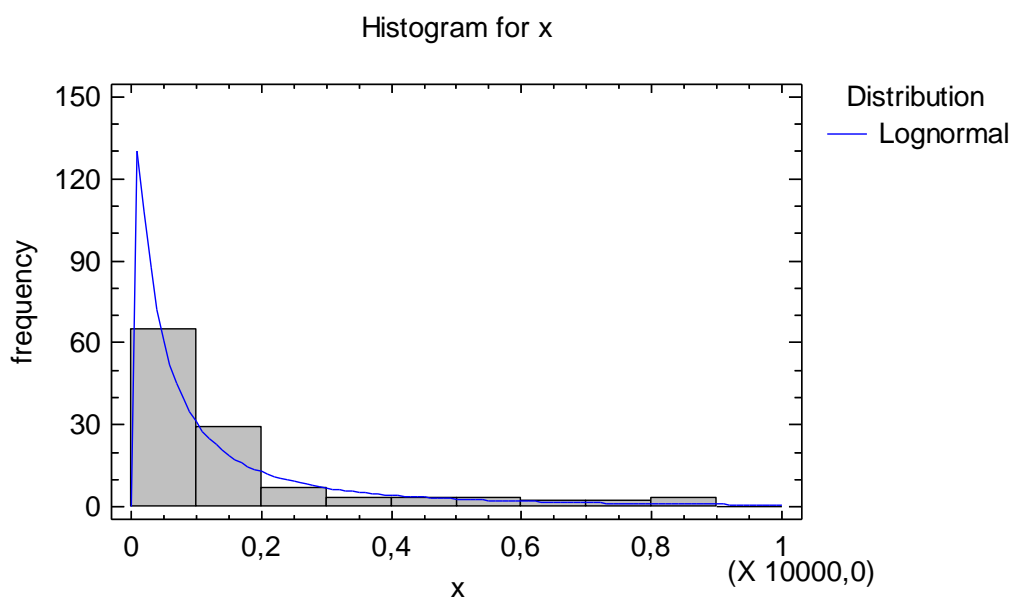


Obrázek 8 – Q-Q graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV



Obrázek 9 – Q-Q graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV

Z obou grafickým výstupů lze vyslovit závěr, že soubor dat lépe modeluje lognormální rozdělení. I na obrázku 10 je vidět, že lognormální rozdělení dobře modeluje daná data.



Obrázek 10 – Histogram výše škod s lognormálním rozdělením, zdroj: Statgraphic

Centurion XV

Z předešlých výpočtů lze pozorovat, že je rozdíl mezi americkým a evropským tvarem Paretova rozdělení pravděpodobnosti. Pokud je při výpočtech použit americký tvar tohoto rozdělení, výsledkem testování je přijetí hypotézy, že data mají Paretovo rozdělení. Pokud je však použit evropský tvar, výsledkem testování je zamítnutí této hypotézy.

Pokud jsou ovšem odstraněny nejmenší škody (zhruba 50 prvních škod), je výsledkem testování, že výšku škod nejlépe modeluje opět Paretovo rozdělení. Což je vidět na obrázku 12, kde jednotlivé body nejvíce přiléhají ke křivce Paretova rozdělení. Potvrzují to i testy dobré shody na obrázku 11, jak u Kolmogorovova-Smirnovova testu tak u Pearsonova χ^2 testu je hodnota P-Value nejvyšší u Paretova rozdělení. To celé potvrzuje již několikrát zmíněnou teorii, že Paretovo rozdělení je skutečně vhodné na modelování vyšších hodnot. To je pro pojišťovnu velice důležité, jelikož v portfoliu škod se vyskytují i extrémní hodnoty, odhadnout jejich pravděpodobnost pomocí vhodného modelu je tedy velmi užitečné.

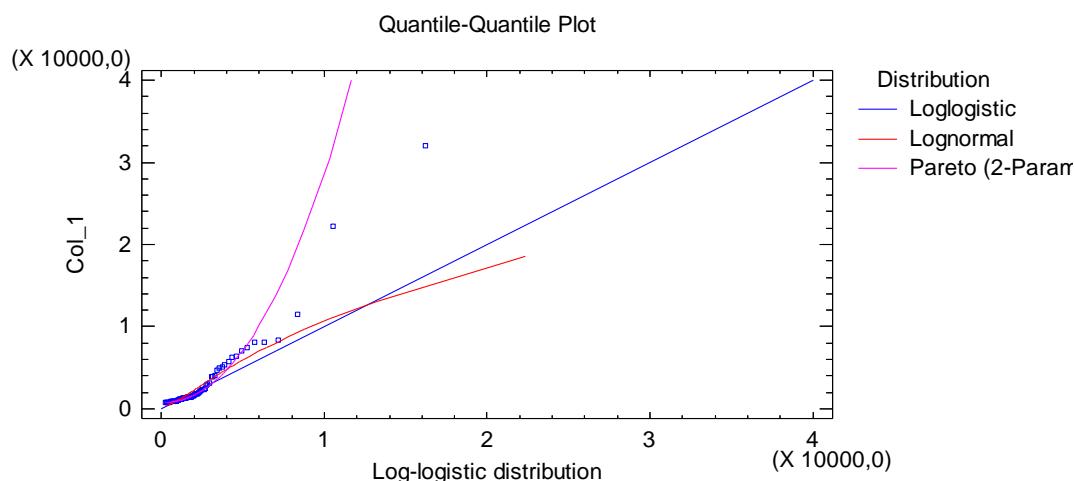
Chi-Squared Test

	<i>Loglogistic</i>	<i>Lognormal</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
Chi-Squared	40,4	51,8007	15,8
D.f.	18	18	18
P-Value	0,00184065	0,0000401443	0,606503

Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Loglogistic</i>	<i>Lognormal</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
DPLUS	0,123426	0,162782	0,0474664
DMINUS	0,131854	0,120622	0,090676
DN	0,131854	0,162782	0,090676
P-Value	0,175434	0,0489697	0,612625

Obrázek 11 – Výsledky testů dobré shody pro různé typy rozdělení, zdroj: Statgraphic Centurion XV



Obrázek 12 – Q-Q graf, porovnání různých typů rozdělení po odstranění nejmenších škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV

Nyní, po tom co bylo zjištěno rozdělení pravděpodobnosti výšky škod, lze zjistit i pravděpodobnosti možných škod v různých intervalech. Pro tyto výpočty bude použito rozdělení, které má celý soubor dat, tedy i menší škody, to znamená Lognormální rozdělení. Program STATGRAPHICS Centurion XV má v nabídce dvě procedury, a to „Tail Areas“ pro určení hodnot distribuční funkce a „Critical Values“ pro určení kvantilů. V tabulce 7 jsou v prvním sloupci uvedeny horní hranice škod (v tis. p.j.), ve druhém slouci jsou hodnoty distribuční funkce a ve třetím sloupci jsou hodnoty k ní opačné, to je $1 - F(x) = P(X > x)$. Například s pravděpodobností 0,818943 budou škody nižší jak 3 mil. p.j.

a s pravděpodobností 0,181057 budou vyšší jak 3 mil. p.j. Pravděpodobnost libovolného intervalu možných škod dostaneme jako rozdíl hodnoty distribuční funkce v horní a dolní hranici. Například pravděpodobnost, že výše škody bude z intervalu od 3 mil. p.j. do 10 mil. p.j. je 0,955886 - 0,818943, tedy 0,136943.

