

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Metody stanovení technických rezerv neživotní
pojišťovny

Bc. Lucie Špačková

DIPLOMOVÁ PRÁCE
2009

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Lucie ŠPAČKOVÁ**

Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**

Studijní obor: **Pojistné inženýrství**

Název tématu: **Metody stanovení technických rezerv neživotní pojišťovny**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Význam technických rezerv pro neživotní pojišťovnu.

Druhy pojistně technických rezerv.

Rezervy na pojistná plnění a metody jejich výpočtu.

Stochastické modelování technických rezerv.

Ukázky aplikace metod stanovení technických rezerv.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Booth, P. – Chadburn, R. – Cooper, D. – Haberman, S. – James, D.:
Modern Actuarial Theory and Practice. Chapman&Hall/CRC, 1999.

Cípra, T.: Pojistná matematika – teorie a praxe. Praha: Ekopress, 2006.

Cípra, T.: Finanční a pojistné vzorce. Praha: GRADA Publishing, 2006.

Ducháčková, E.: Principy pojištění a pojišťovnictví. Praha: Ekopress,
2005.

Majtánová, A. – Daňhel, J. – Ducháčková, E. – Kafková, E.: Pojišťovnictví
– teorie a praxe. Praha: Ekopress, 2006.

Pacáková, V.: Aplikovaná poistná statistika. Bratislava: Iura Edition,
2004.

Sekerka, B.: Matematické a statistické metody ve financování, cenných
papírech a pojištění. Profess Consulting, Praha, 2002.

Vedoucí diplomové práce:

prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.
Ústav ekonomie

Datum zadání diplomové práce:

6. října 2008

Termín odevzdání diplomové práce:

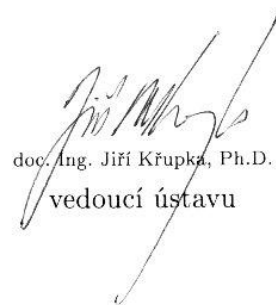
1. května 2009



doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.



doc. Ing. Jiří Krupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 6. října 2008

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 27. 4. 2009

Lucie Špačková

Ráda bych poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za její odborné vedení, cenné připomínky, vstřícnost a čas strávený na konzultacích.

ANOTACE

Tato diplomová práce se zabývá metodami pro výpočet technických rezerv neživotní pojišťovny. Je zaměřena na rezervu na pojistná plnění, která je nejdůležitější rezervou neživotní pojišťovny. Tato rezerva je zde blíže popsána a následně jsou uvedeny metody výpočtu výše těchto technických rezerv.

KLÍČOVÁ SLOVA

Technické rezervy, rezerva na pojistná plnění, řetězová žebříková metoda, Separační metoda, metoda Cape Cod, Bornhuetterova-Fergusonova metoda

TITLE

The methods of determination of technical reserves of a non-life insurance company

ANNOTATION

The thesis deals with calculating technical reserves of non-life insurance companies. The first chapter is about non-life insurance, technical and about the implications of technical reserves for insurance companies. The thesis describes in detail the reserve of insurance benefit, which is the most important reserve for non-life insurance companies. Also listed are the different ways of counting of amounts of these technical reserves.

KEYWORDS

Technical reserves, reserves of insurance benefit, Chain-Ladder method, Separation method, Cape Cod method, Bornhuetterova-Fergusonova method

OBSAH

Úvod	9
1 Význam technických rezerv pro neživotní pojišťovnu	10
1.1 Základní pojmy	10
1.2 Neživotní pojištění a pojišťovny	11
1.3 Technické rezervy.....	13
1.4 Daňové aspekty technických rezerv v pojišťovnictví.....	14
2 Druhy pojistně technických rezerv	16
2.1 Členění pojistně technických rezerv	16
2.2 Jednotlivé druhy pojistně technických rezerv.....	17
2.2.1 Rezerva na nezasloužené pojistné	18
2.2.2 Rezerva na pojistná plnění	19
2.2.3 Rezerva na pojistné prémie a slevy.....	20
2.2.4 Vyrovnávací rezerva	20
2.2.5 Rezerva pojistného neživotních pojištění	21
2.3 Zásady investování pojistně technických rezerv	21
2.4 Technické rezervy a Solvency II.....	24
3 Rezervy na pojistná plnění a metody jejich výpočtu.....	26
3.1 Trojúhelníkové metody - obecně	27
3.2 Řetězová žebříková metoda.....	29
3.2.1 Charakteristika a postup	29
3.2.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv.....	31
3.3 Řetězová žebříková metoda s inflačním vyrovnáním.....	34
3.3.1 Charakteristika a postup	34
3.3.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv.....	35
3.4 Separační metoda	38
3.4.1 Charakteristika a postup	38
3.4.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv.....	41
3.5 Metoda Cape Cod.....	45
3.5.1 Charakteristika a postup	45
3.5.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv.....	46
3.6 Bornhuetterova-Fergusonova metoda	48
3.6.1 Charakteristika a postup	48
3.6.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv.....	48

3.7	Porovnání metod.....	50
4	Stochastické modelování technických rezerv	52
4.1	Bootstrap technika.....	52
4.2	Různé postupy bootstrap procesu	55
	Závěr.....	57
	Seznam literatury.....	59
	Seznam obrázků	61
	Seznam tabulek.....	62
	Seznam grafů.....	62
	Seznam příloh.....	62

ÚVOD

Pojišťovnictví má dlouhodobou historii, neustále se vyvíjí a zdokonaluje. Tak tomu je i u určení výše pojistně technických rezerv, jejichž metody stanovení se také stále zlepšují a vyvíjí. Jejich výpočty jsou založeny na matematicko-statistických metodách, které mají důležité uplatnění v pojišťovnictví, jak v zájmu spokojenosti klientů, tak i vzhledem k dobrému prosperování pojišťovny.

Před pár desítkami let portfolio neživotního pojištění bylo financováno prostřednictvím průběžného systému placení. Všechny škody v určitém období byly vyplaceny z přijatého pojistného téhož roku, bez ohledu na rok, ve kterém na ně vznikl nárok. Finanční rovnováha portfolia byla realizována tím, že pojišťovny zajistily rovnováhu inkasovaného pojistného a škod v konkrétním rozpočtovém roce. Technické zisky a ztráty vznikly v rozdílech mezi přijatým pojistným za rok a vyplácením plnění během roku [14].

Pojistná plnění, která pocházejí z určitého roku, často nemohou být vyplaceny v tomto roce. Například dlouhé soudní řízení, jaké je vedeno u pojištění odpovědnosti, mohou zapříčinit zpoždění, protože není možné posoudit přesnou výši škody. Dále může být škoda zjištěna až později, nebo musí být vyplaceno více plateb, než mělo být. Všechny tyto faktory povedou ke zpoždění skutečného zaplacení škody. Škody, které již vznikly, ale nejsou dostatečně známé, jsou předvídatelné v tom smyslu, že víme, že tyto platby budou muset být provedeny, ale nevíme, kolik bude celková platba. Také v případě, že pojistné zaplacené za škody v určitém roce a škody nejsou dosud nahlášený pojistiteli. Vznikají ztráty, které musí být uhrazeny v budoucích letech [14].

Cílem práce je teoreticky popsat a vysvětlit matematicko-statistické metody pro určení výše pojistně technických rezerv a vytvořit ukázkové příklady aplikace těchto metod v tabulkovém procesoru MS Excel. Pro názornost je snaha připravit tyto příklady v grafické podobě se slovním popisem, jak postupovat při výpočtu odhadu výše pojistně technických rezerv.

1 VÝZNAM TECHNICKÝCH REZERV PRO NEŽIVOTNÍ POJIŠŤOVNU

Technické rezervy představují pasiva společnosti. Jsou zřízeny k tomu, aby umožnili společnosti vyrovnávat a spravovat smluvní závazky pojistníkům. Specifické rezervy jsou nezbytné pro splnění náhrady škody nebo jiné kompenzační platby pojistníkům plus související administrativní náklady. Navíc, rezervy náhodné povahy by mohli být řešeny (např. vyrovnání škody, katastrofická rezerva) ve smyslu poskytnout ochranu proti nepříznivému vývoji škod a čistému vzniku profitu. Zdánlivá rentabilita a solventnost podniku je silně závislá na výši rezerv. Většina z klíčových statistických analýz, které používají pojišťovny, jsou nějakým způsobem závislé na výši minimálních rezerv. Rezervy jsou základním prvkem řízení podniku [1].

Pro lepší pochopení práce, jsou zde uvedeny základní pojmy.

1.1 Základní pojmy

Pojistné riziko

Pojistné riziko je souhrn rizik, které jsou kryté určitým druhem pojištění tak, jak je převzala pojišťovna. Pojistné právo vždy podrobně vymezuje pojem pojistné riziko a uvádí místní vymezení a časovou platnost pojištění [11].

Pojištění

Přenesení rizika, jde o rozdělení rizika mezi více účastníků a krytí rizik nezávisí na nasporených prostředcích jednotlivého účastníka, tzn., pojišťovna vytvoří rezervy na krytí rizik prostřednictvím zaplaceného pojistného od jednotlivých zúčastněných [11].

Životní pojištění

Zaměřuje se na riziko dožití nebo úmrtí, případně na kombinaci obou rizik. Je to samostatné pojistné odvětví, kde se vytváří rezerva na výplatu pojistné částky pro případ dožití nebo úmrtí pojištěného, proto životní pojištění můžeme nazývat tzv. **rezervotvorným pojištěním**. Pojistná částka se vyplácí buď jednorázově, nebo prostřednictvím pravidelného důchodu [5].

Neživotní pojištění

Obsahuje všechna další pojištění, která nepatří do životního pojištění. Typickým rysem tohoto odvětví je nejistota, kdy, v jakém rozsahu a zda vůbec daná událost nastane.

Patří sem pojištění majetku, odpovědnosti za škodu, pojištění úrazu a zdravotní pojištění. Pojistné plnění se vyplácí na základě přímého projevu rizika na pojistné události, proto můžeme toto pojištění nazývat **pojištěním rizikovým** [5].

Pojistník

Je osoba, která s pojišťovnou uzavře pojistnou smlouvu a v ní se zavazuje platit pojistné za pojistnou ochranu [11].

Pojištěný

Osoba, na jejíž život, zdraví, majetek či odpovědnost za škody se pojištění vztahuje. Dále vzniká pojištěnému právo na pojistná plnění bez ohledu na to, zda pojištění sjednal sám nebo pojistník [11].

Tuzemská pojišťovna

Je právnická osoba, které bylo Českou národní bankou uděleno povolení k provozování pojišťovací činnosti podle zákona č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví. Sídlo právnické osoby je na území České republiky [26].

Solventnost

Schopnost dostát svým závazkům v příslušném čase, tzn. pojišťovna má na krytí všech potřeb a závazků dostatek vlastních disponibilních finančních zdrojů např. (z pojišťovací a zajišťovací činnosti). Hodnotí se okamžitá likvidita, která je reprezentovaná především objemem disponibilních pojistných rezerv a testem solventnosti [26], [5].

Likvidace pojistné události

Zahrnuje činnosti spojené s vyřizováním pojistné události. Začíná zahájením šetření nutného ke zjištění povinnosti pojišťovny plnit a rozsahu této povinnosti a končí stanovením výše pojistného plnění.

Zabezpečuje poskytnutí konečného efektu z pojištění, a to pojistného plnění za vzniklou pojistnou událost [26].

1.2 Neživotní pojištění a pojišťovny

Neživotní pojištění je velice různorodé a kryje celou řadu rizik neživotního charakteru. Pojištění vznikají na základě existence rizik souvisejících s každodenními životními potřebami, jako i se samotným rozhodnutím pojištěného, která rizika chce mít pojištěním

krytá. Jsou kryta rizika ohrožující zdraví a životy osob, rizika vyvolávající přímé věcné škody, rizika vyvolávající finanční ztráty. Neživotní pojištění se obvykle definuje jako pojištění majetku a zodpovědnosti za škody. V širším pojmu zahrnuje i pojištění osob, které není zahrnuté v životním pojištění anebo v nemocenském pojištění (úrazové, soukromé zdravotní a nemocenské pojištění) [11], [12], [15].

Všeobecným důvodem zahrnutí zmiňovaného pojištění osob do neživotního pojištění je administrativní podobnost s neživotním pojištěním zejména v tom, že [12]:

- pojistná událost v pojistném období může vzniknout i víckrát anebo ani jednou,
- pojistné plnění souvisí s rozsahem škody, resp. s dobou trvání následků pojistné události,
- pojistné smlouvy se uzavírají nejčastěji na kratší dobu.

V rámci neživotních pojištění se uplatňují následující oblasti pojištění:

- neživotní pojištění osob (úrazové pojištění, nemocenské pojištění),
- pojištění majetková,
- pojištění odpovědnostní,
- pojištění právní ochrany,
- cestovní pojištění.

Jednotlivé druhy pojistných produktů jsou v současné době vzájemně kombinovány s cílem komplexní nabídky pojistné ochrany [11].

Klasifikace neživotního pojištění

Pojištění v neživotním pojištění jsou riziková pojištění, při kterých se vytváří rezerva na náhodné události, které mohou po dobu trvání pojištění zaniknout. Pojišťovatel nemůže jednoznačně určit, či pojistná událost nastane, anebo ne, ani to, jaká bude výška pojistného plnění [15].

Přehled neživotních a univerzálních pojišťoven v ČR

V následující tabulce 1, jsou uvedeny pojišťovny, které poskytují neživotní pojištění nebo jsou univerzální, což znamená, že poskytují životní a zároveň neživotní pojištění.

Tabulka 1: Univerzální a neživotní pojišťovny v ČR.

Pouze neživotní pojišťovny	Univerzální pojišťovny
AIG CZECH REPUBLIC pojišťovna, a. s.	Allianz pojišťovna, a. s.
Cestovní pojišťovna ADRIA Way družstvo	CREDIT SUIVNA A. S.SSE LIFE & PENSIONS POJIŠŤOVNA
Česká pojišťovna ZDRAVÍ, a. s.	Česká podnikatelská pojišťovna, a. s.
D.A.S. pojišťovna právní ochrany, a. s.	Česká pojišťovna, a. s.
Euler Hermes Čescob, úvěrová pojišťovna, a. s.	ČSOB Pojišťovna, a. s., člen holdingu ČSOB
Evropská Cestovní Pojišťovna, a. s.	Generali Pojišťovna, a. s.
Exportní garanční a pojišťovací společnost, a. s.	Hasičská vzájemná pojišťovna, a.s..
HALALI, všeobecná pojišťovna, a. s.	Komerční pojišťovna, a. s.
Komerční úvěrová pojišťovna EGAP, a.s.	Kooperativa, pojišťovna, a. s.
Nationale-Nederlanden pojišťovna, a. s.	MAXIMA pojišťovna, a. s.
Pojišťovna Slavia a. s.	POJIŠŤOVNA CARDIF PRO VITA, a. s.
Servisní pojišťovna, a. s.	Pojišťovna České spořitelny, a. s.
Triglav pojišťovna, a. s.	Pojišťovna VZP, a. s.
Vitalitas pojišťovna, a. s.	PRVNÍ AMERICKO - ČESKÁ POJIŠŤOVNA, a. s.
	UNIQA pojišťovna, a. s.
	VICTORIA VOLKSBANKEN pojišťovna a.s.

Zdroj: Upraveno podle [16].

1.3 Technické rezervy

Následující kapitola je zpracována dle [11], [15].

