

**UNIVERZITA PARDUBICE**  
**FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**2009**

**Petr ŠVEC**

**Univerzita Pardubice**  
**Fakulta ekonomicko-správní**

**Metody kvantifikace rizikového kapitálu v neživotní  
pojišťovně**

**Bc. Petr Švec**

**Diplomová práce**

**2009**

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Ústav systémového inženýrství a informatiky  
Akademický rok: 2008/2009

**ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**  
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Petr ŠVEC

Studijní program: N6209 Systémové inženýrství a informatika

Studijní obor: Pojistné inženýrství

Název tématu: Metody kvantifikace rizikového kapitálu v neživotní pojišťovně

Zásady pro vypracování:

Moderní teorie rizika.

Modely kolektivního rizika neživotní pojišťovny.

Simulace kolektivního rizika metodou Monte Carlo.

Kvantifikace rizikového kapitálu metodou Value at Risk (VAR).

Metody výpočtu VAR.

Ukázka aplikace metod modelování a simulace rizika a výpočtu VAR.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

Cipra, T.: Pojistná matematika v praxi. Praha: Edice HZ, 1994.

Cipra, T.: Pojistná matematika – teorie a praxe. Praha: EKOPRESS, Vydání II, 2006.

Cipra, T.: Finanční a pojistné vzorce. Praha: Grada Publishing, 2006.

Daňhel, J. a kol.: Pojistná teorie. Praha: Professional Publishing, 2005.

Glasserman, P.: Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York: Springer, 2003.

Pacáková, V.: Aplikovaná poistná statistika. Bratislava: Iura Edition, 2004.

Pacáková, V.: Modelovanie a simulácia rizík v neživotnom poistení. E+M – Ekonomie a Management, Technická univerzita v Liberci, 3/2007, ročník X, s.109-121.

Vedoucí diplomové práce:


prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.  
Ústav ekonomie

Datum zadání diplomové práce:

6. října 2008

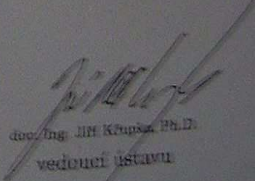
Termín odevzdání diplomové práce:

1. května 2009

  
doc. Ing. Barbora Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.

  
doc. Ing. Jiří Křupa, Ph.D.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 6. října 2008

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 01. 05. 2009

Petr Švec

Poděkování:

Děkuji prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které mi napomohly dovést tuto diplomovou práci ke zdárnému konci.

## **SOUHRN**

Tato diplomová práce se zabývá metodami kvantifikace rizikového kapitálu se zaměřením na neživotní pojištění a jejich bližší analýzou. Hlavní pozornost je zde věnována modelování kolektivního rizika pomocí metody Monte Carlo a uplatnění metody Value at Risk v neživotní pojišťovně. Výpočty byly prováděny s využitím statistického programu STATGRAPHICS *Centurion XV*.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

neživotní pojištění, kolektivní riziko, Monte Carlo, Value at Risk

## **TITLE**

Methods of the quantification of the risk capital in non-life insurance company

## **ABSTRACT**

This Thesis is concerned with methods of the quantification of the risk capital with a view to non-life insurance and their closer analysis. Main attention is paid to the simulation of collective risk by the help of Monte Carlo method and to exercise of Value at Risk method in the non-life insurance company. Calculations were performed with use of statistical computer software STATGRAPHICS *Centurion XV*.