Tabulka 7 – Hodnoty distribuční funkce a hodnoty k ní opačné, zdroj: STATGRAPHIC Centurion XV

<i>X (tis. Kč)</i>	<i>Lower Tail Area (<)</i>	<i>Upper Tail Area (>)</i>
1000,0	0,574292	0,425708
3000,0	0,818943	0,181057
10000,0	0,955886	0,0441142
15000,0	0,975697	0,0243026
20000,0	0,984677	0,0153232

Pro pojišťovnu je stejně užitečná znalost kvantilů rozdělení výše škod. Některé obsahuje výstup v tabulce 8. Například 25% škod nepřesáhne hodnotu 270 456 Kč. Takové informace jsou pro pojišťovnu nutné např. při rozhodování o možných formách spoluúčasti a způsobu zajištění. Znalost rozdělení pravděpodobnosti výše individuálních škod je nutná při modelování výše celkových pojistných plnění pojišťovny za rok, tzv. kolektivního rizika, kde tvoří jednu ze základních složek. Znalost kolektivního modelu rizika je základem ke stanovení pojistného a výše rezerv neživotní pojišťovny.

Tabulka 8 – Kvantily rozdělení výše škod, zdroj: STATGRAPHIC Centurion XV

<i>Lower Tail Area (<=)</i>	<i>Lognormal (škody v tis.Kč)</i>
0,1	107,661
0,25	270,456
0,5	752,609
0,75	2094,32
0,99	25678,9

4 Využití Paretova rozdělení v neproporcionálním zajištění⁶

Zajištění, jednoduše řečeno, je pojištění pojišťovny. Jedná se v podstatě o přenos části rizika, které již bylo pojištěno prvopojistitelem v rámci přímého pojištění, na jiného nositele rizika, který není s pojištěným v žádném smluvním vztahu. Mezi výhody zajištění patří homogenizace pojistného kmene. Díky tomu můžou pojišťovny přebírat i rizika, která by bez zajištění nemohla pojistit. Zajištění má tak velký význam např. při katastrofických škodách, jejichž následky jsou při zajištění pro pojišťovnu ekonomicky přijatelnější a únosnější.

Hlavní důvody pro zajištění:

- homogenizace pojistného kmene,
- pojistitel může přijmout i rizika přesahující jeho možnosti,
- vytvoření ekonomické stability pojistitele,
- snížení pojistného plnění pojistitele,
- přijímání nových rizik,
- ochrana před nahodilými výkyvy,
- získání profesionálních služeb zajistitele.

Zajištění má dvě základní podoby. Jednou z nich je **obligatorní zajištění**, tedy povinné. Obligatorní zajištění se sjednává pro celé portfolio pojistných smluv, sjednává se tzv. rámcová smlouva. Zajistitel nezkoumá každé riziko samostatně a nemá právo odmítnout riziko, pokud spadá do smluveného rozsahu. Druhým typem je **fakultativní zajištění**, kdy si pojistitel určuje, která rizika a jakou jejich část předá do zajištění a zajistitel se rozhoduje, zda daná rizika přijme. Při fakultativním zajištění může pojistitel rozdělit riziko mezi více zajišťoven.

V rámci obligatorního a fakultativního zajištění rozlišujeme dvě formy zajištění a to proporcionální a neproporcionální. Při **proporcionálním zajištění** se pojistná částka, pojistné a pojistné plnění rozděluje mezi prvopojistitele a zajistitele v předem stanoveném poměru, který nezávisí na výši škody. **Neproporcionální zajištění** je podrobněji popsáno v následující podkapitole.

⁶ Kapitola 4 zpracována podle: [10], [11].

4.1 Charakteristika neproporcionální zajištění

Na rozdíl od proporcionálního zajištění je u neproporcionálního zajištění důležitá až skutečná výše škod. Plnění zajistitele je určováno výhradně výší vzniklých škod, které přesahují vlastní vrub nebo-li prioritu prvopojistitele. Zajistitel vyplácí plnění maximálně do výše své vrstvy nebo-li limitu. Prvopojistitel a zajistitel nesdílí vzniklé škody ve sjednaném poměru a často se nemusí jedna strana na škodě vůbec podílet. V neproporcionálním zajištění prvopojistitel může dosáhnout tak větší homogeneity pojistného plnění zůstávající na jeho vlastní vrub při odčerpání mnohem menší části inkasovaného pojistného na zajistné.

Jelikož Paretovo rozdělení dobře modeluje odlehle hodnoty, je neproporcionální zajištění vhodné při tomto typu rozdělení vzhledem na vysokou pravděpodobnost i extrémně vysokých škod.

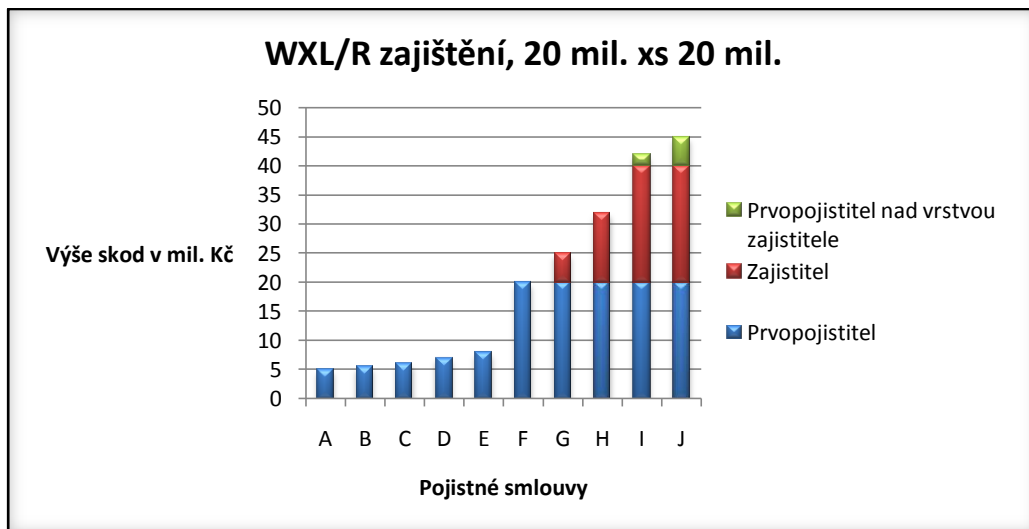
Typy neproporcionálního zajištění:

- **Zajištění XL (zajištění škodního nadměrku)** – pojistitel si určí tzv. prioritu, což je maximální výše pojistného plnění, které bude hradit sám. Zajištění škodního nadměrku se vyskytuje ve dvou podobách:
 - a) *Zajištění škodního nadměrku jednotlivých rizik WXL/R* – uzavírá se pro každou pojistnou smlouvu zvlášť. Jestliže označíme vlastní vrub prvopojistitele jako a ($a > 0$), pak z pojistného plnění X v rámci určité pojistné smlouvy se na zajistitele převádí:

$$X_z = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \leq a \\ X - a & \text{pro } X > a, \end{cases} \quad (4.1)$$

kde X_z je plnění zajistitele. V praxi je někdy používán zápis typu 20 mil. Kč xs 10 mil. Kč, kde 20 mil. Kč je vrstva zajistitele a 10 mil. Kč je priorita prvopojistitele. Schématicky je WXL/R zajištění znázorněno na obrázku 13. Jedná se o typ zajištění s prioritou 20 mil. Kč a vrstvou zajistitele 20 mil. Kč. Priorita a vrstva dávají dohromady kapacitu. Výše škod přesahující tuto kapacitu spadají na prvopojistitele, který jej může přesunout na dalšího zajistitele. Nevýhodou WXL/R zajištění je, že nemusí být dostatečnou ochranou proti kumulaci škod vzniklých v rámci jedné pojistné události, jelikož se na každou zasaženou pojistnou smlouvu přihlíží jako na samostatný případ. Škody jednotlivých

pojistných smluv tak nemusí příliš přesahovat příslušnou prioritu. Tento typ zajištění má tak význam tehdy, pokud si je prvopojistitel sám schopen uhradit menší a střední škody a priorita je stanovena dostatečně vysoko, aby ji překročili jen ty největší škody.