Pojištění je dlouhodobý obchod, kdy klient hradí pojistné předem (např. na počátku pojistné doby nebo na začátku pojistného období). Během trvání pojištění nastávají pojistné události, které jsou hlášeny pojišťovně, a ta je likviduje a platí své závazky ze sjednaných pojistných smluv. Některé závazky z pojistných smluv hradí pojišťovna ještě dlouho po tom, co pojištění skončilo (např. odškodnění v rámci odpovědnostního pojištění). Proto jsou technické rezervy nezbytnou součástí hospodaření pojišťovny.

Pojistně technické rezervy se využívají, když pojišťovně nevystačí běžné příjmy na výplaty pojistných plnění v běžném období. Jsou vytvářeny z přijatého pojistného a různý charakter mají u rizikových a u rezervotvorných pojištění.

Z celého přijatého pojistného očištěného od spotřebovaných správních nákladů) se vytvářejí pojistně technické rezervy u **rezervotvorných pojištění**. Výplata sjednaného pojistného plnění (pojistné částky) se hradí z technických rezerv, kde se hromadí pojistné obvykle po delší časové období.

Jedná-li se o **rizikové pojištění**, kdy se přijaté pojistné spotřebovává během příslušného roku, přichází do pojistně technických rezerv přiměřená část přijatého pojistného. Technické rezervy potom vyrovnávají časové, místní a věcné výkyvy ve výplatách pojistných plnění, které mají nahodilý charakter (tzv. výkyvové rezervy) a rezervy určené vyrovnání časového nesouladu ve vývoji přijatého pojistného a vyplacených pojistných plnění.

U rizikových pojištění, je nutné, aby byly rezervy v krátké době likvidní. Naopak u rezervotvorných pojištění jsou pojistně technické rezervy určeny ke krytí budoucích závazků z těchto pojištění a je pro ně charakteristický dlouhodobý charakter. Zejména dočasně volné finance technických rezerv tvořené v rámci rezervotvorných pojištění jsou vhodné k dlouholetému investování na finančním trhu, které tvoří základ investičního portfolia a pojišťovny.

Jedním ze základních nástrojů v rámci hospodaření pojišťovny je i pojem pojistně technické rezervy, bez jejich využití by pojišťovna nemohla efektivně fungovat. Technické rezervy zahrnují finanční prostředky, které pojišťovny budou vyžadovat na výplatu pojistných plnění v následujících obdobích.

1.4 Daňové aspekty technických rezerv v pojišťovnictví

Způsob tvorby a výši rezerv a opravných položek, které jsou výdajem (nákladem) vynaloženým na dosažení, zajištění a držení příjmů u poplatníků daně z příjmů upravuje pro účely zjištění základu daně z příjmů zákon č. 593/1992 Sb., o rezervách pro zjištění základu daně z příjmů, ve znění pozdějších předpisů.

Pro účely zjištění základu daně z příjmů se v pojišťovnictví z technických rezerv, s výjimkou rezervy na nezasloužené pojistné, uznává tvorba rezerv, které jsou výdajem (nákladem) vynaloženým na dosažení, zajištění a udržení příjmů, a to tvorba [5]:

- **rezervy na neživotní pojištění** ve výši, která nesmí překročit objem závazků, vypočtený metodami pojistné matematiky, stanovenými zákonem o pojišťovnictví,
- **rezerv na životní pojištění** ve výši, která nesmí překročit objem závazků, vypočtený metodami pojistné matematiky, stanovenými zákonem o pojišťovnictví a vyplývající ze životních pojištění splatných podle uzavřených pojistných smluv.

Výše a způsob tvorby rezerv za zdaňovací období musí být prokazatelné.

Způsob tvorby rezerv za zdaňovací období a jejich výše musí být dokazatelné. Při inventarizaci se hodnotí nejen odůvodněnost nýbrž i výše těchto rezerv. Výdaje (náklady) se musí přednostně uhradit z rezerv, které se na vyrovnání vytvořily. Rezervy se zruší ve prospěch výnosů ve stejném zdaňovacím období, kdy uplynuly důvody, pro které byly vytvořeny. Do následujícího zdaňovacího období se pak převádí zůstatek rezerv zjištěný na konci zdaňovacího období [5].

2 DRUHY POJISTNĚ TECHNICKÝCH REZERV

Pojišťovny vytvářejí jednotlivé druhy pojistně technických rezerv v souvislosti na zaměření činnosti pojišťovny (jiné technické rezervy tvoří životní pojišťovna a jiné neživotní) a s účelem, na který jsou tyto technické rezervy vytvářeny. Základní obligatorní strukturu (povinné druhy) pojistně technických rezerv určují pojišťovacími institucemi státní orgány v právních předpisech. Nejvýznamnější druhy pojistně technických rezerv jsou tyto [11]:

- **matematické rezervy** – v rámci jednotlivých pojistek se systematicky shromažďuje přijaté pojistné tak, aby na konci sjednané pojistné doby byla v rámci technické rezervy nashromážděna částka odpovídající sjednané velikosti pojistného plnění
- **výkyvové rezervy** – technické rezervy určené na pokrytí výkyvů ve velikosti pojistných plnění (výkyvů od dlouhodobého průměru)
- **rezervy spojené s časovým rozlišením přijatého pojistného** – přijaté pojistné se prostřednictvím technických rezerv přiřazuje do období, kdy se na pojistné váže pojistné plnění, tj. kdy budou prostředky pojistného potřebné na výplatu příslušného pojistného plnění.

2.1 Členění pojistně technických rezerv

V neživotním pojištění hrají technické rezervy významnou roli. Značně významný je odhad rezervy na pojistná plnění, jelikož zjištění konečné výše škody může v některých produktech neživotního pojištění trvat i několik let, např. pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla [4].

Provozuje-li pojišťovna **neživotní pojištění**, řídí tvorbu a použití pojistně technických rezerv podle § 13, zákona č. 363/1999 Sb. o pojišťovníctví následovně [26], [4]:

- a) **Rezerva na nezasloužené pojistné** (neboli rezerva na pojistné jiných období) - tato rezerva odpovídá té části předepsaného pojistného, která se vztahuje k budoucím účetním obdobím (např. čtvrtina ročního pojistného zaplaceného na konci září pokryje zbytek běžného účetního roku, což je zasloužené pojistné. Nezasloužené pojistné jsou zbylé tři čtvrtiny pojistného, které se vztahují

k prvním devíti měsícům příštího účetního roku a tuto částku je nutné v běžném účetním roce umístit do rezervy na nezasloužené pojistné.

- b) **Rezerva na pojistná plnění** - vzhledem k tomu, že zjištění konečné výše pojistného nároku může u některých produktů neživotního pojištění trvat i několik let, jedná se z pohledu neživotního pojištění o nejdůležitější technickou rezervu. Proto jí je věnovaná 3. kapitola, kde jsou uvedeny i různé metody výpočtu.
- c) **Rezerva na pojistné prémie a slevy** - slouží ke krytí nákladů na prémie a slevy poskytnuté v souladu s pojistnými smlouvami. V oblasti neživotního pojištění se přitom především jedná o bonusy v havarijním pojištění nebo povinném ručení.
- d) **Vyrovňovací rezerva**, (rezerva na vyrovnávání mimořádných rizik) - specifická rezerva neživotního pojištění. Vyrovnává zvýšení nákladů na pojistná plnění, které vzniknou kolísáním škodního průběhu u produktů neživotního pojištění v rámci skutečnosti nezávislých na vůli pojistitele.
- e) **Rezerva pojistného neživotních pojištění** – vytváří se k produktům neživotního pojištění, u kterých se pojistné stanovuje podle vstupního věku nebo případně podle pohlaví pojištěného, např. v pojištění léčebných výloh při pobytu v zahraničí.
- f) **Jiné rezervy** - jen se souhlasem státního dozoru.

Tvorba jiných rezerv se schvaluje na základě žádosti pojišťovny, jejíž součástí je i návrh způsobu tvorby a použití této rezervy. Zahraniční pojišťovna je povinna vytvářet technické rezervy podle zákona o pojišťovnictví k plnění závazků z pojišťovací činnosti provozované na území ČR prostřednictvím své organizační složky. Zajišťovna je povinna udržovat technické rezervy ve výši odpovídající jejím závazkům vyplývajícím z uzavřených smluv [20].

2.2 Jednotlivé druhy pojistně technických rezerv

Jak již bylo uvedeno, pojistně technické rezervy stanoví zákon, jejichž následné bližší seznámení (kap. 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5) je zpracováno dle [4], [11], [12], [15].

Správný odhad pojistných rezerv je komplexní problém, při kterém je třeba brát do úvahy množství vnějších a vnitřních faktorů. **Vnitřní** faktory jsou: monetární politika pojišťovny (ochota přeplácet pojistné plnění, přístup k soudním přelíčením), interní administrativní postupy, subjektivní faktor při odhadu rezerv, rozhodnutí managementu pojišťovny. **Vnější** faktory: pak jsou růst cen a inflace, úroková míra, technologický rozvoj, ekonomické a legislativní změny [12], [17].

2.2.1 Rezerva na nezasloužené pojistné

Tato rezerva, dříve rezerva na pojistné jiných období se tvoří u životních i neživotních pojištění. Výše rezervy se stanoví jako souhrn částí pojistného, vypočítaný podle jednotlivých pojistných smluv a vztahuje se k budoucím účetním obdobím.

Jedná-li se o dlouhodobé pojištění, přechází pojistná doba do následujících účetních období. Přijaté pojistné proto připadá zčásti ke sledovanému období a také zčásti k budoucím obdobím, kdy teprve budou pojistná plnění, vztahující se k danému přijatému pojistnému, vyplácena. Je proto nezbytné přijaté pojistné rozdělit na pojistné odpovídající sledovanému období a na pojistné, které patří do následujícího či následujících období.

Je to část přijatého pojistného, která má být převedena do následujících období a která znázorňuje část rizika, které odpovídá budoucím pojistným krytím.

Výše rezervy na nezasloužené pojistné je zcela jednoznačně dána výší předepsaného pojistného a obdobím, na které je toto pojistné určeno. Proto je tato jediná pojistně technická rezerva nezávislá na počtu pravděpodobnosti.

Výpočet této rezervy na nezasloužené pojistné se odvíjí z následujícího vztahu:

$$\text{výše rezervy} = \frac{\text{délka období po 31.12.}}{\text{délka pojistného období}} \times \text{pojistné}$$

Rozlišuje-li se velikost správních nákladů zahrnovaných do tarifu pojistného, jako u životních pojištění, zjednodušený postup výpočtu by vypadal následovně:

$$\text{výše rezervy} = \frac{\text{délka období po 31.12.}}{\text{délka pojistného období}} \times (\text{TP-PJN})$$

TP = tarif pojistného, PJN = počáteční jednorázové náklady

Počáteční jednorázové náklady se v současné době obvykle rozvrhují na delší období.

2.2.2 Rezerva na pojistná plnění

Rezerva na pojistná plnění se tvoří z části pojistného vztahujícího se k danému účetnímu období, avšak z různých technických důvodů nelze tato pojistná plnění realizovat. Proto je potřebné soustředit v příslušné rezervě přijaté pojistné vztahující se k těmto pojistným plněním. Rezerva má dvě složky, rezervy na pojistná plnění z pojistných událostí v období před rozvahovým dnem:

- a) **nastalých a ohlášených, ale nezlikvidovaných** – tvoří se rezervy pro výplatu pojistného plnění pro případy, kdy byla škoda pojistníkem oznámena pojišťovně, ale zatím nebylo ukončeno likvidační řízení a škoda nebyla vyřízena. Jde o úhrn závazků, které pojišťovna zná, na konci účetního období, ale ještě nebyly uhrazeny.
- b) **nastalých, ale nenahlášených** – rezerva se tvoří pro případ, že škoda nastala, ale nebyla ohlášena. Vyplývá z existence určité prodlevy mezi vznikem a nahlášením škody pojišťovně.

Ke stanovení rezervy je možné využít určité matematické modely, jejichž uplatnění závisí na druhu a počtu škod v minulých obdobích, jejich výši a druhu pojistného produktu. Při výpočtu se vychází z údajů o škodním vývoji v rámci daného pojistného:

- množství škod na jeden den,
- průměrný odstup mezi vznikem škody a nahlášením škody,
- počet pozdních škod,
- průměrná výše škod.

Rezerva na pojistná plnění zahrnuje hodnotu odhadnutých nákladů spojených s likvidací pojistných událostí. A dále se snižuje o odhad předpokládané výše vymahatelných částek, na něž má pojišťovna nárok v souvislosti s pojistnými plněními.

2.2.3 Rezerva na pojistné prémie a slevy

Rezerva na pojistné prémie a slevy slouží na vyrovnávání sníženého objemu přijatého pojistného z důvodů poskytování slev na pojistném v souladu s pojistnými smlouvami.

Vychází se z principu, že prémie a slevy tvoří určitý druh pojistného plnění a uplatňují se jako povzbuzení pojištěného ke snížení škodovosti. Na vyplácení prémie a slev jako pojistného plnění se vytváří rezerva.

2.2.4 Vyrovnávací rezerva

Vyrovnávací rezerva se tvoří k odvětvím neživotního pojištění a je určena na vyrovnání výkyvů ve výplatách pojistných plnění budoucích let anebo na pokrytí mimořádných rizik v jednotlivých pojistných odvětvích. Je tedy určena na pokrytí výkyvů ve výplatách pojistných plnění (např. živelním pojištění), kdy náklady na pojistná plnění během posledních let přesáhnou hranici zaslouženého pojistného. Pro druhy pojištění, v rámci kterých během posledních pěti let byl přijat malý podíl celkově přijatého pojistného, lze upustit od vytváření této rezervy.

Podle směrnice EU je povinnost vytvářet tuto rezervu jen pro pojištění úvěru, ale v řadě zemí dozorované orgány legislativně předepisují povinně vytvářet tyto rezervy pro další nebo dokonce všechna odvětví neživotního pojištění [2].

Tato rezerva je v podmínkách České republiky regulována ze strany státu, kdy je určen postup výpočtu velikostí rezervy. Obsahuje vymezení horní hranice velikost rezervy z daňových důvodů. Zároveň je stanoven postup propočtu velikosti této rezervy.

Výška vyrovnávací rezervy se stanoví na základě vztahu:

$$T = T_i + \dots + T_n,$$

kde

- i příslušné odvětví neživotního pojištění, $i = 1, \dots, n$,
- T_i tvorba rezervy pro příslušné odvětví stanovené tímto postupem,
- T celková tvorba vyrovnávací rezervy.

2.2.5 Rezerva pojistného neživotních pojištění

U odvětví neživotních pojištění, u kterých se stanovuje pojistné podle vstupního věku pojištěného, se vytváří právě tato rezerva. Rezerva pojistného neživotních pojištění představuje hodnoty závazků pojišťovny, vypočítané pomocí matematických metod, včetně přiznaných podílů na zisku.

2.3 Zásady investování pojistně technických rezerv

Pojistně technické rezervy tvoří významnou položku v pasivech bilance pojišťoven. Odlišnou roli v bilanci hrají u životních a u neživotních pojišťoven (průměrně se odhaduje přibližně 85% u životních pojišťoven a přibližně 60% u neživotních). Pojistně technické rezervy investují pojišťovny na finančním trhu. Především prostředky pojistně technických rezerv životního pojištění mají dlouhodobý charakter, a proto jsou určeny k dlouhodobému investování [11].