## **KEYWORDS**

non-life insurance, collective risk, Monte Carlo, Value at Risk

# Obsah:

ÚVOD.....	9
<b>1 MODERNÍ TEORIE RIZIKA .....</b>	<b>10</b>
1.1 CHARAKTERISTIKA A ČLENĚNÍ NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ .....	11
1.1.1 Neživotní pojištění osob.....	12
1.1.2 Pojištění majetku .....	12
1.1.3 Pojištění odpovědnosti za škody.....	13
1.1.4 Pojištění právní ochrany .....	14
1.1.5 Cestovní pojištění.....	15
1.2 MODEL Y KOLEKTIVNÍHO RIZIKA NEŽIVOTNÍ POJIŠŤOVNY.....	15
1.2.1 Obecná charakteristika kolektivního rizika.....	17
1.2.2 Rozdělení kolektivního rizika.....	18
1.2.3 Základní typy složených rozdělení.....	20
1.2.4 Aproximace kolektivního modelu rizika .....	22
1.2.5 Modely počtu pojistných nároků .....	23
1.2.6 Modely počtu pojistných nároků v K tarifních skupinách .....	24
1.2.7 Modely výše škod.....	24
<b>2 SIMULACE KOLEKTIVNÍHO RIZIKA METODOU MONTE CARLO .....</b>	<b>27</b>
2.1 REALIZACE POSTUPU METODY MONTE CARLO.....	28
2.2 TESTY DOBRÉ SHODY .....	29
2.2.1 Pearsonův $\chi^2$ - test dobré shody.....	29
2.2.2 Kolmogorov-Smirnovův test .....	31
2.3 PRAKTICKÁ UKÁZKA MODELOVÁNÍ RIZIKA METODOU MONTE CARLO.....	33
<b>3 KVANTIFIKACE RIZIKOVÉHO KAPITÁLU METODOU VALUE AT RISK .....</b>	<b>43</b>
3.1 PODSTATA METODY VAR .....	43
3.2 SPECIFIKACE METODY VAR .....	44
3.3 PARAMETRICKÝ VÝPOČET VAR .....	47
3.3.1 Výpočet VaR pomocí normálního rozdělení.....	47
3.3.2 Přírůstková hodnota v riziku .....	48
3.3.3 Výpočet VaR pomocí t-rozdělení.....	49
3.3.4 Výpočet VaR pomocí směsi normálních rozdělení .....	49
3.3.5 Výpočet VaR pomocí rozdělení GED.....	50
<b>4 METODY MODELŮ VAR.....</b>	<b>51</b>



4.1	METODA VARIANCÍ A KOVARIANCÍ .....	51
4.2	HISTORICKÁ SIMULACE .....	53
4.3	STRUKTUROVANÁ METODA MONTE CARLO .....	54
4.4	ANALÝZA SCÉNÁŘŮ .....	56
4.5	UKÁZKA APLIKACE VÝPOČTU VAR V NEŽIVOTNÍ POJIŠŤOVNĚ .....	57
	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>59</b>
	<b>LITERATURA.....</b>	<b>60</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>62</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>62</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH .....</b>	<b>62</b>

## ÚVOD

Pojišťovnictví představující obchod s rizikem, je velmi rozporuplné odvětví. Na jedné straně pojišťovny přebírají riziko, což vyžaduje konzervativní, opatrný a velmi zodpovědný přístup. Na druhé straně se zabývají obchodní činností, která obsahuje konkurenční boj o zákazníka, sledování trhu, cílení na tržní segmenty, novinky či inovace.

Současné trendy ukazují, že se český pojišťovací trh stále více věnuje analýze vlastních dat z pohledu organizace, zpracování a zejména jejich praktického využití. Důraz je zde kladen především na podporu obchodu a lepší odhad míry rizika, kterou na sebe pojišťovny přebírají od klientů, s čímž je spojena analýza rizikového kapitálu.

Rizikový kapitál je v pojišťovnictví kvantifikován pomocí teorie rizika, která je založena především na pokročilých metodách teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Moderní přístup k teorii rizika je představován zejména modely kolektivního rizika, jejichž základ je tvořen rozdělením počtu a výšky individuálních pojistných plnění (škod). V neživotním pojištění pak modely kolektivního rizika nachází hlavní význam při krátkodobých pojistných kontraktech.

Dalším významným nástrojem pro kvantifikaci rizikového kapitálu je metoda Value at Risk, která je založena na odhadu nejhorší ztráty, ke které může dojít s předepsanou pravděpodobností ve stanoveném budoucím období. Dochází tak k velice užitečným prognózám do budoucna. Konkrétně v neživotním pojištění je řešena problematika určení adekvátní hodnoty rizikového pojistného v poměru ke vzniklým škodám za dané období, kdy lze s určitou pravděpodobností definovat maximální možnou ztrátu, která by mohla ohrozit solventnost pojišťovny či její celkovou existenci.

Cílem této diplomové práce je nastínit teoretický základ problematiky kvantifikace rizikového kapitálu v neživotní pojišťovně, aplikovat tuto teorii v praktických ukázkách pomocí vhodného statistického programu a zhodnotit dosažené výsledky.

## 1 MODERNÍ TEORIE RIZIKA

Předmětem této kapitoly je uvedení charakteristiky a základního členění neživotního pojištění, na které se tato práce v rámci kvantifikace rizikového kapitálu zaměřuje a objasnění modelů kolektivního rizika, se kterými je spojena moderní teorie rizika.