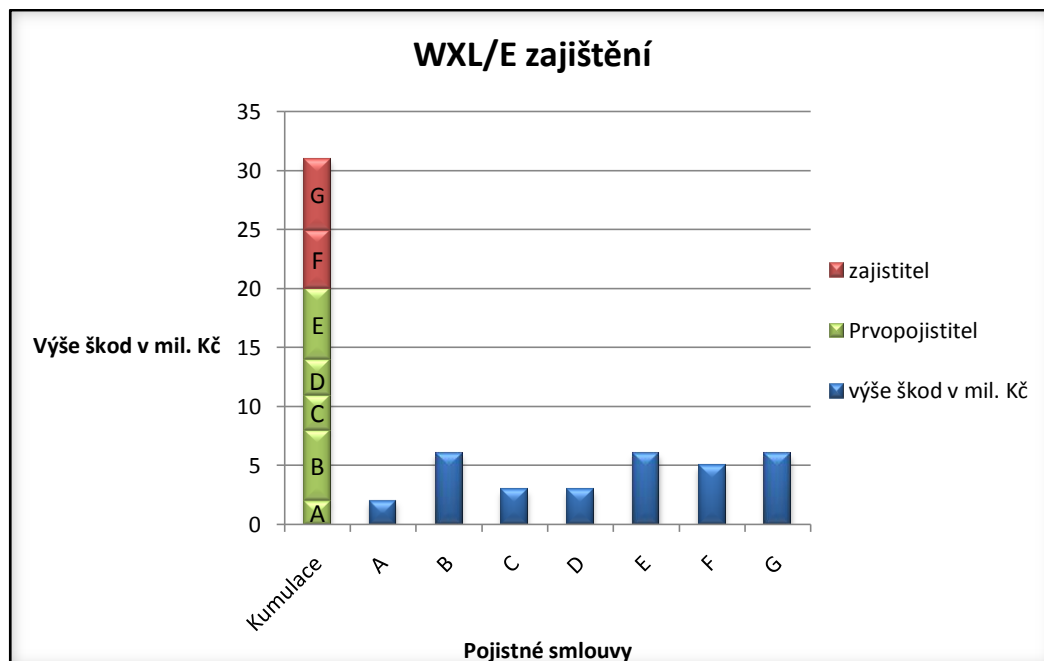


Obrázek 13 - Grafické znázornění WXL/R zajištění, zdroj: autor

b) *Zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí WXL/E* – zajišťuje prvopojistitele proti kumulaci škod, které znikly v důsledku jedné škodní události, ale ještě se nejedná o charakter přírodní katastrofy. Jestliže pojistná plnění z dané škodní události označíme jako X_1, \dots, X_n , pak lze psát:

$$X_Z = \begin{cases} 0 & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i \leq a \\ \sum_{i=1}^n X_i - a & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i < a, \end{cases} \quad (4.2)$$

kde a je opět priorita prvopojistitele a X_Z představuje plnění zajištitele. Schematicky je WXL/E zajištění znázorněno na obrázku 14, kde jde o zajištění s prioritou 20 mil. Kč a zbytek hradí zajištitel až do výše svého limitu. Prvopojistitel neplatí prioritu zvlášť z každé pojistné smlouvy postížené danou škodní událostí, ale jedinou prioritu přes všechny tyto smlouvy dohromady. Pro odlišení WXL/E zajištění od WXL/R zajištění se někdy dává podmínka, že pro jeho aktivaci je nutná expozice jedné škodní události ve více pojistných smlouvách.



Obrázek 14 – Grafické znázornění WXL/E zajištění, zdroj: autor

c) *Zajištění škodního nadměru katastrofické události CatXL* - platí pro něj stejné charakteristiky jako pro WXL/E zajištění, s tím rozdílem, že kumulace škod vzniká v důsledku katastrofické události⁷.

- **Zajištění ročního nadměru SL** – chrání prvopojistitele před důsledky nárůstu velkého počtu škod během jednoho roku. Zajistitel většinou požaduje, aby byl prvopojistitel v daném roce ztárový, to znamená, aby přijaté pojistné nestačilo pokrývat jeho pojistné plnění ani náklady.
- **Zajištění ECOMOR** – zajistitel hradí tu část škod, která přesáhla p -tou nejvyšší škodu.
- **Zajištění LCR** (Largest Claims Reinsurance nebo-li zajištění nejvyšších škod) – zajistitel hradí p největších škod, které nastaly během platnosti zajištění smlouvy. To lze zapsat jako:

$$X_z = X_1 + X_2 + \dots + X_p,$$

kde $X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_p$ jsou škody z daného roku uspořádané podle velikosti.

⁷ Katastrofická událost – podle zajišťovny Swiss Re se katastrofou rozumí událost spojená se škodou minimálně 78 mil. USD nebo pojištěnou škodou 38 mil. USD nebo příčina úmrtí nebo zmizení minimálně 20 lidí, případně ztráta domova pro 2000 lidí.

4.2 Stanovení nettozajistného s využitím Paretova rozdělení

Zajistné neproporcionálního zajištění se skládá se stejných položek, jako jsou položky, které se určují při konstrukci pojistného. Nettozajistné je očekávaná ztráta zajistitele v důsledku zajistného plnění. Jádrem konstrukce zajistného je stanovení nettozajistného, tzv. tarifování. Jednou z metod tarifování je model založený na Paretově rozdělení škod překračujících prioritu. Jako data je k dispozici průměrný počet škod $LF(OP)$ z minulých let, překračující vhodně nastavenou hodnotu OP (observation point), která je mnohem menší než budoucí priorita a . Vzhledem k nízké hodnotě OP je statistický vzorek takových škod bohatší než vzorek škod, které překračují budoucí prioritu a . Výše škody X_a nad prioritou a se modeluje Paretovým rozdělením s pravděpodobnostní hustotou (vyjádřeno evropským způsobem):

$$f_a(x) = \frac{b \times a^b}{x^{b+1}}, x \geq a \quad (4.3)$$

a distribuční funkci:
$$F_a(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, x \geq a. \quad (4.4)$$