Pojistně technické rezervy se účtují odděleně od ostatních závazků pojišťovny eventuálně zajišťovny. Výkaz o tvorbě a výši technických rezerv a skladbě finančního umístění aktiv, jejichž zdrojem jsou technické rezervy, předkládá pojišťovna nebo zajišťovna ministerstvu vždy k 30. červnu a 31. prosinci běžného roku a to ve lhůtě do 60 dnů po uvedeném datu [20].

Jsou-li zdrojem technické rezervy, je pojišťovna nebo zajišťovna povinna ve skladbě finančního umístění aktiv, postupovat tak, aby se řídily následujícími zásadami [20]:

- a) **zásadou bezpečnosti** – jednotlivé složky finančního umístění poskytují záruku návratnosti vložených prostředků,

- b) **zásadou rentability** – jednotlivé složky finančního umístění zabezpečují výnos z jejich vlastnictví nebo zisk z jejich prodeje,
- c) **zásadou likvidity** – v závislosti na profilu provozované pojišťovací nebo zajišťovací činnosti je část finančního umístění pohotově k dispozici k výplatě pojistných plnění ve lhůtě stanovené občanským zákoníkem,
- d) **zásadou diverzifikace** – jednotlivé složky finančního umístění jsou rozloženy mezi větší počet právnických osob, mezi nimiž není vztah ovládané a ovládající osoby ani osob, které jednájí ve shodě s podle zvláštního právního předpisu.

Podílí-li se zajišťovna na technických rezervách pojišťovny, je povinností pojišťovny uzavřít zajišťovací smlouvu tak, aby nebyla ohrožena splnitelnost jejích závazků [20].

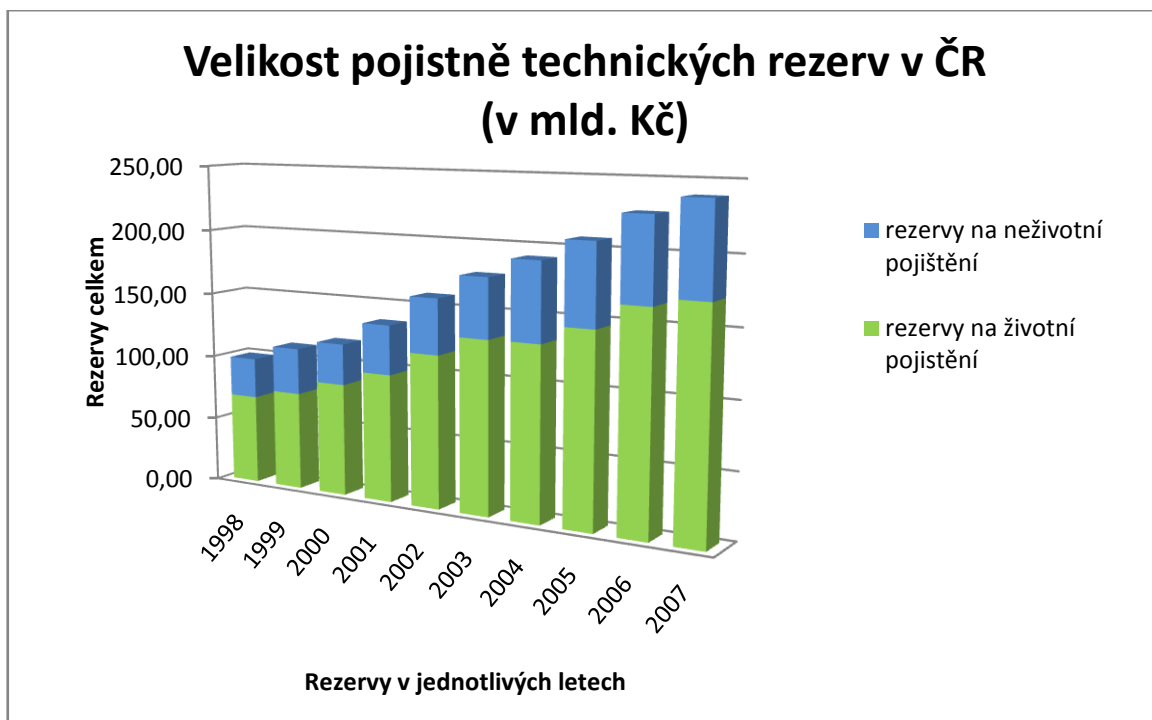
Vývoj pojistně technických rezerv v ČR

V tabulce 2 je uvedena výše velikosti pojistně technických rezerv v ČR v miliardách Kč od roku 1998 do roku 2007, z této tabulky následně vyplývá graf 1. Rozložení pojistně technických rezerv na trhu ČR mezi roky 1998 až 2007, je uvedeno v tabulce 3, a graficky zobrazeno v grafu 2.

Tabulka 2: Velikost pojistně technických rezerv v ČR (v mld. Kč)

Rok	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
rezervy na ŽP	68.31	75.07	86.26	97.77	116.47	131.46	131.76	145.55	164.34	170.48
rezervy na NP	30.44	35.27	31.30	37.68	42.13	45.31	59.32	61.18	62.31	68.33
rezervy celkem	98.75	110.34	117.56	135.46	158.60	176.77	191.08	206.73	226.65	238.81

Zdroj: [7], [8], [11], [21], [22], [23], [24], [25].



Graf 1: Velikost pojistně technických rezerv v ČR (V mld. Kč)

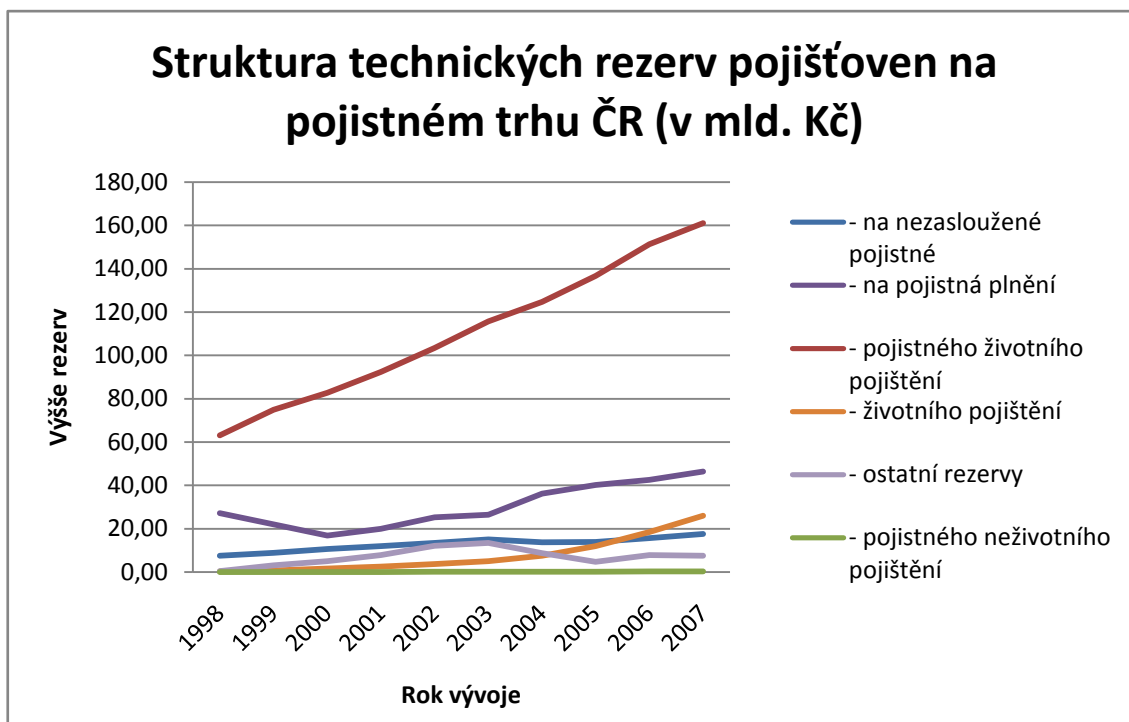
Tabulka 3: Rozložení pojistně technických rezerv na trhu ČR (v mld. Kč)

Rezerva na:	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
- nezasloužené pojistné	7.50	8.90	10.66	11.89	13.35	15.01	13.77	13.83	15.58	17.54
- pojistné životního pojištění	63.10	74.90	82.70	92.39	103.42	115.68	124.73	136.56	151.22	160.98
- pojistné neživotního pojištění	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.11	0.17	0.16	0.19	0.25
- pojistná plnění	27.20	22.10	16.88	20.01	25.33	26.48	36.15	40.12	42.51	46.34
- prémie a slevy	0.20	0.50	0.68	0.73	2.40	1.03	1.14	1.17	1.21	1.25
- životní pojištění ¹	0.30	0.70	1.61	2.55	3.63	5.00	7.54	12.03	18.55	26.03
- ostatní rezervy ²	0.50	3.20	5.08	7.88	12.12	13.48	8.81	4.71	7.92	7.60
Celkem	98.80	110.30	117.60	135.46	160.34	176.79	192.30	208.57	237.18	259.99

Zdroj: [7], [8], [11], [21], [22], [23], [24], [25].

¹ Je-li nositelem investičního rizika pojistník

² Ostatní rezervy obsahují rezervu na vyrovnání mimořádných rizik, ostatní a jiné rezervy.



Graf 2: Struktura technických rezerv pojišťoven na pojistném trhu ČR (v mld. Kč)

2.4 Technické rezervy a Solvency II

Solventnost v pojišťovnictví je schopnost pojistitele plnit přijaté závazky, tj. uhradit oprávněné pojistné nároky z realizovaných pojistných událostí. K ocenění solventnosti pojišťovny se používají i různé finanční poměrové ukazatele, kde se využívají i technické rezervy pojišťovny. Následující text je zpracován podle [6], kde je věnována kapitola právě technickým rezervám v projektu Solvency II.

Technické rezervy tvoří značnou část zdrojů v bilanci pojišťoven. Značně negativně může ovlivnit budoucí hospodaření pojišťovny riziko, plynoucí z odlišného vývoje peněžních toků (např. z pojistných plnění), než je očekávaný vývoj při stanovování výše technických rezerv. Toto riziko je pro pojišťovny specifické a vyžaduje si tudíž i specifické modely, které zčásti využívají metody měření z jiných odvětví (např. modelování výnosových křivek).

V životním pojištění se do výpočtu požadované míry solventnosti promítá výše technických rezerv přímo (4% z objemu rezerv jsou součástí požadované míry solventnosti). V neživotním pojištění je požadovaná míra solventnosti úměrná průměrným ročním

nákladům na pojistná plnění a nikoliv aktuální výši technických rezerv (za určitých okolností se do požadované míry solventnosti promítá pouze změna stavu rezerv na pojistná plnění). Ve stejném vztahu, v jakém je výše technických rezerv a změna jejich stavu k výsledku hospodaření, vzhledem k vlastnímu kapitálu, je stanovení technických rezerv k disponibilní míře solventnosti.

V souvislosti s projektem Solvency II nabývá na významu kvantifikace rizika vyplývajícího z odlišného vývoje závazků a z nich plynoucích peněžních toků, než je očekáváno při stanovení výše technických rezerv. Z toho vyplývá potřeba znát kromě očekávané střední hodnoty technických rezerv i odhad volatility těchto rezerv.

Dalším následkem může být určité sblížení metod stanovování výše rezerv a preference těch metod, které výše uvedené umožňují. Pro tyto podrobnější odhady samozřejmě vzrůstají nároky na vstupní data.

Teoreticky komplikovanou oblastí je sledování působení více rizik najednou, tj. kombinace rizika technických rezerv s dalšími riziky. Z praktického hlediska je možné řešit tuto problematiku např. předepsaným testováním určitých scénářů (např. stanovených dozorčím orgánem) kombinujících vliv několika faktorů (např. katastrofické povodně a pokles finančních trhů).

3 REZERVY NA POJISTNÁ PLNĚNÍ A METODY JEJICH VÝPOČTU

V neživotním pojištění je běžné, že pojistné plnění se nevyplácí v roce vzniku škody, je to např. při úrazovém pojištění, pojištění domácnosti, pojištění motorových vozidel (týká se poškození majetku či zdraví), při cestovním pojištění, pojištění odpovědnosti za škody apod. Zjištění konečné výšky škody může u uvedených typů pojistných událostí trvat i několik let, např. v případě vážného poškození na zdraví se musí čekat na výsledek léčby, na expertní rozhodnutí o invaliditě, či na rozsudek soudu [4], [14].

Již vzniklé, ale zatím nezpracované pojistné události většinou patří mezi „nákladné“ pojistné události a tvoří významný podíl celkového objemu škod. Proto rezervy na takové pojistné události mohou být i několikanásobkem ročního příjmu pojišťovny z inkasovaného pojistného a násobně vyšší než celkový zisk pojišťovny. Podceňování těchto rezerv směřuje k podstatným finančním problémům pojišťovny [4], [14].

Rezervy na pojistná plnění lze rozdělit na [4], [14], [17]:

a) Rezerva RBNS (reported but not settled)

Rezerva určená ke krytí závazků z pojistných událostí v běžném účetním období vzniklých, hlášených, ale v ještě nezlikvidovaných (nebo eventuálně zlikvidovaných, ale ještě zcela nevyplacených). Tato rezerva se v praxi většinou tvoří z dílčích hodnot pro jednotlivé pojistné události (case estimates). Likvidátor na základě svého odhadu nebo podle zavedené praxe v pojišťovně ocení předpokládanou výši budoucího pojistného plnění. Své odhady postupně zpřesňuje na základě případných dalších informací a vývoje daného případu. Vše obvykle formuluje přímo v provozním počítačovém systému pojišťovny. Pro hodnocení přiměřenosti takto skládané RBNS rezervy (eventuálně v případě, že tento přístup nelze uskutečnit, či se nevyplatí např. větší počet škody menšího rozsahu v daném odvětví) se mnohdy odhaduje RBNS dohromady s IBNR rezervou, pomocí matematicko-statistických metod.

b) Rezerva IBNR (incurred but not reported)

Tato rezerva je určena ke krytí závazků z pojistných událostí v běžném účetním období vzniklých, ale v tomto období neohlášených. Zde musí být pojišťovna připravena i na vzniklé pojistné události, které ještě nebyly z různých důvodů nahlášený. Pro kvalifikovaný odhad IBNR rezervy se většinou používají matematicko-statistické metody, které

respektují také vnější vlivy, jako je inflace (např. nárůst cen ve stavebnictví či autooprav), změny vyhlášek a předpisů apod.

3.1 Trojúhelníkové metody - obecně

Tato kapitola 3.1 je zpracována podle [2], [3], [4], [17]. V dalších kapitolách jsou zpracovány metody pro výpočet technických rezerv. Výpočty v MS Excel jsou uvedeny v příloze č. 1. Kapitoly 3.2 a 3.3 jsou zpracovány podle [17], 3.4 podle [12], [17] a kapitoly 3.5 a 3.6 jsou zpracovány dle [2], [4], [13].