Teorie rizika [1], [2], [4], [7], [15], [23] představuje abstraktní základ moderní pojistné matematiky a sdružuje v sobě především pokročilejší metody teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a také některé oblasti z operačního výzkumu, teorie her, teorie užitku i teorie řízení a rozhodování. Je to dáno tím, že ve sledování ekonomických jevů a problémů v pojišťovnictví se spojuje problém rizika s pojmem nejistoty, neboť se posuzuje situace a možnosti, o nichž není známo, zda nastanou nebo nenastanou, protože jejich působení je dosud neznámé. Riziko v současné době speciálně v rámci pojišťovnictví představuje potenciální možnost vzniku pojistné události. V dnešní pojišťovací praxi a terminologii se jako riziko často označuje každá uzavřená smlouva nebo někdy dokonce každá z jejích složek. Potom se mluví o převzetí nebo krytí rizika, o odprodeji části rizika pomocí zajištění atd. Předmětem pojištění jsou však jediné čistá rizika na rozdíl od rizik spekulativních uměle vytvářených jako sázková činnost, hazardní hry, spekulace na burzách atd. Pojištění z pohledu teorie rizika lze charakterizovat tím, že pojištěnci přenesou svá rizika, jejichž škodní důsledky jsou z jejich hlediska neúnosné, na pojistitele představovaného komerční pojišťovnou, která je při dostatečně velkém souboru rizik podobného charakteru schopna převzaté riziko s pomocí inkasovaného pojistného od klientů nejen zvládnout, ale použít jej i k výnosné komerční činnosti. Pojištění tedy v tomto smyslu slouží jako nástroj finanční eliminace negativních důsledků nahodilosti. Pojistitel stejně jako u životního pojištění využívá princip solidarity pojištěných, který umožňuje rozvrhnout mezi klienty vystavené stejnému riziku škodu, kterou utrpěla pouze část z nich. Z pohledu pojistitele se převzatá rizika v rámci pojistného kmene transformují na pojistně-technické riziko pojistitele, které spočívá v možném nebezpečí, že ve skutečnosti nedojde k vyrovnání mezi přijatým pojistným od pojištěnců a vyplacným pojistným plněním. Toto riziko se dá vyjádřit jako výše variability mezi očekávaným stavem, který se odrazí ve vypláceném pojistném plnění. Pojišťovací činnost je přitom založena na tom, že s růstem pojistného kmene, kdy se zvyšuje počet klientů pojišťovny, se pojistně technické riziko značně zmenšuje. Ve shrnutí, teorie rizika umožňuje ohodnotit náhodné odchylky od očekávané hodnoty, s kterými je každé pojištění spojeno.

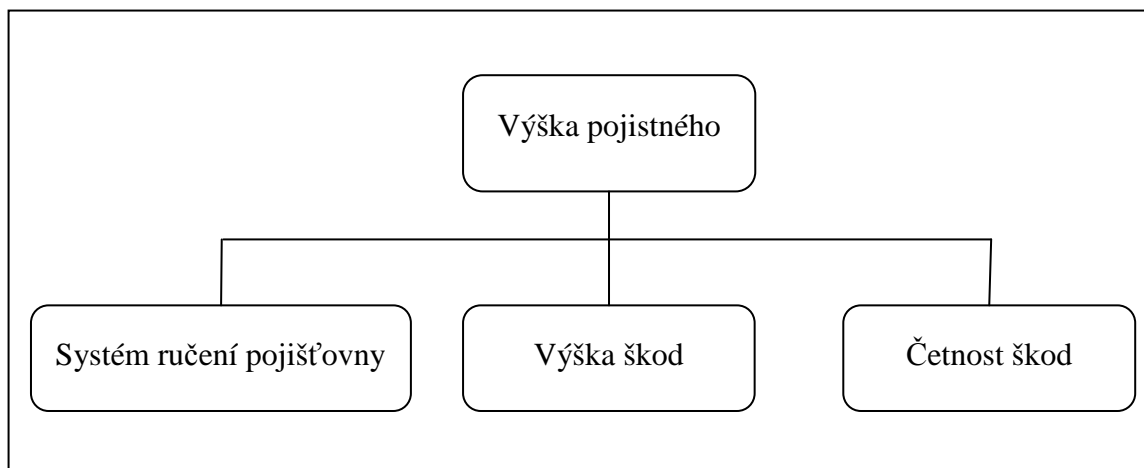
Vzhledem k tomu, že tato práce je zaměřena na neživotní pojištění [4], [5], [8], [14], [22] a modelování rizika s ním spojené, je vhodné uvést jeho charakteristiku a základní členění.