Zajistitel bude v roce zajistné smlouvy plnit škody přesahující prioritu a , ale jen do výše limitu L , takže střední výše zajistného plnění EXL bude:

$$\begin{aligned} EXL &= \int_a^{a+L} (x - a) \times f_a(x) dx + \int_{a+L}^{\infty} L \times f_a(x) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{a}{1-b} \times (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ a \times \ln RL & \text{pro } b = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde RL je relativní délka vrstvy vypočítána podle vztahu:

$$RL = \frac{a+L}{a}. \quad (4.6)$$

Pro výpočet celkové výše plnění zajistitele je nutné použít odhad průměrného počtu škod $LF(a)$, které v zajišťovaném portfoliu překročí během roku prioritu a . K tomuto odhadu použijeme hodnotu průměrného počtu škod $LF(OP)$, které překročí hodnotu OP . Pak:

$$\begin{aligned} LF(a) &= LF(OP) \times P(X_{OP} > a) = \\ &= LF(OP) \times \left(1 - F_{OP}(a)\right) = LF(OP) \times \left(\frac{OP}{a}\right)^b. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hledané nettozajistné NP_z je pak rovno:

$$NP_Z = LF(a) \times EXL = \quad (4.8)$$

$$= \begin{cases} LF(OP) \times OP^b \times \frac{a^{1-b}}{1-b} \times (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1, \\ LF(OP) \times OP \times \ln RL & \text{pro } b = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Hodnotu parametru b je možné stanovit dvěma přístupy:

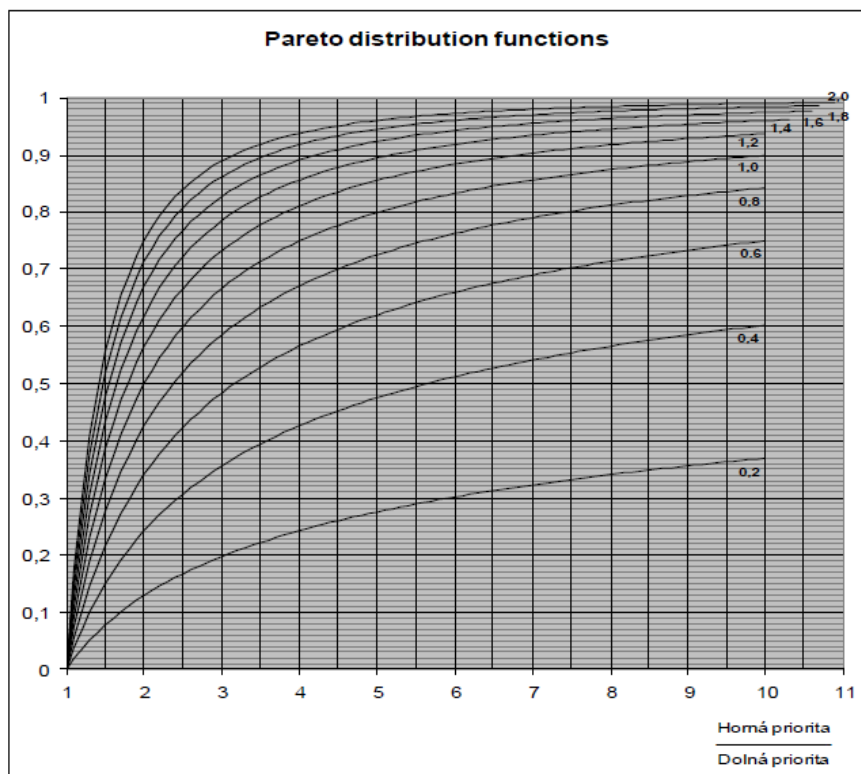
- aplikuje se ad hoc hodnota ověřená praktickými zkušenostmi s podobnými zajišťovacími portfolii. Např. WXL/R zajištění živelných rizik mívá b v rozmezí od 1,0 do 2,5 (speciálně pro pojištění průmyslových rizik kolem 1,2 a pro pojištění majetku obyvatelstva od 1,8 do 2,5), CatXL zajištění mívá b kolem 1,0 (speciálně pro riziko zemětřesení kolem 0,8 a pro riziko vichřic v Evropě 1,3),
- parametr b se určí jako odhad z minulých dat prvopojistitele podle vztahu (4.10). Pokud jsou všechny škody, které v daném roce překročily hodnotu OP , označeny jako $X_{OP,1}, X_{OP,2}, \dots, X_{OP,n}$, pak maximálně věrohodný odhad parametru \hat{b} lze najít jako:

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{X_{OP,i}}{OP}}. \quad (4.10)$$

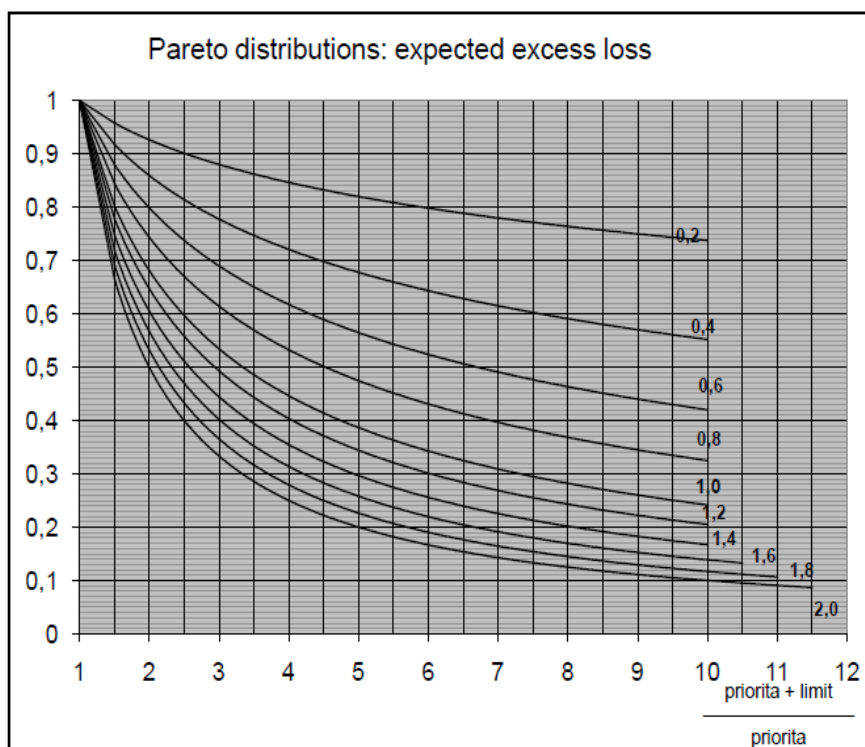
4.2.1 Grafické stanovení nettozajistného při Paretově rozdělení

Nettozajistné lze také stanovit pomocí křivek pro očekávaný škodový nadměrek a distribuční funkci Paretova rozdělení. Křivky jsou konstruovány pro různé hodnoty parametru b , jak lze pozorovat na obrázku 15 a 16. Postup stanovení nettozajistného je pak následující:

- 1) nejprve je vypočítána z poměru horní priority (kterou zde představuje budoucí priorita a) a dolní priority (kterou představuje hodnota OP) hodnota pomocí které je získán průsečík s křivkou pro danou hodnotu parametru b . Tento průsečík je odečten od jedné a vyjde tak pravděpodobnost toho, že škody překročí prioritu a ,
- 2) hodnota z kroku 1 je vynásobena hodnotou $LF(OP)$ a je tak získán odhad $LF(a)$,
- 3) podle vztahu (4.6) je určena hodnota RL a nalezen průsečík této hodnoty s příslušnou křivkou pro parametr b . Hodnota tohoto průsečíku je vynásobena limitem L a je tak získána hodnota EXL , což je očekávaná střední výše zajistného plnění,
- 4) nakonec je vypočítána hodnota nettozajistného podle vztahu (4.8).