Trojúhelníkové metody jsou matematicko-statistické metody pro doplnění vývojových trojúhelníků na obdélníky hodnotami předpověďmi $X_{j,s}$ a především pro získání odhadu celkové výše škod $X_{j,\infty}$ vzniklých v roce j ($j = 1, \dots, t$):

$$\hat{X}_{j,\infty} - X_{j,t-j} \approx \hat{X}_{j,t-1} - X_{j,t-j}$$
$$j = 1, \dots, t$$

(část rezervy na pojistná plnění, která na konci roku t připadá na škody vzniklé v roce j , pro dostatečně velké t je $\hat{X}_{j,t-j} \approx \hat{X}_{j,\infty}$)

Vývojový trojúhelník (run-off triangle) je specifické uspořádání minulých dat pojišťovny, využívané v rámci matematicko-statistických metod pro kvalifikovaný odhad rezervy na pojistná plnění (např. odečtením vytvořené RBNS rezervy od takto odhadnuté celkové rezervy na pojistná plnění se získá odhad nezbytné IBNR rezervy). Doposud vyplacená pojistná plnění jsou v něm zapisována do řádků podle období vzniku a do sloupců podle období vývoje. Obvykle se využívají vývojové trojúhelníky s ročním účetním obdobím, ale v praxi se někdy používají pololetní nebo čtvrtletní trojúhelníky, do nichž ovšem začíná zasahovat sezónnost.

Rok vzniku je kalendářní rok, kdy vznikly pojistné události (např. v prvním řádku jsou pojistné události vzniklé v prvním kalendářním roce několikaletého minulého období použitého pro konstrukci trojúhelníka).

Rok vývoje pojistných plnění je počet let, které uplynuly od vzniku odpovídajících pojistných událostí (např. první sloupec, obvykle nadepsaný jako sloupec „0“, obsahuje pojistná plnění vyplacená ještě v roce vzniku odpovídajících pojistných událostí)

Kalendářní rok pojistných plnění zahrnuje všechna pojistná plnění v daném kalendářním roce (např. na vedlejší diagonále jsou uvedena pojistná plnění, vyplacená v minulém roce, tj. v posledním kalendářním roce několikaletého minulého období, použitého pro konstrukci trojúhelníka).

Na výpočet rezerv na vzniklé, ale zatím nezaplacené pojistné události, tzv. IBNS škody, se nejčastěji používají následující metody, které vycházejí z tzv. **trojúhelníkových metod** což je konkrétní pojmenování pro způsob zápisu už vyplacených škod [17]:

- řetězová žebříková metoda (Chain Ladder Method)
- řetězová žebříková metoda s inflačním vyrovnáním (Inflation Adjusted Chain Ladder Method),
- separační metoda (The Separation Method)

dále např.

- metoda Cape Cod
- Bornhuetterova-Fergusonova metoda

Obecný postup

Předpokládá se, že při určitém typu pojištění je potřebných maximálně n roků na úplnou likvidaci škody. Celkové vyplacené pojistné plnění $C_{i,j}$ v posledních n rocích na škody, vzniklé v tomto období, se uspořádají podle roku vzniku i příslušné pojistné události a současně podle počtu roků j , které přešly od vzniku pojistné události. Tak se dostane zápis celkových vyplacených pojistných plnění $C_{i,j}$ ve formě trojúhelníku, jak znázorňuje tabulka 4.

Tabulka 4 představuje $C_{i,j}$ celkové (kumulované) pojistné plnění, vyplacené do konce vývojového roku j za škody, které vznikly v roce vzniku i . Na hlavní diagonále tohoto schématu je uvedený nejaktuálnější stav vyplacených plnění za škody s rokem vzniku $0, 1, \dots, n$ ke konci vývojového roku n .

Tabulka 4: Trojúhelníkové schéma

Rok vzniku i	Vývojový rok j						
	0	1	2	...	n-2	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,n-2}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$					
n	$C_{n,0}$						

Jelikož $C_{i,j}$ jsou kumulovaná plnění za škody, vzniklé v roce vzniku i a vyplacená do konce roku j , tedy v letech $0,1, \dots, j$, zřejmě platí

$$C_{i,0} \leq C_{i,1} \leq C_{i,2} \leq \dots$$

Podle předpokladu se škody, vzniklé v roce vzniku 0, úplně zlikvidují do konce vývojového roku n , proto na škody s rokem vzniku 0 nejsou potřebné řádné RBNS rezervy. Ve vývojovém roce n jsou známé hodnoty $C_{i,j}$ pro $i + j \leq n$.

Problém je odhadnout $C_{i,j}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a současně $n < i + j \leq 2n$. Jsou to vstupy v tabulce 4 pod diagonálou $C_{i,j}$, kde $i + j = n$.

3.2 Řetězová žebříková metoda

3.2.1 Charakteristika a postup

Při řetězové žebříkové metodě (Chain Ladder), často používané v praxi se předpokládá:

1. Stabilní vývoj vyplácených sum pojistných plnění pro každý rok vzniku škody, charakterizovaný tzv. koeficientem vývoje pojistného plnění λ_j , který definuje poměr

$$\lambda_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n.$$

2. Homogenní portfolio pojistek, obsahující podobné pojistky.
3. Stabilní inflaci ve vývojových rocích $0, 1, \dots, n$.

Když jsou tyto předpoklady splněné, odhad rezerv na IBNS škody bude mít následující postup:

1. Když je splněný předpoklad 1, potom se ze vztahu $\lambda_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ dostane

$$C_{i,j} = \lambda_j C_{i,j-1}$$

$$\text{pro } i = 0, 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

Problém odhadu $C_{i,j}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$ a současně $n < i + j \leq 2n$ se tak prakticky zúžil na odhad λ_j pro $j = 1, 2, \dots, n$. Koeficient vývoje λ_j se zjistí jako poměr součtu j -tého sloupce tabulky 4 s kumulativních plnění ve sloupci $j - 1$ této tabulky. Tedy

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{0,1} + C_{1,1} + \dots + C_{n-1,1}}{C_{0,0} + C_{1,0} + \dots + C_{n-1,0}}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{C_{0,2} + C_{1,2} + \dots + C_{n-2,2}}{C_{0,1} + C_{1,1} + \dots + C_{n-2,1}}$$

⋮

$$\hat{\lambda}_n = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}}$$

2. V dalším kroku se doplní trojúhelník pod diagonálu v tabulce 4 a získají se odhady plnění $\hat{C}_{i,j}$, kde $n < i + j \leq 2n$, uvedené v tabulce 4. Jejich výpočet se získá takto:

$$\hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_1 C_{n,0}$$

$$\hat{C}_{n,2} = \hat{\lambda}_2 C_{n,1} = \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 C_{n,0}$$

$$\hat{C}_{n-1,2} = \hat{\lambda}_2 C_{n-1,1}$$

⋮

$$\hat{C}_{n,n} = \hat{\lambda}_n \hat{\lambda}_{n-1} \dots \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{C}_{n,0}$$

Mezi odhadnutými rezervami $\hat{C}_{i,j}$, kde $n < i + j \leq 2n$, budou i odhadnuté kumulativní rezervy v posledním vývojovém roce (ve sloupci tabulky 5 $\hat{C}_{i,j}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$).

Tabulka 5: Schéma řetězové žebříkové metody

Rok vzniku i	Vývojový rok j						
	0	1	2	...	n-2	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,n-2}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	$\hat{C}_{1,n}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-2}$	$\hat{C}_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$\hat{C}_{n-1,2}$...	$\hat{C}_{n-1,n-2}$	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$...	$\hat{C}_{n,n-2}$	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

3. Odhad celkových rezerv na konci n-tého vývojového roku na pojistné události, vzniklé ve všech sledovaných rocích spolu, se dostane podle vztahu

$$\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-1}).$$

3.2.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv

Pro lepší pochopení je celý postup barevně rozlišen. Plně červené šipky ukazují výsledek, červené přerušované šipky ukazují hodnoty, pomocí kterých byl výsledek získán.

Vychází se z tabulky ve formě nekumulativních hodnot pojistných plnění při určitém typu neživotního pojištění ve vývojových letech 0,1, ... 5, přičemž se předpokládá, že všechny pojistné nároky se zlikvidují do konce pátého roku po roku vzniku pojistné události. Pomocí řetězové žebříkové metody se odhadnou celkové pojistné rezervy na plnění v letech 2009-2013 pro nevyřízené události, vzniklé v letech 2003-2008.

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	85	57	57	35	15
2004	1	111	99	67	65	42	
2005	2	127	117	80	74		
2006	3	149	138	101			
2007	4	173	154				
2008	5	189					

Obrázek 1: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.

Zdroj: Vlastní úprava podle [19].

Tyto hodnoty z tabulky na obrázku 1 se nejprve přepočítají do kumulativní podoby postupným kumulováním plnění v řádcích. Výpočet a výsledek je znázorněn na obrázku 2.

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	186	242	299	334	348
2004	1	111	99	67	65	42	
2005	2	127	117	80	74		
2006	3	149	138	101			
2007	4	173	154				
2008	5	189					

Obrázek 2: Kumulativní forma pojistného plnění

Zdroj: Vlastní výpočty.

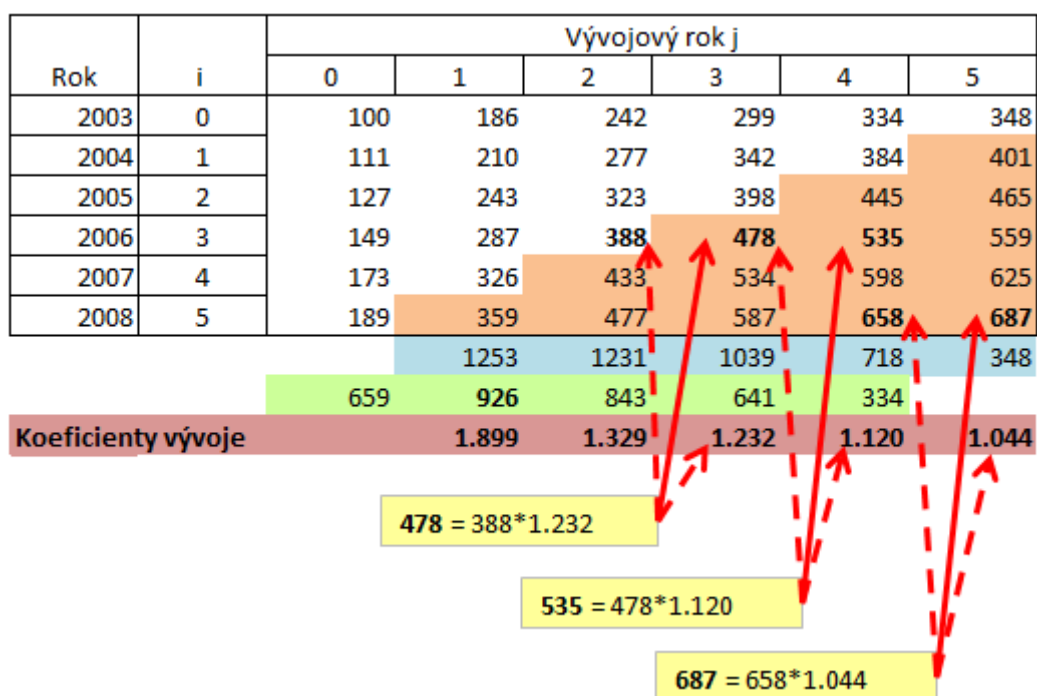
Nyní z těchto kumulativních údajů (Obrázek 2) lze odhadnout koeficienty vývoje $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_5$. Podle vztahu $\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{0,1} + C_{1,1} + \dots + C_{n-1,1}}{C_{0,0} + C_{1,0} + \dots + C_{n-1,0}}$... $\hat{\lambda}_n = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}}$, výsledné hodnoty a postup výpočtu jsou znázorněny na obrázku 3.

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	186	242	299	334	348
2004	1	111	210	277	342	384	
2005	2	127	243	323	398		
2006	3	149	287	388			
2007	4	173	326				
2008	5	189					
			1253	1231	1039	718	348
		659	926	843	641	334	
Koeficienty vývoje			1.899	1.329	1.232	1.120	1.044

Obrázek 3: Výpočet koeficientů vývoje

Zdroj: Vlastní výpočty.

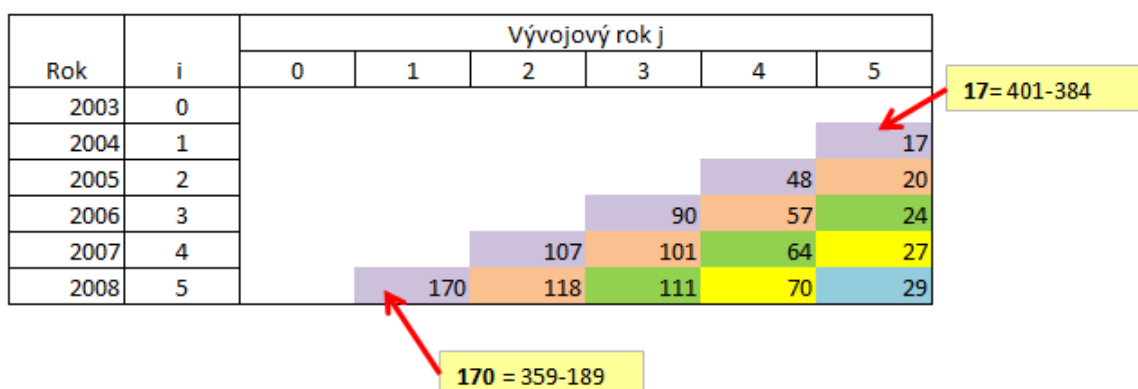
Pomocí těchto koeficientů vývoje se pro všechny roky vzniku pojistných událostí odhadnou pojistné rezervy na pojistné plnění po roce 2008, jak je znázorněné na následujícím obrázku 4. Výpočet je proveden pro $C_{3,3} = 478$, $C_{3,4} = 535$ a $C_{5,5} = 687$.



Obrázek 4: Odhad pojistných rezerv na pojistné plnění po roce 2008

Zdroj: Vlastní výpočty.

Na dalším obrázku 5 je uveden odhad rezerv na nevyřízené plnění v letech 2009-2013 v nekumulativní formě. Údaje v této tabulce pro každý rok vzniku (každý řádek) jsou vlastně rozdíly odhadnutých rezerv (z obrázku 4) v daném a v předcházejícím vývojovém roce (tj. v daném a předcházejícím sloupci). Např. hodnotu 170 získáme jako rozdíl 359-189 příslušných kumulativních plateb z obrázku 4.



Obrázek 5: Odhad rezerv na nezpracované plnění v letech 2009-2013

Zdroj: Vlastní výpočty.

Z těchto odhadů lze vypočítat výšku předpokládaných rezerv na nevyřízené pojistné události, které budou potřebné na plnění v letech 2009-2013 jako součty odhadnutých

plateb na diagonálách (Obrázek 6). Stejnou barvou jsou označeny výsledky (Obrázek 6) a hodnoty na diagonálách (Obrázek 5), z kterých byl výsledek získán.

Rok	Odhad rezerv
2009	432
2010	296
2011	198
2012	97
2013	29
Celkem	1052

432 = 170+107+90+48+17

97 = 70+27

Obrázek 6: Odhad pojistných rezerv na konci roku 2008

Zdroj: Vlastní výpočty.

Odhadnutá rezerva ke konci roku 2008 by měla být 1052 peněžních jednotek.