Obrázek 15 - Distribuční funkce Paretova rozdělení pravděpodobnosti, zdroj:[10]



Obrázek 16 – Očekávaný škodový nadměrek, zdroj:[10]

4.3 Praktická ukázka stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění pomocí modelu založeného na Paretově rozdělení

K dispozici jsou výše škod z minulého období (v tis. p.j.), které přesahují nastavenou hodnotu OP ve výši 5 000. Úkolem je najít nettozajistné pro příští rok pro zajistné smlouvy s WXL/R zajištěním s parametry $a=20\,000$ a $L=20\,000$. Relativní délka vrstvy RL je rovna 2. Průměrná škodová frekvence $LF(5\,000)=13$. Za pomocí výpočtů z tabulky 9 je odhadnut podle vztahu (4.10) parameter b : $\hat{b} = \frac{13}{7,08} = 1,8$.

Tabulka 9 – Pomocné výpočty pro stanovení parametru b , zdroj: autor

$X_{OP,i}$	$X_{OP,i}/OP$	$\ln X_{OP,i}/OP$
5021	1,00	0,00
5331	1,07	0,06
5771	1,15	0,14
6240,00	1,25	0,22
6385,00	1,28	0,24
7089,00	1,42	0,35
7482,00	1,50	0,40
8059,00	1,61	0,48
8079,00	1,62	0,48
8316,00	1,66	0,51
11453,00	2,29	0,83
22274,00	4,45	1,49
32043,00	6,41	1,86
		7,08

Nettozajistné je možné, jak již bylo zmíněno, stanovit graficky pomocí křivek z obrázků 15 a 16. Nejprve je určen pomocí křivek na obrázku 15 průsečík poměru $\frac{a}{OP} = \frac{20\,000}{5\,000} = 4$ a hodnoty parametru $b = 1,8$. Ten nám dává pravděpodobnost, že škody jsou menší nebo rovny přibližně a . Tedy $P(X_a \leq a) = 0,92$.

Nyní je potřeba získat odhad průměrného počtu škod, které překročí prioritu a :

$$LF(20\ 000) = LF(5\ 000) \times (1 - 0,92) = 13 \times 0,08 = 1,04.$$

Dále je nutné vypočítat střední výši zajistného plnění EXL . K tomu je určen pomocí křivek z obrázku 16 průsečík hodnoty $RL = \frac{a+L}{a} = \frac{2+2}{2} = 2$ a hodnoty parametru $b = 1,8$. Tato hodnota je pak vynásobena limitem L : $EXL = 0,36 \times 20\ 000 = 7\ 200$ tis. p.j.

Zbývá dopočítat nettozajistné podle vztahu (4.8): $NP_Z = 7\ 200 \times 1,04 = 7\ 488$ tis. p.j.

Nettozajistné pro příští rok je **7 488 000 p.j.**

Nyní bude nettozajistné stanoveno na základě přesného výpočtu podle vzorce. Jelikož je parametr b různý od jedné, je použit výpočet podle první rovnice ze vztahu (4.9), tedy: $NP_Z = 13 \times 6\ 243\ 940,6 \times (-0,000299726) \times (-0,4) = 10710,689$ tis. p.j.

Přesná hodnota nettozajistného pro příští rok je **10 710 689 p.j.**

5 Modelování a simulace extrémních škod⁸

Kromě malých a středních škod se bohužel ve společnosti vyskytují i vysoké škody, které mají až katastrofický dopad. Teorie extrémních hodnot se využívá pro posuzování rizik vyplývajících z výskytu vysoce nepravděpodobných událostí. Takové události jsou ve velké míře spojené s přírodními jevy. Patří sem například povodně, zemětřesení, vichřice, sucho, požáry a další. Mohou však být i důsledkem lidské činnosti, například letecká neštěstí, terorismus a podobně. Za posledních deset let je možné připomenout každoroční povodně v Evropě, tsunami v Indonésii a na Srí Lance, tornáda a hurikány v USA, teroristický útok 11. září 2001 v New Yorku, živelné události v Japonsku spojené se zemětřesením, tsunami a jadernou katastrofou v roce 2011.

Statistiky ukazují na rostoucí trend katastrofických událostí a to jak v jejich počtu tak rozsahu vzniklých škod. Katastrofické události tvoří až 80% z celkového pojistného plnění, na druhou stranu jen 20% z počtu pojistných plnění. Tato fakta mají velký vliv na vývoj komerčního pojištění. Na jedné straně znamenají zvyšování objemu vyplácených pojistných událostí, na druhé straně nutí pojišťovny inovovat a přehodnocovat přístupy k hodnocení rizikovosti a pojistitelnosti rizik spojené s konstrukcí jednotlivých produktů, což se samozřejmě nejvíc odráží v cenách pojištění. [13]

5.1 Kvantilový model rozdělení pravděpodobnosti

Pravděpodobnost výskytu extrémních škod v portfoliu neživotních pojistek je velmi malá, avšak jejich výskyt ovlivňuje velikost celkové škody a má na pojišťovnu velký finanční dopad. Proto je pro pojistitele velmi důležitá znalost pravděpodobnostního modelu výšky škod, který dobře modeluje i nejvyšší škody, a pomocí kterého se dá odhadnout pravděpodobnost výskytu extrémních škod.

Na modelování extrémních škod se používají rozdělení s prodlouženým pravým koncem, tedy s koncem, který konverguje k nule pomaleji než konec exponenciálního rozdělení. Jinými slovy to jsou rozdělení, které mají pomalé klesání k ose x . Takové rozdělení se nazývá

⁸ Kapitola 5 zpracována podle: [12].

rozdělení s tzv. těžkým koncem. Tuto vlastnost splňuje např. Weibullovo, lognormální a hlavně také Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

Definice: Náhodná proměnná X má rozdělení s těžkým koncem, jestliže platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} P(X > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) = \infty, \quad \text{pro } \lambda > 0. \quad (5.1)$$

Jedním ze způsobů modelování rozdělení pravděpodobnosti výšky škod a simulace jejich extrémních hodnot je aplikace kvantilových funkcí.

Kvantilová funkce je definována pro každé reálné p , $0 \leq p \leq 1$, tedy pro každou hodnotu pravděpodobnosti p vztahem:

$$Q(p) = x, \text{ přičemž } F(x) = p. \quad (5.2)$$

Pro hodnotu x používáme také označení x_p a nazýváme ji p -kvantilem. Kvantilová funkce $Q(p) = x_p$ je neklesající funkcí p a je definována jako inverzní funkce k distribuční funkci $F(x)$. Derivováním $Q(p)$ podle p získáme kvantilovou funkci hustoty:

$$q(p) = \frac{dQ(p)}{dp}, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (5.3)$$

Rozdělení pravděpodobnosti, které je vyjádřené pomocí kvantilové distribuční funkce nebo kvantilové funkce hustoty, nazýváme kvantilové rozdělení.

5.2 Uspořádání (pořádkové) statistiky

Uspořádaný náhodný výběr označujeme: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(r)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)}$ a příslušné náhodné proměnné označujeme: $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(n)}$ a nazýváme je uspořádanými nebo-li pořádkovými statistikami. Náhodná proměnná $X_{(n)}$ představuje nejvyšší zjištěnou hodnotu v soboru o velikosti n . Úkolem je nalézt její kvantilové rozdělení a vyjádřit ho pomocí známe kvantilové funkce $Q(p)$ náhodné proměnné X .