3.3 Řetězová žebříková metoda s inflačním vyrovnáním

3.3.1 Charakteristika a postup

Trojúhelníkové schéma se může vztahovat i k poměrně dlouhému období, proto se doporučuje zahrnout do této metody vliv inflace. Postupujeme takto:

1. Z trojúhelníkového schéma kumulativních plnění $C_{i,j}$ (Tabulka 4) se vypočítají plnění, která byla skutečně vykonaná v každém vývojovém roce $j = 0, 1, \dots, n$ pro každý rok vzniku $i = 1, 2, \dots, n$ podle vztahu

$$P_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1} \text{ pro } j \geq 1$$

$$P_{i,0} = C_{i,0}$$

2. Podle míry inflace z předcházejících roků se přepočítají všechna známá vyplacená plnění na úroveň cen na konci n -tého vývojového roku.
3. Trojúhelníkové schéma z takto upravených finančních plateb se znovu přepočítá na kumulativní trojúhelníkové schéma.

4. Na odhad rezerv na nevyplacené škody oddělené podle roku plnění, v cenách platných ke konci n -tého vývojového roku se použije řetězová žebříková metoda (tak jako v předcházející kapitole 3.2).
5. Vzhledem na odhadnutou míru inflace v příslušném roce se upraví výška odhadnutých rezerv v každém roce.

3.3.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv

Opět se vychází z vyplacených plnění na dosud nezpracované škody, vzniklé v letech 2003-2008. A předpokládá se, že všechny škody pro každý rok vzniku budou zlikvidované do konce pátého vývojového roku a platby se realizují v polovině roku.

Rok vzniku	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	85	57	57	35	15
2004	1	111	99	67	65	42	
2005	2	127	117	80	74		
2006	3	149	138	101			
2007	4	173	154				
2008	5	189					

Obrázek 7: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.

Zdroj: Vlastní úprava podle [19].

Dále potřebujeme míry inflace z předcházejících období:

Období	Míra inflace
06/2002-06/2003	0.1
06/2003-06/2004	2.8
06/2004-06/2005	1.9
06/2005-06/2006	2.5
06/2006-06/2007	2.8
06/2007-06/2008	6.3

Obrázek 8: Míra inflace.

Zdroj: Vlastní úprava podle [10].

V budoucím období se předpokládá míra inflace 4% a platby se budou diskontovat roční úrokovou sazbou 0.75%. Za uvedených předpokladů, použitím řetězové žebříkové metody je možné odhadnout rezervu na nevyplacené škody k 31.12.2008.

Nejprve se přepočítá plnění z původních dat na úroveň cen k 31. 12. 2008 tak, že se vynásobí mírami inflace za všechny předcházející roky (Obrázek 8) až po poslední vývojový rok a uspořádají se do další tabulky (Obrázek 9).

$118 = 100 * 1.001 * 1.028 * 1.019 * 1.025 * 1.028 * 1.063$

$16 = 15 * 1.063$

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	118	100	65	63	38	16
2004	1	131	113	75	71	45	
2005	2	144	131	87	79		
2006	3	167	151	107			
2007	4	189	163				
2008	5	201					

Obrázek 9: Nekumulativní forma pojistného plnění upravená o inflaci

Zdroj: Vlastní výpočty.

Nyní se u těchto údajů, jako v předchozím příkladě u řetězové žebříkové metody vypočítá kumulativní plnění (Obrázek 2) a následně se odhadnou koeficienty vývoje $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_5$ (Obrázek 3).

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	118	218	283	346	384	400
2004	1	131	244	319	390	434	452
2005	2	144	275	363	442	491	512
2006	3	167	318	425	519	577	601
2007	4	189	352	463	566	629	655
2008	5	201	378	497	607	676	703
			1406	1389	1177	818	400
		748	1055	964	735	384	
Koeficienty vývoje			1.880	1.317	1.221	1.113	1.041

Obrázek 10: Kumulované hodnoty, výpočet pod diagonálou a dopočítání koeficientů vývoje

Zdroj: Vlastní výpočty.

Odhadnuté vývojové koeficienty se použijí na doplnění odhadnutých rezerv na nevyřízené škody v dolní části tabulky. Z kumulativních plnění pod hlavní diagonálou (Obrázek 10) se vypočítá nekumulativní plnění, tedy odhadnuté plnění v příslušném vývojovém roce (Obrázek 11).

Rok	i	Vývojový rok j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0						
2004	1						18
2005	2					50	20
2006	3			94	58	24	
2007	4		112	102	64	26	
2008	5	177	120	110	68	28	

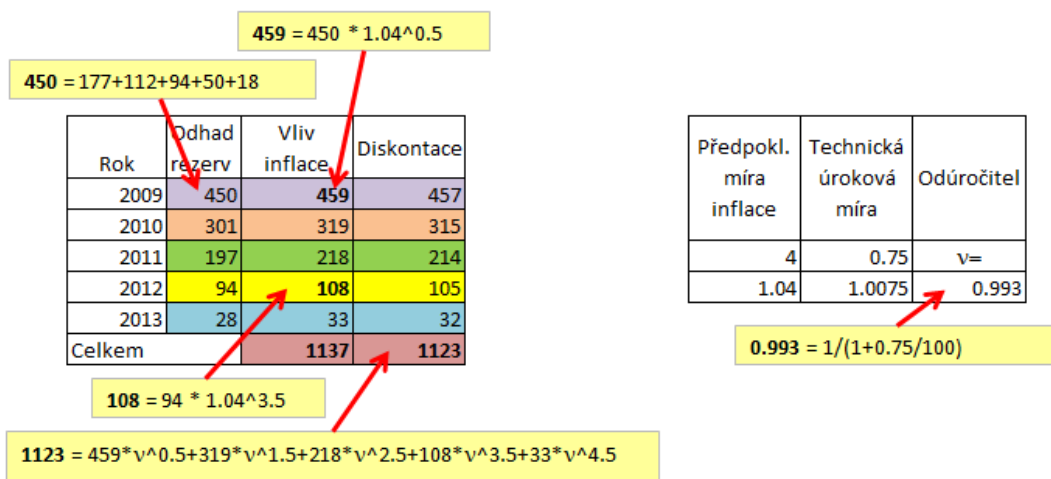
Obrázek 11: Nekumulativní plnění v příslušném vývojovém roce

Zdroj: Vlastní výpočty.

Odhad rezerv na nezpracované škody, které jsou potřebné v každém vývojovém roce, až do zpracování škod, vzniklých v každém z let 2003-2008, se zjistí jako součet odhadnutých plnění na diagonálách, vynásobených mírou inflace. Opět je tento postup barevně odlišen.

Celkové technické rezervy na vyplacené pojistné plnění jsou 1137 peněžních jednotek, tyto hodnoty jsou však odhadnuté vždy ke konci příslušného roku. Předpokládá-li se, že pojistná plnění jsou rovnoměrně rozdělená v celém roce, aproximuje se to tím, jako kdyby byly všechna pojistná plnění realizovaná uprostřed roku, tak vzhledem na korekci na pojistně-technickou úrokovou míru, budou se tyto hodnoty diskontovat postupně o ½ roku, o 1 ½, o 2 ½, 3 ½ a o 4 ½ roku.

$$\text{Odúročitel } v = \frac{1}{1+0.75\%}$$



Obrazek 12: Odhad pojistných rezerv k 31.12.2008

Zdroj: Vlastní výpočty.

Odhadnutá rezerva po diskontaci ke konci roku 2008 by měla být 1123 peněžních jednotek.

3.4 Separační metoda

3.4.1 Charakteristika a postup

Východiskem separační metody je trojúhelník pojistných plnění $P_{i,j}$, vykonaných v každém vývojovém roce j a definovaných vztahem $P_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ pro $j \geq 1$, $P_{i,0} = C_{i,0}$. Na rozdíl od předcházejících metod je znám počet škod n_i , které byly zaznamenány v každém roce vzniku i . Kdyby neexistovala inflace, v každém vývojovém roce j by byl z celkové škody bez ohledu na rok vzniku plnění i vyplacen konstantní podíl r_j a v celém sledovaném období se neměnila průměrná výška c individuální škody. Symbolem λ_{i+j} je označena výška skutečné průměrné individuální škody v roce $i + j$, přičemž i je rok vzniku a j je vývojový rok pojistných plnění. Hodnoty λ_{i+j} jsou konstantní na každé diagonále trojúhelníkového schéma. Při těchto předpokladech platí

$$P_{i,j} = n_i r_i \lambda_{i+j}$$

Rozdíl hodnot λ_{i+j} v různých kalendářních letech je způsobený změnou míry inflace.

Přehlednou formou zápisu plnění $P_{i,j}$, vyjádřených vztahem $P_{i,j} = n_i r_i \lambda_{i+j}$ je tabulka 6.

Tabulka 6: Forma zápisu plnění $P_{i,j}$

Rok vzniku i	n_i	Vývojový rok j					
		0	1	...	n-2	n-1	n
0	n_0	$n_0 r_0 \lambda_0$	$n_0 r_1 \lambda_1$...	$n_0 r_{n-2} \lambda_{n-2}$	$n_0 r_{n-1} \lambda_{n-1}$	$n_0 r_n \lambda_n$
1	n_1	$n_1 r_0 \lambda_1$	$n_1 r_1 \lambda_2$...	$n_1 r_{n-2} \lambda_{n-1}$	$n_1 r_{n-1} \lambda_n$	
2	n_2	$n_2 r_0 \lambda_2$	$n_2 r_1 \lambda_3$...	$n_2 r_{n-2} \lambda_n$		
⋮		⋮	⋮	⋮			
n-1	n_{n-1}	$n_{n-1} r_0 \lambda_1$	$n_{n-1} r_1 \lambda_n$				
n	n_n	$n_n r_0 \lambda_n$					

Ze znalosti hodnot $P_{i,j}$ v tabulce 6 se nejdříve odhadnou hodnoty r_0, r_1, \dots, r_n a pomocí nich hodnoty $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Tyto odhady se využijí na doplnění pravé dolní části tabulky 6.

Zřejmě platí $r_0 + r_1 + \dots + r_n = 1$, neboť n je maximální počet roků potřebných na zlikvidování škody.

Plnění na každé diagonále tabulky 6 jsou vykonaná ve stejném kalendářním roce, proto z vývoje hodnot $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ je možné posoudit vývoj míry inflace.

Aby se odstranil vliv hodnot n_i na výšku plateb, bude se dále analyzovat matice standardizovaných hodnot

$$S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j} \text{ pro } i, j \geq 0, i+j \leq n$$

které jsou v tabulce 7.

Tabulka 7: Matice standardizovaných hodnot

Rok vzniku i	Vývojový rok j						
	0	1	...	j	...	n-1	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$...	$S_{0,j}$...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$...	$S_{1,j}$...	$S_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$...	$S_{i,j}$			
⋮	⋮	⋮					
n-1	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$					
n	$S_{n,0}$						

Další formou zápisu hodnot v tabulce 7, vhodnější pro další postup odhadu, je tabulka 8.

Hodnoty r_j pro $j = 0, 1, \dots, n$ a λ_{i+j} pro $0 \leq i + j \leq n$ jsou odhadnuty následujícím způsobem.

Symbolem d_i se označí vstupy na i -té diagonále tabulka 7 pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom

$$\begin{aligned} d_n &= S_{n,0} + S_{n-1,1} + \dots + S_{1,n-1} + S_{0,n} = r_0 \lambda_n + r_1 \lambda_n + \dots + r_{n-1} \lambda_n + r_n \lambda_n \\ &= \lambda_n (r_0 + r_1 + \dots + r_n) = \lambda_n \end{aligned}$$

Tedy d_n je odhadem λ_n symbolicky zapsané $\hat{\lambda}_n = d_n$

Jediný vstup v trojúhelníku v tabulce 6 a v tabulce 7, které obsahuje r_n , je $S_{0,n} = r_n \lambda_n$, z kterého dostaneme odhad \hat{r} ve tvaru

$$\hat{r}_n = \frac{S_{0,n}}{\hat{\lambda}_n}$$

Podobně

$$\begin{aligned} d_n &= S_{n-1,0} + S_{n-2,1} + \dots + S_{1,n-1} + S_{0,n} = r_0 \lambda_{n-1} + r_1 \lambda_{n-1} + \dots + r_{n-1} \lambda_{n-1} \\ &= \lambda_{n-1} (r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1}) = \lambda_{n-1} (1 - r_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n}$$

Z údajů ve vývojovém roce $(n - 1)$ se dostane odhad \hat{r}_{n-1} , protože podle tabulky 7 a tabulky 8 platí

$$S_{0,n-1} + S_{0,n-1} = r_{n-1} (\lambda_{n-1} + \lambda_n) \Rightarrow$$

$$\hat{r}_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{0,n-1}}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$$

Tabulka 8: Vhodnější forma zápisu hodnot

Rok vzniku i	Vývojový rok j				
	0	1	...	n-1	n
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$...	$r_{n-1}\lambda_{n-1}$	$r_n\lambda_n$
1	$r_0\hat{\lambda}_1$	$r_1\hat{\lambda}_2$...	$r_{n-1}\hat{\lambda}_n$	
⋮	⋮	⋮	⋮		
n-1	$r_0\lambda_{n-1}$	$r_1\lambda_n$			
n	$r_0\lambda_n$				

Analogicky se sečtou d_{n-2} prvků další diagonály tabulky 8 a dostaneme odhad

$$\hat{\lambda}_{n-2} = \frac{d_{n-2}}{1 - \hat{r}_n - \hat{r}_{n-1}}$$

Tímto postupem se pokračuje, dokud se nezískají všechny odhady $\hat{\lambda}_n, \hat{\lambda}_{n-1}, \dots, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_0$, jako i $\hat{r}_n, \hat{r}_{n-1}, \dots, \hat{r}_1, \hat{r}_0$.

Předpokládá se, že v dalších n letech bude inflace stejná. Potom

$$\hat{\lambda}_{n+i} = \hat{\lambda}_n \cdot (1 + \text{míra inflace})^i, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\hat{S}_{i,j} = \hat{r}_j \cdot \hat{\lambda}_{i+j}, n < i + j \leq 2n$$

$$\hat{P}_{i,j} = \hat{S}_{i,j} \cdot N_i.$$

Vypočítá se velikost technických rezerv podle vztahu

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n \hat{P}_{i,j}.$$

3.4.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv

Údaje v tabulce se týkají určitého typu neživotního pojištění. Všechna vyplacená plnění jsou v peněžních jednotkách a víme, že všechna plnění jsou vyřízena do konce vývojového roku 5. Při předpokládané roční míře inflace na další roky 4%, separační metodou se odhadnou technické rezervy na pojistná plnění z pojistných událostí, které vznikly v letech 2004 až 2008 a budou vyplacené v následujících pěti letech.

Rok	i	Počet škod N _i	Vývojový rok j					
			0	1	2	3	4	5
2003	0	1980	100	85	57	57	35	15
2004	1	1860	111	99	67	65	42	
2005	2	1840	127	117	80	74		
2006	3	2060	149	138	101			
2007	4	2143	173	154				
2008	5	2198	189					

Obrázek 13: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění

Zdroj: Vlastní úprava podle [12], [19].

Nekumulativní hodnoty (Obrázek 13) se přepočítají na standardizované hodnoty podle vztahu $S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{N_i}$, výsledek a postup je zobrazen na obrázku 14 hodnoty jsou z tabulky na obrázku 13.

Rok	i	Počet škod N _i	Vývojový rok j					
			0	1	2	3	4	5
2003	0	1980	0.05056	0.04313	0.02869	0.02854	0.01753	0.00747
2004	1	1860	0.05984	0.05323	0.03608	0.03484	0.02269	
2005	2	1840	0.06875	0.06348	0.04348	0.04043		
2006	3	2060	0.07233	0.06714	0.04888			
2007	4	2143	0.08049	0.07168				
2008	5	2198	0.08594					

Obrázek 14: Matice standardizovaných hodnot S_{i,j}

Zdroj: Vlastní výpočty.

Nyní je možné vypočítat součty sloupců c_j a součty diagonály d_i (viz. Obrázek 15). Barveně jsou zvýrazněny diagonály, jejichž hodnoty se sečetly a stejnou barvu má i výsledek, který se získal sečtením hodnot. Potom se vypočítají odhady $\hat{\lambda}_n, \hat{\lambda}_{n-1}, \dots, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_0$ a $\hat{r}_n, \hat{r}_{n-1}, \dots, \hat{r}_1, \hat{r}_0$, takto:

$$d_5 = \hat{\lambda}_5,$$

$$\hat{r}_5 \hat{\lambda}_5 = c_5 \Rightarrow \hat{r}_5 = \frac{c_5}{\hat{\lambda}_5}$$

$$d_4 = \hat{\lambda}_4(1 - \hat{r}_5) \Rightarrow \hat{\lambda}_4 = \frac{d_4}{1 - \hat{r}_5}$$

$$\hat{r}_4(\hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5) = c_4 \Rightarrow \hat{r}_4 = \frac{c_4}{\hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5}$$

$$d_3 = \hat{\lambda}_3(1 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5) \Rightarrow \hat{\lambda}_3 = \frac{d_3}{1 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5}$$

$$\hat{r}_3(\hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5) = c_3 \Rightarrow \hat{r}_3 = \frac{c_3}{\hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5}$$

$$d_2 = \hat{\lambda}_2(1 - \hat{r}_3 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5) \Rightarrow \hat{\lambda}_2 = \frac{d_2}{1 - \hat{r}_3 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5}$$

$$\hat{r}_2(\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5) = c_2 \Rightarrow \hat{r}_2 = \frac{c_2}{\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5}$$

$$d_1 = \hat{\lambda}_1(1 - \hat{r}_2 - \hat{r}_3 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5) \Rightarrow \hat{\lambda}_1 = \frac{d_1}{1 - \hat{r}_2 - \hat{r}_3 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5}$$

$$\hat{r}_1(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5) = c_1 \Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{c_1}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 + \hat{\lambda}_5}$$

Nakonec

$$\hat{r}_0 = 1 - \hat{r}_2 - \hat{r}_3 - \hat{r}_4 - \hat{r}_5$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{d_0}{\hat{r}_0}$$

Další hodnoty $\hat{\lambda}_n$ pro $i=6,7,8,9,10$ se dopočítají podle vztahu

$$\hat{\lambda}_{5+i} = \hat{\lambda}_5 \cdot (1 + \text{mira inflace})^i, i = 1,2,3,4,5$$

Po doplnění se dostanou hodnoty na obrázku 15.

i	Rok	Počet škod N_i	Vývojový rok j					$\hat{\lambda}_{ij}$	
			0	1	2	3	4		5
0	2003	1980	0.05056	0.04313	0.02869	0.02854	0.01753	0.00747	0.15456
1	2004	1860	0.05984	0.05323	0.03608	0.03484	0.02269		0.17364
2	2005	1840	0.06875	0.06348	0.04348	0.04043			0.19863
3	2006	2060	0.07233	0.06714	0.04888				0.22349
4	2007	2143	0.08049	0.07168					0.25022
5	2008	2198	0.08594						0.27710
6	součty sloupců c		0.41791	0.29865	0.15712	0.10381	0.04021	0.00747	0.28818
7	součty diagonaly d		0.05056	0.10297	0.15066	0.20042	0.24347	0.27710	0.29971
8	0.10297 = 0.05984 + 0.04313								0.31170
9									0.32417
10									0.33713
r_j			0.32710	0.26592	0.16549	0.13826	0.07626	0.02698	

0.19863 = 0.15066 / (1 - 0.13826 - 0.07626 - 0.02698)

0.31170 = 0.27710 * (0.04)³

0.27710 = d₅

Předpokládaná míra inflace 4%

0.16549 = 0.15712 / (0.19863 + 0.22349 + 0.22349 + 0.25022 + 0.27710)

Obrázek 15: Výpočet vývojových koeficientů a podílů pojistných plnění

Zdroj: Vlastní výpočty.

Podíl pojistných plnění r_j ve vývojovém roce j s rostoucím j klesá, $\hat{r}_0 > \hat{r}_1 > \dots > \hat{r}_5$ což standardně odpovídá realitě. Naopak, průměrná výška pojistné plnění $\hat{\lambda}_i$ s rostoucím i roste, což vyjadřuje inflaci.

Dále se vypočítá $S_{i,j}$ pod diagonálou, pomocí vztahu $S_{i,j} = r_j \lambda_{i+j}$, výsledek je zobrazen na obrázku 16, např. hodnota $S_{5,1} = r_1 \lambda_6 = 0.26592 \cdot 0.28818 = 0.70663$.

i	Rok	Počet škod N_i	Vývojový rok j					λ_{i+j}	
			0	1	2	3	4		5
0	2003	1980	0.05056	0.04313	0.02869	0.02854	0.01753	0.00747	0.15456
1	2004	1860	0.05984	0.05323	0.03608	0.03484	0.02269	0.00777	0.17364
2	2005	1840	0.06875	0.06348	0.04348	0.04043	0.02198	0.00808	0.19863
3	2006	2060	0.07233	0.06714	0.04888	0.03984	0.02286	0.00841	0.22349
4	2007	2143	0.08049	0.07168	0.04769	0.04144	0.02377	0.00874	0.25022
5	2008	2198	0.08594	0.07663	0.04960	0.04310	0.02472	0.00909	0.27710
6	součty sloupců c		0.41791	0.29865	0.15712	0.10381	0.04021	0.00747	0.28818
7	součty diagonaly d		0.05056	0.10297	0.15066	0.20042	0.24347	0.27710	0.29971
8	0.70663 = 0.26592 * 0.28818								0.31170
9									0.32417
10									0.33713
r_j			0.32710	0.26592	0.16549	0.13826	0.07626	0.02698	

Obrázek 16: Výpočet standardizovaných hodnot $S_{i,j}$ pod diagonálou

Zdroj: Vlastní výpočty.

Po tomto výpočtu se hodnoty přepočtou zpět na pojistné plnění na pojistné události vzniklé v roce i a zaplacené ve vývojovém roce j , tedy vypočítá se $P_{i,j} = S_{i,j} \cdot N_i$ (Obrázek 17), např. $P_{5,3} = S_{5,3} \cdot N_5 = 0.04310 \cdot 2198 = 95$.

Rok	i	Počet škod N_i	Vývojový rok j					
			0	1	2	3	4	5
2003	0	1980						
2004	1	1860						14
2005	2	1840					40	15
2006	3	2060			82	47	17	
2007	4	2143		102	89	51	19	
2008	5	2198	168	109	95	54	20	

95 = 2198 * 0.04310

Obrázek 17: Přepočtení na skutečné platby P_{ij}

Zdroj: Vlastní výpočty.

Po sečtení diagonály (podle barev na Obrázek 17) se zjistí technické rezervy na pojistná plnění vyplacené v roce 2009 – 2013. Odhadnutá rezerva ke konci roku 2008 by měla být 923 peněžních jednotek (Obrázek 18).

Rok	Odhad rezerv
2009	408
2010	260
2011	163
2012	73
2013	20
Celkem	923

163 = 95+51+17

Obrázek 18: Celkové rezervy na nevyplacené pojistné plnění

Zdroj: Vlastní výpočty.

3.5 Metoda Cape Cod

3.5.1 Charakteristika a postup

Metoda Cape Cod je nazvaná podle místa aktuárské konference, na níž byla prezentována. Bere se v ní v úvahu také škodní poměr, tj. podíl pojistného plnění a pojistného. Přitom jsou-li řádky vývojového trojúhelníku tvořeny podle roku vzniku pojistných událostí (resp. podle roku uzavření pojištění), pak se použije zasloužené (resp. předepsané) pojistné.

Metoda Cape Code využívá pro výpočet stejné vstupní údaje jako základní řetězová žebříková metoda, avšak podobně jako separační metoda, i tato vyžaduje určité doplňující údaje, a to výšku pojistného. V případě škod uspořádaných podle roku vzniku potřebujeme výšku zaslouženého pojistného v případě, jestliže uvažujeme s obdobím, kdy byla smlouva sepsána (tzv. underwriting year).

Postup

Základem jsou nekumulovaná pojistná plnění, které se přepočítá na kumulované hodnoty (Tabulka 9), jako v předchozích metodách.

Tabulka 9: Celkové kumulativní pojistné plnění.

Rok vzniku i	Vývojový rok j						
	0	1	2	...	n-2	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,n-2}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$					
n	$C_{n,0}$						

Pro další výpočet je potřeba znát:

1. **Dosavadní pojistné**, což jsou hodnoty z vedlejší diagonály d_n , pro rok vzniku i to znamená, že prvek diagonály v roce i je $d_i = C_{i,n-i}$, pro $i = 0,1, \dots, n$, kde n je počet vývojových let.
2. Dopočítají se hodnoty pod diagonálou, jako u řetězové žebříkové metody.
3. Nyní se vypočítají **Inverzní koeficienty**. Pomocí posledního roku vývoje pro každý rok vzniku. Tedy $K_i = \frac{C_{i,n}}{C_{i,n-i}}$, pro $i = 0,1, \dots, n$.
4. **Doplněk inverzního koeficientu**: $K'_i = 1 - \text{inverzní koeficient}$.
5. **Upravené pojistné** = zasloužené pojistné * K_i .
6. **Dlouhodobý škodní poměr** = součet $K_i \div$ součet upraveného pojistného.
7. **Odhadovaná rezerva** = dlouhodobý škodní poměr * zasloužené pojistné * K'_i .

3.5.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv

Vychází se z tabulky ve formě nekumulativních hodnot pojistných plnění (Obrázek 19) při určitém typu neživotního pojištění ve vývojových letech 0,1, ... 5, přičemž se předpokládá, že všechny pojistné nároky při tomto typu pojištění se zlikvidují do konce páteho roku po roku vzniku pojistné události. Pro další výpočty je potřeba znát i výši zaslouženého pojistného. Pomocí této metody se vypočítá výše technických rezerv, kterou je potřeba vytvořit ke konci roku 2008.

Rok vzniku	i	Rok vývoje j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	85	57	57	35	15
2004	1	111	99	67	65	42	
2005	2	127	117	80	74		
2006	3	149	138	101			
2007	4	173	154				
2008	5	189					

Obrázek 19: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.

Zdroj: Vlastní úprava podle [19].

Pro další výpočty je nutné dopočítat kumulované hodnoty (Obrázek 2). Z této tabulky se pak zjistí dosavadní pojistné plnění, které je na hlavní diagonále (Obrázek 20, vyznačeno žlutě). Vypočítají se vývojové koeficienty (jako u řetězové žebříkové metody

viz. Obrázek 3), pomocí nich pak hodnoty pod diagonálou (Obrázek 4) a dále se spočítají inverzní koeficienty $K_i = \frac{C_{i,n}}{C_{i,n-i}}$, pro $i = 0,1, \dots, n$, které jsou na Obrázek 21.

Rok vzniku	i	Rok vývoje j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	186	242	299	334	348
2004	1	111	210	277	342	384	401
2005	2	127	243	323	398	445	465
2006	3	149	287	388	478	535	559
2007	4	173	326	433	534	598	625
2008	5	189	359	477	587	658	687
			1253	1231	1039	718	348
		659	926	843	641	334	
		Vývojové koeficienty	1.899	1.329	1.232	1.120	1.044

Obrázek 20: Pomocné výpočty pro výpočet inverzních koeficientů

Zdroj: Vlastní výpočty.

Vypočítané hodnoty se doplní do přehledné tabulky (Obrázek 21). Potom se dopočítá **doplňek inverzního koeficientu** ($1 - K_i$), dále se **upraví pojistné** aby bylo porovnatelné s dosavadním pojistným plněním (= zasloužené pojistné * K_i) a **dlouhodobý škodní poměr** (celkové dosavadní pojistné plnění ÷ celkové upravené pojistné). Dále se vypočítají odhadnuté rezervy pro jednotlivé roky (dlouhodobý škodní poměr * zasloužené pojistné * doplňek inverzního koeficientu), jejichž součet je konečná odhadnutá výše rezerv, tedy 815 peněžních jednotek. Všechny tyto zmíněné výpočty jsou zobrazeny na obrázku 21. Odhadnutá rezerva ke konci roku 2008 by měla být ve výši 815 peněžních jednotek.

Rok vzniku	i	Zasloužené pojistné	Dosavadní pojistné plnění	Inverzní koeficienty K_i	Doplňek K_i	Upravené pojistné	Odhadnutá rezerva
2003	0	2358	348	1.000	0.000	2358	0
2004	1	2380	384	0.958	0.042	2279	20
2005	2	2496	398	0.855	0.145	2134	71
2006	3	2463	388	0.694	0.306	1709	147
2007	4	2400	326	0.522	0.478	1253	224
2008	5	2503	189	0.275	0.725	688	354
Součty			2033			10421	815

Dlouhod. škodní poměr
 $0.1951 = 2033/10421$

$0.958 = 384/401$

Konečný odhad rezervy je 815

$0.042 = 1 - 0.958$

Dlouhodobý škodní poměr * zasloužené pojistné * doplňek inverzního faktoru, tj. 71 = $0.1951 * 2496 * 0.145$

Obrázek 21: Výpočet výšky technických rezerv

Zdroj: Vlastní výpočty. Data upravená podle [9].

3.6 Bornhuetterova-Fergusonova metoda

3.6.1 Charakteristika a postup

Tato metoda se podobá metodě Cape Cod až na to, že pracuje s individuálními škodními průběhy. Jejím základem je už zmíněná základní řetězová žebříková metoda, avšak B-F metoda dále zohledňuje skutečnost, že v trojúhelníku údajů za delší časové období se určitě bude škodové procento výrazně lišit z roku na rok. Proto hlavní otázkou v této metodě je správné stanovení škodového procenta.

Postup:

Základem jsou opět nekumulovaná pojistná plnění, které se přepočítá na kumulované hodnoty, tak jako u všech předchozích metod.

Pro další výpočet je potřeba znát:

1. Dosavadní pojistné, což jsou hodnoty z vedlejší diagonály d_n , pro roku i , to znamená, že prvek diagonály v roce i je $d_i = C_{i,n-i}$, pro $i = 0, 1, \dots, n$, kde n je počet vývojových let.
2. Dopočítáme si hodnoty pod diagonálou, jako u řetězové žebříkové metody.
3. Nyní si vypočítám Inverzní koeficienty. Pomocí posledního roku vývoje pro každý rok vzniku. Tedy $K_i = \frac{C_{i,n}}{C_{i,n-i}}$, pro $i = 0, 1, \dots, n$.
4. Celkové škodové průběhy – dopočítá se pod diagonálu extrapolace těchto škodních průběhů v jednotlivých sloupcích. Pro rok vývoje i se předpovídá průměrem z hodnot sloupce, které mají srovnatelnou velikost. V každém řádku se pak škodní průběhy sečtou.
5. Doplněk inverzního faktoru: $K'_i = 1 - \text{inverzní koeficient}$.
6. Odhadovaná rezerva = dlouhodobý škodní poměr * celkové škodní průběhy * doplněk inverzního koeficientu.