Označíme-li distribuční funkci proměnné $X_{(n)}$ vztahem $F_{(n)}(x) = p_{(n)}$, potom:

$$F_{(n)}(x) = p_{(n)} = P(X_{(n)} \leq x) \quad (5.4)$$

je také pravděpodobnost, že všechna n pozorování náhodné proměnné X jsou menší nebo rovné hodnotě x . Protože tato pravděpodobnost je pro každou proměnnou rovna právě p , podle pravidla o násobení pravděpodobností platí:

$$p_{(n)} = p^n, \text{ tedy } p = p_{(n)}^{1/n} \text{ a } F(x) = p = p_{(n)}^{1/n}. \quad (5.5)$$

Vyjádřením x jako inverzní funkce k $F(x)$ i k $F_{(n)}(x)$ je získán vztah:

$$Q_{(n)}(p_{(n)}) = Q(p_{(n)}^{1/n}). \quad (5.6)$$

Dále je definován výpočet kvantilové funkce pro libovolnou r -tou uspořádanou statistiku $X_{(r)}$. Pravděpodobnost, že r -té pozorování je menší nebo rovno reálné hodnotě z , tedy $P(X_{(r)} \leq z)$, je distribuční funkce proměnné $X_{(r)}$, tedy:

$$p_{(r)} = F_{(r)}(z), \quad (5.7)$$

což je i pravděpodobnost toho, že r nezávislých pozorování je menších nebo rovných hodnotě z . Pravděpodobnost toho, že právě s pozorování je menších nebo rovných z , vyjadřuje binomická formule, kde $p = F(z)$:

$$P(s \leq z) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)}. \quad (5.8)$$

Potom platí:

$$p_{(r)} = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)}. \quad (5.9)$$

Tato funkce je neúplná beta funkce a označuje se jako:

$$p_{(r)} = I(p, r, n-r+1). \quad (5.10)$$

Jestliže k ní existuje inverzní funkce, potom můžeme napsat:

$$p = BETAINV(p_{(r)}, r, n-r+1). \quad (5.11)$$

Ze vztahů (5.10) a (5.11) je získáno pravidlo rozdělení uspořádaných statistik:

$$Q_{(r)}(p_{(r)}) = Q(BETAINV(p_{(r)}, r, n-r+1)). \quad (5.12)$$

5.3 Simulace extrémních hodnot

Prvním krokem simulace je generování náhodných čísel. To umožňují všechny statistické programy a tabulkové procesory. Základní náhodná čísla jsou z intervalu (0,1) a reprezentují náhodné pozorování ze spojitého rovnoměrného rozdělení na tomto intervalu. Kvantilová funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu hodnot (0,1) má vyjádření:

$$S(p) = p, \quad \text{pro } 0 \leq p \leq 1. \quad (5.13)$$

Pomocí generátoru náhodných čísel je možné vygenerovat nezávislé hodnoty u_1, u_2, \dots, u_n z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Simulace je pak použití těchto náhodných čísel v jakémkoli pravděpodobnostním modelu.

Základem simulace je pravidlo Q-transformace: pokud je $z = T(x)$ neklesající funkcí x a $Q(p)$ je kvantilová funkce, potom i $T(Q(p))$ je kvantilová funkce. Pokud je neklesající funkcí $T(x)$ kvantilová funkce $Q(p)$ libovolného rozdělení, aplikací pravidla Q-transformace pro případ kvantilové funkce rovnoměrného rozdělení $S(p) = p$ je možné simulovat hodnoty x z rozdělení s kvantilovou funkcí $Q(p)$ jako:

$$x_i = Q(u_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.14)$$

kde u_1, u_2, \dots, u_n jsou simulované hodnoty z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$. Dosazením u_i do kvantilové funkce $x = Q(u)$ jsou získány uspořádané hodnoty $x_{(i)}$, což zaručuje neklesající tvar funkce $Q(u)$. Kvantilová funkce tedy poskytuje jednoduchý způsob simulace hodnot takového rozdělení, pro které je explicitní funkcí p a umožňuje simulovat jen nejvyšší hodnoty bez toho, aby bylo nutné simulovat centrální hodnoty náhodné proměnné.

Je předpokládán pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. Rozdělení pravděpodobnosti nejvyšší pozorované hodnoty může být vyjádřen ve tvaru $Q(p^{1/n})$. Tedy nejvyšší pozorovaná hodnota může být simulována jako $x_{(n)} = Q(u_{(n)})$, kde $u_{(n)} = v_n^{1/n}$, přičemž v_n je náhodné číslo z intervalu $(0,1)$. Pokud je definovaná posloupnost transformovaných proměnných ve tvaru:

$$\begin{aligned} u_{(n)} &= v_n^{1/n} \\ u_{(n-1)} &= (v_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \times u_{(n)} \\ u_{(n-2)} &= (v_{n-2})^{\frac{1}{n-2}} \times u_{(n-1)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.15)$$

přičemž v_i , pro $i = n, n-1, n-2, \dots$, je množina hodnot vygenerovaných jako náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení, potom podle jejich definice tvoří hodnoty $u_{(i)}$, pro $i = n, n-1, n-2, \dots$, rostoucí posloupnost, nebo-li $u_{(i-1)} < u_{(i)}$.

Hodnoty $u_{(i)}$ tvoří uspořádanou posloupnost hodnot z rovnoměrného rozdělení. Pokud je získána jedna hodnota $u_{(n)}$, vztah pro simulaci má jednotnou formu:

$$u_{(m)} = (v_m)^{\frac{1}{m}} \times u_{(m+1)}, \text{ pro } m = n-1, n-2, \dots, \quad (5.16)$$

Pořádkové statistiky pro nejvyšší pozorování proměnné X jsou potom simulované jako:

$$\begin{aligned} X_{(n)} &= Q(u_{(n)}) \\ X_{(n-1)} &= Q(u_{(n-1)}) \\ X_{(n-2)} &= Q(u_{(n-2)}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.4 Praktická ukázka simulace extrémních Paretova rozdělení

V předchozích částech bylo pomocí testů dobré shody zjištěno, že předkládaná data, týkající se výšky 120 škod v rámci pojištění majetku, mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti (v americkém tvaru). Pomocí metody maximální věrohodnosti byly určeny parametry tohoto rozdělení: $\hat{\alpha} = 1,879$ a $\hat{\lambda} = 1868,44$. Cílem je simulovat 10 nejvyšších hodnot z 1000 pojistných plnění, tzn. pokud by místo 120 škod nastalo 1000 škod.

Kvantilová funkce Paretova rozdělení je vyjádřena jako inverzní funkce k distribuční funkci:

$$x_p = Q(p) = \lambda \times (1 - p)^{-1/\alpha} - \lambda. \quad (5.18)$$

Pomocí programu Statgraphic Centurion XV bylo regenerováno deset náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení na intervalu (0,1). Výpočty byly provedeny, podle vztahů (5.15) až (5.17), v programu Microsoft Excel. Postup a výsledek simulace deseti nejvyšších hodnot z 1000 pojistných plnění obsahuje tabulka 10 a tabulka 11. Na obrázku 17 jsou znázorněny simulované extrémní škody $x = Q(u)$ a pro každou pořádkovou statistiku $X_{(1000)}, X_{(999)}, \dots, X_{(991)}$ je zobrazen i medián $x_{0,5}$ a kvantily $x_{0,995}$ a $x_{0,005}$, které ohraničují interval, z kterého jsou hodnoty příslušné pořádkové statistiky s pravděpodobností 0,99. Tyto kvantily a medián obsahuje také tabulka 8.