3.6.2 Ukázka aplikace metody stanovení technických rezerv

Vychází se z tabulky ve formě nekumulativních hodnot pojistných plnění (Obrázek 22) při určitém typu neživotního pojištění ve vývojových letech 0, 1, ... 5, přičemž se před-

pokládá, že všechny pojistné nároky při tomto typu pojištění se zlikvidují do konce pá-
tého roku po roku vzniku pojistné události. Pro další výpočty je potřeba zná i výši za-
slouženého pojistného. Pomocí této metody se vypočítá výše technických rezerv,
kterou je potřeba vytvořit ke konci roku 2008.

Rok vzniku	i	Rok vývoje j					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	100	85	57	57	35	15
2004	1	111	99	67	65	42	
2005	2	127	117	80	74		
2006	3	149	138	101			
2007	4	173	154				
2008	5	189					

Obrázek 22: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.

Zdroj: Vlastní úprava podle [19].

Pro další výpočty je potřeba stejně jako u řetězové žebříkové metody dopočítat, kumu-
lované hodnoty (Obrázek 2), vývojové koeficienty (Obrázek 3) a pomocí nich dopočítat
hodnoty pod hlavní diagonálou (Obrázek 4).

Rok vzniku	i	Zasloužené pojistné	Rok vývoje j					
			0	1	2	3	4	5
2003	0	2358	100	186	242	299	334	348
2004	1	2380	111	210	277	342	384	401
2005	2	2496	127	243	323	398	445	465
2006	3	2463	149	287	388	478	535	559
2007	4	2400	173	326	433	534	598	625
2008	5	2503	189	359	477	587	658	687
				1253	1231	1039	718	348
			659	926	843	641	334	
Vývojové koeficienty				1.899	1.329	1.232	1.120	1.044

Obrázek 23: Pomocné výpočty pro výpočet inverzních koeficientů

Zdroj: Vlastní výpočty.

Dále se vypočítají celkové škodní průběhy, tak že se dopočítá pod diagonálu extrapola-
ce těchto škodních průběhů v jednotlivých letech vývoje j (tj. v jednotlivých sloupcích).
Pro rok vývoje j se předpovídá průměrem všech hodnot ze sloupce, další hodnoty pro
následující rok i ve sloupci jsou pak hodnoty stejné, jak je znázorněno na obrázku 24.
V každém z řádků se pak tyto škodní průběhy sečtou, viz Obrázek 24.

Rok vzniku	i	Rok vývoje j						Celkový škodní
		0	1	2	3	4	5	
2003	0	0.042	0.036	0.024	0.024	0.015	0.000	0.141
2004	1	0.047	0.042	0.028	0.027	0.018	0.000	0.162
2005	2	0.051	0.047	0.032	0.030	0.016	0.000	0.176
2006	3	0.060	0.056	0.041	0.027	0.016	0.000	0.201
2007	4	0.072	0.064	0.031	0.027	0.016	0.000	0.210
2008	5	0.075	0.049	0.031	0.027	0.016	0.000	0.199

$$0.049 = (0.036 + 0.042 + 0.047 + 0.056 + 0.064) / 5$$

$$0.210 = 0.072 + 0.64 + 0.031 + 0.027 + 0.016 + 0$$

Obrázek 24: Výpočet celkových škodních průběhů a jejich extrapolace

Zdroj: Vlastní výpočty.

Nyní se uspořádají všechny výpočty do tabulky, která je znázorněná na obrázku 25. Inverzní koeficienty se vypočítaly opět stejným způsobem, jako u metody Cape Cod z tabulky na obrázku 23 (např. v roce 2004 je inverzní koeficient $0.958 = 384/401$).

Rok vzniku	i	Zasloužené pojistné	Celkové škod. Průběhy	Inverzní koeficienty K_i	Doplňek K_i	Odhadnutá rezerva
2003	0	2358	0.141	1.000	0.000	0
2004	1	2380	0.162	0.958	0.042	16
2005	2	2496	0.176	0.855	0.145	64
2006	3	2463	0.201	0.694	0.306	151
2007	4	2400	0.210	0.522	0.478	241
2008	5	2503	0.199	0.275	0.725	361
součty						834

$$16 = 2380 * 0.612 * 0.042$$

odhadnuta rezerva ve výši 834

Obrázek 25: Výpočet výše technických rezerv

Zdroj: Vlastní výpočty. Data upravena podle [9].

Odhadnutá rezerva se pro každý rok vypočítá jako zasloužené pojistné * celkové škodní průběhy * doplněk inverzního koeficientu. Po sečtení všech let bude odhadnutá rezerva ke konci roku 2008 ve výši 834 peněžních jednotek.

3.7 Porovnání metod

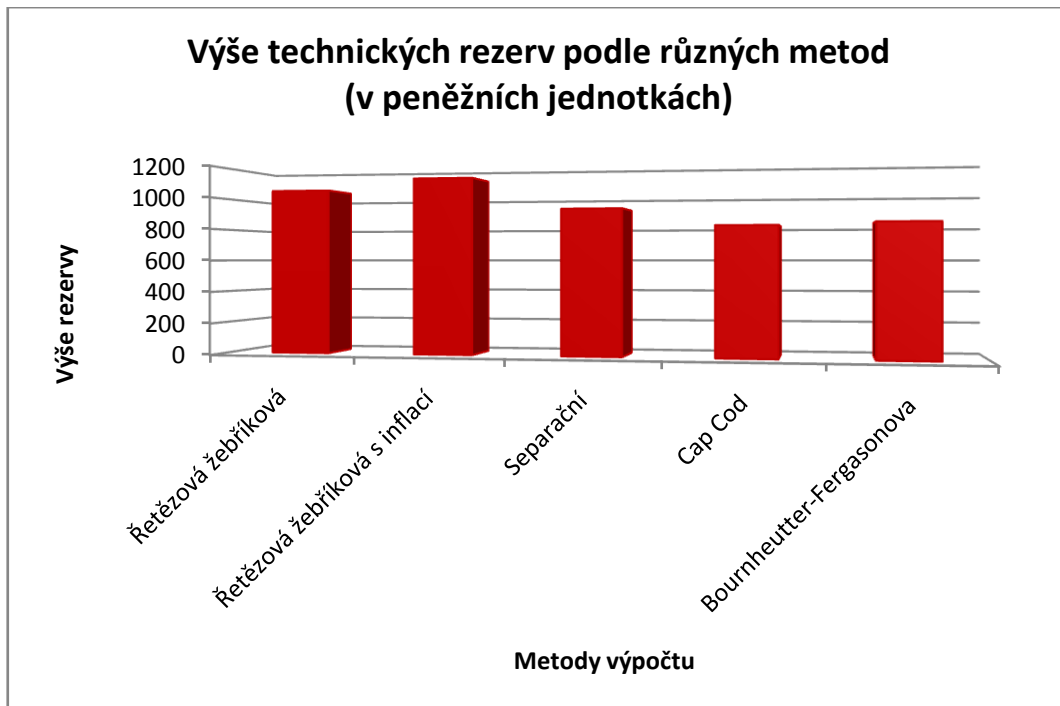
Výsledky všech metod jsou shrnuty do tabulky 10 a graficky znázorněny v grafu 3. Při porovnání výsledků všech použitých metod jsou vidět rozdíly. Některé metody používa-

jí kromě původních dat i doplňující data, např. počet škod, zasloužené pojistné či míru inflace a to pak dále ovlivňuje výsledek.

Tabulka 10: Celková výše technických rezerv - porovnání metod

Metoda	Odhadnutá rezerva ke konci roku 2008
Řetězová žebříková	1052
Řetězová žebříková s inflací	1123
Separáční	923
Cap Cod	815
Bournheutter-Fergasonova	834

Zdroj: Vlastní výpočty.



Graf 3: Porovnání metod odhadu výše technických rezerv

4 STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ TECHNICKÝCH REZERV

Při výpočtu rezerv IBNR se čím dál více hovoří o použití stochastických metod. Základem těchto metod je získání variability odhadovaných rezerv, tj. určení standardní odchylky a následné určení intervalů spolehlivosti pro odhadované rezervy [13].

Využívají se modely jako např. Lognormální, Over-dispersed Poisson (ODP), Gamma, ale i tzv. Mack model. Nejvyužívanějšími modely v procesu odhadování výšky rezerv jsou ODP a Gamma model, ale na jejich aplikaci je nutný speciální software. Lognormální model je naopak uživatelsky nejjednodušší, ale není možné ho aplikovat v případě, že máme data se zápornými hodnotami. Speciální případy ODP nebo Mackova modelu mohou vést ke stejným výsledkům jako při řetězové žebříkové metodě (Chain Ladder) [13].

Čím dál více populárnější stochastickou metodou se stává tzv. **Bootstrap metoda**, která umožňuje získat úplné rozdělení pravděpodobnosti odhadovaných rezerv. Bootstrapping je založený na mnohonásobných simulacích tzv. pseudo dat, jejichž výsledkem jsou stále nové odhady výšky rezerv. Jejich následnou sumarizací dostáváme výslednou hodnotu rezerv [13].

Následující dvě kapitoly (4.1 a 4.2) jsou zpracovány podle [18].

4.1 Bootstrap technika

Bootstrap technika je specifická metoda převzorkování hodnot, používaná k odhadu variability parametru. Tato metoda nahrazuje teoretickou dedukci ve statistické a to pomocí opakovaného převzorkování původních dat a vyvození závěru z těchto převzorkovaných dat.

Bootstrap technika je aplikovatelná v každé situaci. Pro lineární model (klasický nebo obecný) je možné použít jeden ze dvou způsobů:

- Párový bootstrap – Převzorkování hodnot je přímo z pozorování (hodnoty y a příslušné řádky matice X v regresním modelu),
- Reziduální bootstrap – Převzorkování hodnot je aplikováno do reziduálního modelu.

Navzdory skutečnosti, že párový bootstrap je robustnější než reziduální bootstrap, později by mohlo být zavádění v souvislosti se škodovými rezervami, dáno závislostí mezi některými pozorováními a odhady parametrů.

K použití bootstrap analýzy se musí zvolit model, který je potřeba k tomu, aby se definovala adekvátní rezidua a mohla být použita bootstrap procedura předpovědi.

K definování nejvíce odpovídajícího residua pro bootstrap je důležité pamatovat si dvě věci.

- Převzorkování hodnot je založeno na předpokladu (hypotéze), že rezidua jsou nezávislá a identicky rozdělená.
- Je jedno zda, se rezidua převzorkovávají nebo se dělí konstantou, pokud ovšem počítá s tvorbou pseudo (nepřesných) dat.

V rámci GLM (general linear model) je možné použít různé druhy reziduí (Pearson, deviance, Anscombe.). Výchozí bod bude Pearson rezidua definované

$$r_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - \hat{u}_{ij}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(Y_{ij})}} = \frac{y_{ij} - \hat{u}_{ij}}{\sqrt{\hat{\Phi}\hat{V}(\mu_{ij})}}$$

$\hat{\Phi}$ je konstanta pro datový soubor, můžeme využít druhého bodu a použít

$$r_{ij}^{(P^*)} = \frac{y_{ij} - \hat{u}_{ij}}{\sqrt{\hat{V}(\mu_{ij})}}$$

místo $r_{ij}^{(P)}$ v bootstrap proceduře, v této fázi se ignoruje rozsah parametru. Pokud se použije normální model, je možné vidět, že tyto rezidua jsou ekvivalentní, jako klasická rezidua, $y_{ij} - \hat{u}_{ij}$, pro $V(\mu_{ij}) = 1$.

Tato rezidua by měla být opravena, jsou-li dostupná data v kombinaci s lineární strukturou převzatou z modelu, který vede k reziduím s hodnotou 0 (jako v typických případech, $y_{1,n} = \hat{\mu}_{1,n}$ a $y_{n,1} = \hat{\mu}_{n,1}$). Tyto reziduály by neměly být považovány za základní rozdělení náhodné veličiny a proto by neměly být brány v úvahu v bootstrap procesu.

Je vhodnější pracovat se standardizovanými Pearsonovými rezidui, pouze pak může být považován za rovnoměrně rozložený. Standardizované Pearsnovo reziduum je dáno

$$r_{ij}^{(P^{**})} = \frac{r_{ij}^P}{\sqrt{1 - h_{ij}}}$$

kde faktor h_{ij} odpovídá prvku diagonály z „hat“ matice.

Pro „klasický“ lineární model, je matice dána

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T$$

a pro GLM to lze zobecnit užitím

$$H = X(X^T W X)^{-1} X^T W$$

kde W je diagonála matice s všeobecným prvky, které jsou dané:

$$w_{ii} = \left(V(\mu_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \right)^2 \right)^{-1}$$

Uvažuje-li se struktura modelu (logické spojení funkcí a kvasi distribucí), potom

$$w_{ii} = \mu_i^{2-K},$$

$K=1$ pro kvasi over dispersed Poisson a $K=2$ pro quasi gamma model.

Podobný postup by mohl být definován, pokud by se používal jiný druh rezidua, především odlišná rezidua.

K získání větší jistoty předpovědi nahromaděných hodnot je možné použít dva předpoklady (postupy):

První, využívá Centrální limitní větu, ta spočívá v aproximaci rozdělení rezervy prostřednictvím normálního rozdělení s předpokládanou hodnotou dané počáteční prognózy (s původními daty) a standardní odchylkou danou **standardní chybou odhadu**. Hlavní rozdíl mezi bootstrap odhadem těchto standardních chyb a teoretické aproximace se získá z předchozí části tak, že se odhadnou změny odhadce prostřednictvím bootstrap odhadu místo užití teoretického výrazu. Tento přístup se využívá pro škodové rezervy a návrhu korekce zkreslení pro bootstrap odhad umožňuje srovnání mezi bootstrap standardní chybou předpovědi a teoretickou aproximací. Bootstrap standardní chyba odhadu bude dána

$$SEP_b(\mu) = \sqrt{\widehat{\Phi}\hat{\mu} + \frac{N}{N-p} (SE_b(\hat{\mu}))^2}$$

kde μ značí řádek součtů, μ_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), nebo celkový souhrn, μ . $\widehat{\Phi}$ a $\hat{\mu}$ jako kvazi-maximum pravděpodobného odhadu odpovídajících parametrů, N je počet pozorování, p počet parametrů (obvykle $N = n(n-1)$ a $p = 2n-1$) zatímco $SE_b(\hat{\mu})$ je bootstrap odhad standardní chyby v odhadu $\hat{\mu}$,

$$SE_b(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{k=1}^B (\mu_k^* - \hat{\mu})^2}$$

kde B je počet bootstrap opakování a μ_k^* je bootstrap odhad μ v k -tém opakování ($k = 1, 2, \dots, B$).

Druhý přístup je více počítačově náročný, vyžaduje dva převzorkovací postupy ve stejném bootstrap „iterace“, ale výsledky by měly být robustnější vůči odchylkám od hypotézy (předpokladu) modelu. Cílem je definovat odpovídající **chybu předpovědi** jako funkci bootstrap odhadu a bootstrap simulace budoucí reality a zapsat hodnoty této chyby předpovědi pro každou bootstrap „iteraci“. Používáme požadovaný percentil z této chyby předpovědi a spočítáme to s původním odhadem získáním horní hranice odhadovaného intervalu.