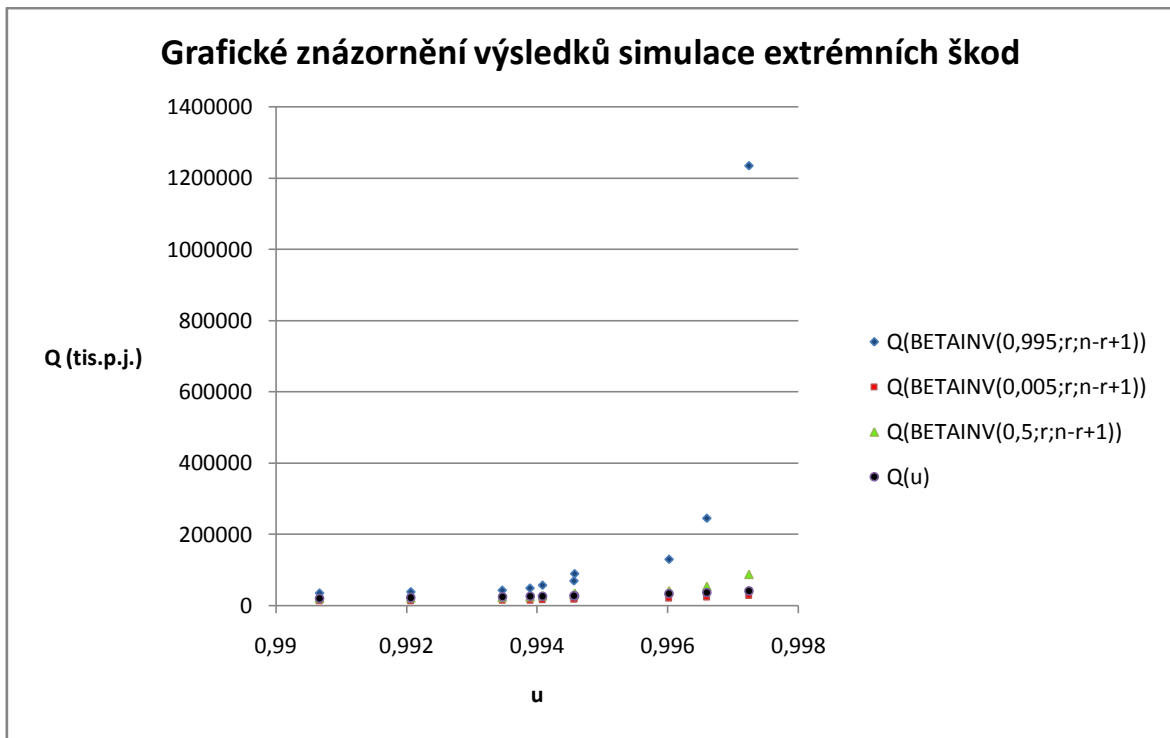
Ze zmíněných tabulek a grafu je možné například zjistit, že nejvyšší škoda bude s pravděpodobností 0,99 v intervalu od 28562,98705 tis. p.j. do 1234524,516 tis. p.j. a medián nejvyšší škody bude 87853,01116 tis. p.j.

Tabulka 10 - Simulace deseti nejvyšších hodnot pomocí kvantilové funkce, zdroj: autor

v	n	$1/n$	$v^{1/n}$	u	$Q(u)$
0,063074	1000	0,008	0,977234	0,977234	12119,319
0,524039	999	0,008	0,994585	0,971942	10646,752
0,560408	998	0,008	0,995104	0,967184	9645,674
0,234846	997	0,009	0,987693	0,955281	7897,154
0,989328	996	0,009	0,999908	0,955193	7886,900
0,617832	995	0,009	0,995821	0,951202	7453,783
0,825362	994	0,009	0,998318	0,949601	7295,075
0,65422	993	0,009	0,996252	0,946042	6968,266
0,246734	992	0,009	0,987583	0,934295	6088,803
0,2472	991	0,009	0,987488	0,922605	5424,727

Tabulka 11 - Medián $x_{0,5}$ a kvantily $x_{0,995}$ a $x_{0,005}$ pořádkových statistik (v tis. p.j.), zdroj: autor

Q(BETAINV(0,5;r;n-r+1))	Q(BETAINV(0,995;r;n-r+1))	Q(BETAINV(0,005;r;n-r+1))
87853,01116	1234524,516	28562,98705
54171,39332	244887,486	23558,59719
41867,27429	129568,515	20734,26462
35074,42249	89256,082	18797,78507
30634,24103	68994,786	17343,79761
27447,94755	56794,535	16191,74297
25021,26529	48615,838	15245,33843
23095,16214	42729,971	14447,44669
21519,20436	38276,430	13761,34189
20199,34259	34778,184	13162,10126



Obrázek 17 – Grafické znázornění výsledků simulace extrémních škod, zdroj: autor

Simulace extrémních hodnot má využití například v zajištění nejvyšších škod LCR, při kterém se zajišťuje p nejvyšších škod, nebo v zajištění ECOMOR, při kterém zajišťitel hradí škody, které přesáhly p -tou nejvyšší škodu.

Závěr

V diplomové práci jsou uvedena základní teoretická východiska pravděpodobnostního modelování výše individuálních škod. Jsou zde uvedeny definice a základní vlastnosti Paretova rozdělení, které je známe především tím, že pomalu konverguje k nule, a díky tomu dobře aproximuje odlehlé, resp. extrémní hodnoty.

V souladu s cíli uvedenými v úvodu je práce soustředěna, kromě teoretického popisu jednotlivých problematik, na ukázky praktické aplikace teorie týkající se pravděpodobnostního modelování výše škod jak v pojištění tak v zajištění, s využitím programů Microsoft Excel a STATGRAPHICS Centurion XV. Pro praktické ukázky byly použity data týkající se 120 škod v rámci pojištění majetku, převzaté ze zdroje [1].

Celá práce je zaměřena na Paretovo rozdělení pravděpodobnosti. Pravděpodobnost pravého konce Paretova rozdělení konverguje k nule pomaleji pro vysoké hodnoty, než je tomu u jiných rozdělení. Z toho důvodu je možné odhadnout pomocí Paretova modelu pravděpodobnost velmi vysokých pojistných plnění, jejíž znalost je pro pojišťovnu mimořádně důležitá.

V práci jsou provedeny odhady parametrů Paretova rozdělení pomocí metody momentů a metody maximální věrohodnosti. Jelikož je metoda maximální věrohodnosti přesnější a spolehlivější, její výsledky jsou dále použity při testování shody teoretického a empirického rozdělení pomocí testů dobré shody. Toto testování bylo provedeno pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu a Pearsonova χ^2 testu. Pokud byl použit americký tvar Paretova rozdělení (výpočty byly provedeny v programu Microsoft Excel) oba testy se potvrdily přijetí hypotézy, že data mají Paretovo rozdělení. Pokud byl však použit evropský tvar rozdělení (výpočty byly provedeny v programu STATGRAPHIC Centurion XV), oba testy se shodovaly na zamítnutí téže hypotézy. Tento rozdíl je způsoben odlišnými tvary amerického a evropského typu Paretova rozdělení. Pokud však bylo vynecháno z testování prvních 50 nejmenších škod, byla přijata i hypotéza, že škody mají evropský tvar Paretova rozdělení. Z toho lze vytvořit závěr, že Paretovo rozdělení v evropském tvaru, je skutečně nejvhodnější na modelování vysokých škod. Menší škody lze dobře modelovat i jinými typy rozdělení, např. lognormálním. Dále byly zjištěny pravděpodobnosti libovolných intervalů možných škod a byly určeny kvantily škod.

Pojišťovny velmi často využívají služeb zajišťoven pro krytí vysokých škod. I v této oblasti má Paretovo rozdělení využití a to pro výpočet nettozajistného při neproporcionálním

zajištění. Po teoretickém výkladu této problematiky bylo vypočítáno nettozajistné pomocí Paretova modelu rozdělení pravděpodobnosti.

Jak již bylo několikrát zmíněno, Paretovo rozdělení dobře modeluje interval nejvyšších škod. Proto je poslední část zaměřena na modelování a simulaci extrémních škod. Jelikož bylo zjištěno, že výška škod má Paretovo rozdělení, použila se v této části kvantilová funkce právě tohoto rozdělení. Pomocí simulace lze například zjistit hranice intervalů, z kterých jsou nejvyšší škody s vysokou pravděpodobností, např. 0,99, nebo medián několika nejvyšších škod. To má velké využití např. v zajištění ECOMOR nebo LCR (zajištění nejvyšších škod).

Obsah předkládané diplomové práce je v souladu se stanovenými cíli a poskytuje teoretické a praktické poznatky z dané problematiky. Posouzení rizik pojišťovny je náročný a rozsáhlý problém. Modelování počtu a výšky individuálních škod je jejich základem. Znalost rozdělení individuálních výšek škod je potřebná při kolektivním modelu rizika, při zajištění, simulaci škod, stanovení pojistně – technických rezerv apod.

Práce je především názornou ukázkou praktické aplikace teoretických poznatků týkající se modelování výšky škod pomocí Paretova rozdělení za pomoci tabulkového procesoru Microsoft Excel a statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV.

6 Seznam použité literatury

- [1] BOLAND, P. J.: *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. London: Chapman&Hall/CRC, 2007. ISBN 1-58488-695-1
- [2] PACÁKOVÁ, V.: *Aplikovaná poistná štatistika - 3. prepracované a doplnené vydanie*. Bratislava: IURA EDITION, 2004. ISBN 80-8078-004-8
- [3] KUBANOVÁ, J. *Statistické metódy pre ekonomickú a technickú praxi*. 2. vyd. STATIS Bratislava, 2004. 249 s. ISBN 80-85659-37-9.
- [4] BOOTH, P. – CHADBURN, R. – COOPER, D. – HABERMAN, S. – JAMES, D.: *Modern Actuarial Theory and Practice*. Chapman&Hall/CRC, 1999. ISBN 1-4020-2952-7
- [5] CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha : Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633.
- [6] CIPRA, T. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2. aktualiz. vyd. Praha : Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.
- [7] TSE Y.-K.: *Nonlife Actuarial Models*. Cambridge: University Press, 2009. ISBN 978-0-521-76465-0
- [8] DUCHÁČKOVÁ, E. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. aktualiz. vyd. Praha : Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.
- [9] Manuál k programu Statgraphic Centurion XV: Distribution Fitting (Uncensored Data): StatPoint, Inc., 2006. s. 25.
- [10] Pacáková, V.: *Využitie Paretoho rozdelenia v neproporcionálnom zaistení*. Forum Statisticum Slovaca 7/2009. Bratislava 2009. ISSN 1336-7420 s. 121 – 125.
- [11] CIPRA, T.: *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. Praha: GRADA Publishing, 2004. ISBN 80-247-0838-8
- [12] Pacáková, V., Linda, B.: *Simulations of Extreme Losses in Non-Life Insurance*. E+M Ekonomie a management, 4/2009, ročník: XII, s. 97- 102. ISSN 1212-3609.
- [13] Ducháčková, E.: *Katastrofy v roce 2003 a komerční pojištění*. Pojistný obzor 10/2004.

7 Seznam obrázků

Obrázek 1 - Pravděpodobnost intervalu hodnot spojité proměnné, zdroj: [2]	11
Obrázek 2 - Vzájemný vztah hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce, zdroj: [2]	11
Obrázek 3 - Bodový graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV	34
Obrázek 4 - Krabicový graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV	34
Obrázek 5 – Hustota pravděpodobnosti výšky škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV	35
Obrázek 6 – Histogram výšky škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV	35
Obrázek 7 – Q-Q graf pro různé typy rozdělení, zdroj: Statgraphic Centurion XV	36
Obrázek 8 – Q-Q graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV	38
Obrázek 9 – Q-Q graf, zdroj: Statgraphic Centurion XV	38
Obrázek 10 – Histogram výše škod s lognormálním rozdělením, zdroj: Statgraphic Centurion XV	39
Obrázek 11 – Výsledky testů dobré shody pro různé typy rozdělení, zdroj: Statgraphic Centurion XV	40
Obrázek 12 – Q-Q graf, porovnání různých typů rozdělení po odstranění nejmenších škod, zdroj: Statgraphic Centurion XV	40
Obrázek 13 - Grafické znázornění WXL/R zajištění, zdroj: autor	44
Obrázek 14 – Grafické znázornění WXL/E zajištění, zdroj: autor	45
Obrázek 15 - Distribuční funkce Paretova rozdělení pravděpodobnosti, zdroj:[10]	48
Obrázek 16 – Očekávaný škodový nadměrek, zdroj:[10]	48
Obrázek 17 – Grafické znázornění výsledků simulace extrémních škod, zdroj: autor	57

8 Seznam tabulek

Tabulka 1 – Individuální výšky škod pojištění domácnosti v tis. p.j., zdroj: [1].....	12
Tabulka 2 – Ukázka maximálně věrohodných odhadů parametrů Paretova rozdělení, zdroj: autor	29
Tabulka 3 - Postup ověřování hypotézy pomocí Pearsonova χ^2 testu, zdroj: autor	30
Tabulka 4 - Ukázka ověřování hypotézy pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu, zdroj: autor	31
Tabulka 5 - Základní charakteristiky výše škod v tis. p.j., zdroj: Statgraphic Centurion XV	32
Tabulka 6 – Porovnání rozdělení pravděpodobnosti výše škod pomocí velikosti P-Value, zdroj: autor (upraveno na základě výstupu ze STATGRAPHIC Centurion XV).....	37
Tabulka 7 – Hodnoty distribuční funkce a hodnoty k ní opačné, zdroj: STATGRAPHIC Centurion XV ...	41
Tabulka 8 – Kvantily rozdělení výše škod, zdroj: STATGRAPHIC Centurion XV	41
Tabulka 9 – Pomocné výpočty pro stanovení parametru b , zdroj: autor	49
Tabulka 10 - Simulace deseti nejvyšších hodnot pomocí kvantilové funkce, zdroj: autor.....	56
Tabulka 11 - Medián $x_{0,5}$ a kvantily $x_{0,995}$ a $x_{0,005}$ pořádkových statistik (v tis. p.j.), zdroj: autor	56