4.2 Různé postupy bootstrap procesu

Fáze 1 – Příprava

- odhad parametrů modelu c, α_i, β_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) a Φ ,
- výpočet vhodných hodnot, $\hat{\mu}_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, n+1-i$),
- Výpočet reziduí $r_{ij} = h(y_{ij}, \hat{\mu}_{ij})$,
- prognózy s původními daty $\hat{\mu}_{ij}, \mu_{i\bullet}$ a μ_{\bullet} ($i = 2, \dots, n$ a $j = n+2-i, \dots, n$)

Fáze 2 – bootstrap smyčky (budeme opakovat B -krát)

Fáze 2.1 – Bootstrap odhady

- znovuzískání hodnot reziduí získaných ve fázi 1 (původní data) užitím náhrady $\rightarrow r_{ij}^*$
- vytvořit pseudo data y_{ij}^* , řešení $r_{ij} = h(y_{ij}^*, \hat{\mu}_{ij})$

- Odhad modelu s pseudo daty a získání bootstrap prognózy $\hat{\mu}_{ij}^*$, $\hat{\mu}_{i\bullet}^*$ a $\hat{\mu}_{\bullet}^*$
- stanovit bootstrap prognózy $\hat{\mu}_{i\bullet}^{(b)} = \hat{\mu}_{i\bullet}^*$ a $\hat{\mu}_{\bullet}^{(b)} = \hat{\mu}_{\bullet}^*$, b je index cyklu.

Fáze 2.2 – Pseudo realita (pouze pro proceduru 2)

- znovu nevzorkování reziduí získaných ve fázi 1 a vybrat (s náhradou) takové hodnot, které jsou „individuální“ prognózy, je třeba udělat $\rightarrow r_{ij}^{**}$, ($i = 2, \dots, n$ a $j = n + 2 - i, \dots, n$).
- vytvořit proud realitu, y_{ij}^{**} , řešení $r_{ij}^{**} = h(y_{ij}^{**}, \hat{\mu}_{ij})$ ($i = 2, \dots, n$ a $j = n + 2 - i, \dots, n$). $\hat{\mu}_{ij}$ jsou předpovědi získané ve fázi 1.
- Získat chybu předpovědi $r_{i\bullet}^{(b)} = h(y_{i\bullet}^{**}, \hat{\mu}_{i\bullet}^*)$ a $r_{\bullet}^{(b)} = h(y_{\bullet}^{**}, \hat{\mu}_{\bullet}^*)$ a udržet ji.
- návrat nazpátek fáze 2 dokud B opakování nebude dokončeno.

Fáze 3 – Bootstrap datová analýza

Fáze 3.1 (v podstatě pro proceduru 1)

- získat bootstrap odhad pro $var(\hat{\mu}_{i\bullet})$ a $var(\hat{\mu}_{\bullet})$, pomocí empirických rozptylů odpovídá B bootstrap odhadu. England a Verrla naznačují, že bychom mohli napravit zkreslení těchto odhadů jejich vynásobením faktoru výrazem $n/(n - p)$, n je počet pozorování v datovém trojúhelníku a p je počet parametrů v lineární struktuře.
- Aplikovat teoretické vyjádření standardní chyby předpovědi a využít těchto odhadů

Fáze 3.2 (jen pro proceduru 2)

- použitím percentilu $k\%$ bootstrap pozorovaných chyby předpovědi, např. pro celkový součet a získat odpovídající percentil stanoveného řešení $r_{\bullet,k}^* = h(y_{\bullet,k}^*, \hat{\mu}_{\bullet})$. $\hat{\mu}_{\bullet}$ je předpověď w původními daty (fáze 1).

ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývá metodami pro výpočet technických rezerv neživotní pojišťovny. Tyto metody stanovení výše rezerv se stále vyvíjejí a zdokonalují. Jsou založeny na matematicko-statistických metodách, které mají důležité uplatnění v pojišťovnictví, zejména vzhledem k dobrému prosperování pojišťovny.

V diplomové práci je uveden teoretický výklad matematicko-statistických metod pro určení výše pojistně technických rezerv. Teoretický výklad je doplněn prezentací výsledků z tabulkového procesoru MS Excel (příloha č. 1) v grafické podobě se slovním popisem.

První kapitola se zabývá neživotním pojištěním, technickými rezervami, jejich daňovými aspekty a významem technických rezerv pro pojišťovnu. Rezervy jsou základním prvkem řízení podniku, např. rentabilita a solventnost podniku je silně závislá právě na výši těchto rezerv. Většina z klíčových statistických analýz, které používají pojišťovny, jsou nějakým způsobem závislé na výši minimálních rezerv [1].

Druhá kapitola obsahuje charakteristiky pojistně technických rezerv. jejich členění dle zákona a dále podrobnější popis každé z druhů rezerv a zásady jejich investování. Tvoří se různé druhy rezerv, např.: matematické, výkyvové a rezervy spojené s časovým rozlišením přijatého pojistného. Členění rezerv ukládá pojišťovnám odst. 3 §13, zákona č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví. Neživotní pojišťovny tvoří tyto rezervy: rezervu na nezasloužené pojistné, na pojistná plnění, na pojistné prémie a slevy, pojistného neživotních pojištění, vyrovnávací rezervu a jiné rezervy.

Třetí kapitola je zaměřena na nejdůležitější rezervu neživotní pojišťovny a to na rezervu na pojistná plnění. Nejprve je rezerva blíže popsána a následně jsou uvedeny různé druhy metod výpočtu této rezervy. Tuto rezervu je možné dále rozdělit na IBNR (Incurred But Not Reported) což je u škod, které ještě nebyly v daném období nahlášený a RBNS (Reported But Not Settled), u škod, které jsou nahlášené, ale v daném období nevyplacené. Dále jsou uvedeny trojúhelníkové metody, ze kterých všechny výpočty vycházejí. V dalších podkapitolách je uvedeno pět metod, pomocí kterých lze odhadnout výši pojistně technických rezerv. Metody, které jsem blíže popsala, jsou: Řetězová žebříková metoda (Chain-Ladder), Řetězová žebříková metoda s inflačním vyrovnáním,

Separální metoda, metoda Cap Code a poslední metoda je Bornhuetter-Fergusonova. Všechny metody jsou vypracovány v tabulkovém procesoru MS Excel a pro výpočet jsem použila upravená data. U každé z těchto metod je uvedena její charakteristika a následně je vytvořen grafický postup výpočtu se slovním popisem.

Poslední kapitola je věnována stochastickému modelování technických rezerv. Využívají se zde stochastické metody, které jsou čím dál populárnější. Základem těchto metod je zohlednění variability odhadovaných rezerv. Používají se různé stochastické metody, ale nejpoužívanější metodou se stává tzv. bootstrap metoda, která umožňuje získat úplné rozdělení pravděpodobnosti odhadovaných rezerv. V dalších podkapitolách je tato technika blíže popsána včetně různých postupů bootstrap procesu.

Při porovnání výsledků všech použitých metod byly znát značné rozdíly. Některé metody používají kromě původních dat, z kterých vycházejí všechny metody i doplňující data, např. počet škod, zasloužené pojistné či míru inflace a to pak dále ovlivňuje výsledek. Proto se stále nejvíce používá základní a nejjednodušší metoda výpočtu - metoda Chain Ladder, která vychází z pojistných plnění a není ničím jiným ovlivněna.

SEZNAM LITERATURY

- [1] BOOTH, Philip, CHADBURN, Robert, HABERMAN, Steven. *Modern actuarial theory and practice*. 2nd edition. Chapman&Hall/CRC: CRC Press, 2004. 799 s.
- [2] CIPRA, Tomáš. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha: Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633-X.
- [3] CIPRA, Tomáš. *Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha: Ekopress, s.r.o., 2002. 271 s. ISBN 80-86119-54-8.
- [4] CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, s.r.o., 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.
- [5] ČEJKOVÁ, Viktória, NEČAS, Svatopluk, ŘEZÁČ, František. *Pojistná ekonomika*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003. 145 s. ISBN 80-210-3288-X.
- [6] Česká asociace pojišťoven: *Solvency II ?! – Stručné shrnutí současného stavu, očekávaného vývoje a předpokládaných dopadů pro pojišťovny v ČR*. [online]. [cit. 2009-03-16]. Dostupné na WWW: http://www.skvara.cz/__cw_files/poji%C5%A1t%C4%9Bn%C3%AD/solvencyII/.10/.07/.abe645bf575778fda76cc843d938629e1150540710/SolvencyII.doc
- [7] Česká asociace pojišťoven: *Statistické údaje / Roční* [online]. 2007-2008 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW: http://www.cap.cz/Zpravy.aspx?list=DOKUMENTY_02&zobrazeni=pro+web+pravideln%C3%A9+ro%C4%8Dn%C3%AD+statistiky
- [8] Česká asociace pojišťoven: *Výroční zprávy* [online]. 2007-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW: http://www.cap.cz/Zpravy.aspx?list=DOKUMENTY_01&zobrazeni=pro+web+V%C3%BDro%C4%8Dn%C3%AD+zpr%C3%A1vy
- [9] Česká pojišťovna: *Výroční zprávy* [online]. c2008 [cit. 2009-03-27]. Dostupný z WWW: http://www.ceskapojistovna.cz/files/vyrocní_zpravy/VZ07_konsolidovana-19-19.pdf
- [10] Český statistický úřad: *Míra inflace* [online]. 2009 [cit. 2009-03-27]. Dostupný z WWW: http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mira_inflace
- [11] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.

- [12] FECENKO, Jozef. Neživotné poistenie. 1. vyd. Bratislava : Ekonóm, 2006. 200 s. ISBN 80-225-2191-4.
- [13] FUNGÁČOVÁ, Martina. *PRIEREZ METÓDAMI POUŽÍVANÝMI NA VÝPOČET IBNR REZERVY V NEŽIVOTNOM POISTENÍ*. [s.l.] : Allianz - Slovenská poisťovňa, a. s., 2007. s. 5. Dostupný z WWW: <<http://www.speednet.sk/users/cerco/zbornik/poi2007/prisp/Fungacova.pdf>>
- [14] KAAS, Rob. *Modern actuarial risk theory*. Dordrecht: Kluwer Academic , 2001. 306 s. ISBN 1-4020-2952-7.
- [15] MAJTÁNOVÁ, Anna. Poist'ovníctvo : teória a prax. 1. vyd. Praha : Ekopress, c2006. 288 s. ISBN 80-86929-19-1
- [16] *Měšec.cz : Kdo vás smí pojistit?* [online]. c1999-2009 [cit. 2009-03-13]. Dostupný z WWW: <<http://www.mesec.cz/clanky/kdo-vas-smi-pojistit/>>
- [17] PACÁKOVÁ, Viera. Aplikovaná poistná štatistika. 3. dopl. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.
- [18] PINHEIRO, Paulo J. R., E SILVA, Joao Manuel Andrade, DE LOURDES CENTENO, Maria. Bootstrap Methodology in Claim Reserving. In *Centre for Applied Maths to Forecasting and Economic Decision*. [s.l.]: [s.n.], 2000. s. 13. Dostupný z WWW: <http://www.actuaires.org/ASTIN/Colloquia/Washington/Pinheiro_Silva_Centeno.pdf>.
- [19] *Run-off triangles*. [s.l.]: [s.n.], 2007. Dostupný z www: <<http://www.statistik.lmu.de/~kneib/risikotheorie/download/reserving.pdf>>.s. 3.
- [20] SEKERKA, Bohuslav. Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění. 1. vyd. Praha: Profess Consulting, 2002. 397 s. ISBN 80-7259-031-6.
- [21] *Vybrané souhrnné údaje - Česká národní banka: 2002_TR.pdf* [online]. 2003-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW: <http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dohled_pojistovny/souhrnne_udaje/download/2002_TR.pdf>
- [22] *Vybrané souhrnné údaje - Česká národní banka: 2003_TR.pdf* [online]. 2003-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW:

- <http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dohled_pojistovny/souhrnne_udaje/download/2003_TR.pdf>
- [23] *Vybrané souhrnné údaje - Česká národní banka: 2004_TR.pdf* [online]. 2003-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW:
<http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dohled_pojistovny/souhrnne_udaje/download/2004_TR.pdf>
- [24] *Vybrané souhrnné údaje - Česká národní banka: 2005_TR.pdf* [online]. 2003-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW:
<http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dohled_pojistovny/souhrnne_udaje/download/2005_TR.pdf>
- [25] *Vybrané souhrnné údaje - Česká národní banka: 2006_TR_neziv_poj.pdf* [online]. 2003-2009 [cit. 2009-03-16]. Dostupný z WWW:
<http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dohled_pojistovny/souhrnne_udaje/download/2006_TR_neziv_poj.pdf>
- [26] Zákon č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví, Dostupný z WWW:
<<http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistovnictvi/>>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.....	31
Obrázek 2: Kumulativní forma pojistného plnění	32
Obrázek 3: Výpočet koeficientů vývoje.....	32
Obrázek 4: Odhad pojistných rezerv na pojistné plnění po roce 2008.....	33
Obrázek 5: Odhad rezerv na nezpracované plnění v letech 2009-2013	33
Obrázek 6: Odhad pojistných rezerv na konci roku 2008	34
Obrázek 7: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.....	35
Obrázek 8: Míra inflace.	35
Obrázek 9: Nekumulativní forma pojistného plnění upravená o inflaci	36
Obrázek 10: Kumulované hodnoty, výpočet pod diagonálou a dopočítání koeficientů vývoje .	36
Obrázek 11: Nekumulativní plnění v příslušném vývojovém roce.....	37
Obrázek 12: Odhad pojistných rezerv k 31.12.2008	38
Obrázek 13: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.....	42
Obrázek 14: Matice standardizovaných hodnot $S_{i,j}$	42
Obrázek 15: Výpočet vývojových koeficientů a podílu pojistných plnění.....	43
Obrázek 16: Výpočet standardizovaných hodnot $S_{i,j}$ pod diagonálou	44
Obrázek 17: Přepočítání na skutečné platby P_{ij}	44
Obrázek 18: Celkové rezervy na nevyplacené pojistné plnění.....	45

Obrázek 19: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.....	46
Obrázek 20: Pomocné výpočty pro výpočet inverzních koeficientů.....	47
Obrázek 21: Výpočet výšky technických rezerv.....	47
Obrázek 22: Výchozí nekumulativní forma pojistného plnění.....	49
Obrázek 23: Pomocné výpočty pro výpočet inverzních koeficientů.....	49
Obrázek 24: Výpočet celkových škodních průběhů a jejich extrapolace.....	50
Obrázek 25: Výpočet výše technických rezerv.....	50

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Univerzální a neživotní pojišťovny v ČR.....	13
Tabulka 2: Velikost pojistně technických rezerv v ČR (v mld. Kč).....	22
Tabulka 3: Rozložení pojistně technických rezerv na trhu ČR (v mld. Kč).....	23
Tabulka 4: Trojúhelníkové schéma.....	29
Tabulka 5: Schéma řetězové žebříkové metody.....	31
Tabulka 6: Forma zápisu plnění $P_{i,j}$	39
Tabulka 7: Matice standardizovaných hodnot.....	39
Tabulka 8: Vhodnější forma zápisu hodnot.....	41
Tabulka 9: Celkové kumulativní pojistné plnění.....	45
Tabulka 10: Celková výše technických rezerv - porovnání metod.....	51

SEZNAM GRAFŮ

Graf 1: Velikost pojistně technických rezerv v ČR (V mld. Kč).....	23
Graf 2: Struktura technických rezerv pojišťoven na pojistném trhu ČR (v mld. Kč).....	24
Graf 3: Porovnání metod odhadu výše technických rezerv.....	51

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1.....	63
-------------------	----

Příloha č. 1

Aplikace metod stanovení technických rezerv v tabulkovém procesoru MS Excel na příloženém CD.