## 1.1 Charakteristika a členění neživotního pojištění

V životním i neživotním pojištění je jak pro klienta, tak pro pojišťovnu důležitá problematika stanovení ekvivalentní výšky pojistného, která by odpovídala převzatému riziku.

Pojišťovna zná rozsah převzatých závazků, problémem je však určit, jaké budou její výdaje. To lze odhadnout pouze na základě informací získaných z minulého škodního průběhu. Pozornost je zde soustředěna především na četnost výskytu a rozsah škod, kdy je využito pojistné matematiky včetně pojistné statistiky a počtu pravděpodobností [14].

Činitele ovlivňující výšku pojistného v neživotním pojištění znázorňuje obrázek 1:



Obrázek 1: Činitele působící na výšku pojistného [14]

Neživotní pojištění se soustředí na krytí celé škály rizik neživotního charakteru. Jedná se o rizika ohrožující zdraví a životy osob, rizika vyvolávající přímé věcné škody a rizika vyvolávající finanční ztráty. Neživotní pojištění lze z hlediska jeho různorodosti členit dle různých hledisek. Jednotlivé typy pojistných produktů jsou v současnosti vzájemně kombinovány z důvodu komplexní nabídky pojistné ochrany. Charakteristiku těchto produktů nejlépe vystihuje dělení neživotního pojištění do následujících oblastí [8]:

- Neživotní pojištění osob.
- Pojištění majetková.
- Pojištění odpovědnostní.
- Pojištění právní ochrany.
- Cestovní pojištění.

### 1.1.1 Neživotní pojištění osob

Tato oblast neživotního pojištění zahrnuje následující podskupiny [8]:

- Úrazové pojištění – zahrnuje výplatu pojistného plnění v případě, že v důsledku úrazu dojde k přechodnému nebo trvalému tělesnému poškození nebo smrti pojištěného. Úraz je v pojišťovnictví definován jako náhlé a neočekávané působení zevních sil nebo vlastní síly, neočekávané a nepřetržité působení vysokých teplot par, plynů, záření a jedů, které měly za následek tělesné poškození nebo smrt pojištěného, přičemž pojišťovny nevyplácí pojistná plnění v případě sebevražd nebo pokusů o ně, trestných činů, pojistných událostí nastalých pod vlivem alkoholu či následkem duševní poruchy.
- Nemocenské pojištění – uplatňuje se jako doplněk povinného všeobecného zdravotního pojištění pro případy, kdy nejsou dané potřeby povinným pojištěním kryty nebo pro případy, kdy jednotlivec má zájem vyššího rozsahu pokrytí potřeb než se uplatňuje v rámci povinného pojištění a pro osoby, které nejsou zahrnuty do povinného pojištění.

### 1.1.2 Pojištění majetku

Pojištění majetku zahrnuje krytí celé řady rizik, která lze rozdělit podle jejich důsledků na [8]:

- Rizika, při jejichž realizaci dochází ke vzniku přímých věcných škod (živelní rizika, vodovodní rizika, rizika havarijní, rizika odcizení a vandalství, strojní rizika).
- Rizika, při jejichž realizaci dochází ke vzniku finančních ztrát (rizika přerušení provozu, rizika úvěrová).

Pojištění majetku lze z hlediska zaměření produktů rozdělit na několik na několik skupin pojistných produktů [8]:

- Pojištění majetku obyvatelstva – patří sem zejména pojištění domácností, pojištění budov a havarijní pojištění. Vedle těchto základních produktů pojištění majetku obyvatelstva se lze setkat s dalšími produkty, jako jsou pojištění elektromotorů, pojištění sbírek a klenotů, pojištění skel, dopravní pojištění atd.

- Pojištění podnikatelských a průmyslových rizik – v rámci této skupiny pojištění majetku je uplatňováno velké množství druhů pojištění. K nejvýznamnějším patří živelní pojištění, pojištění technická, pojištění pro případ přerušení provozu, pojištění dopravní, pojištění havarijní, pojištění proti odcizení, pojištění skel, pojištění úvěrové, pojištění specializovaných činností atd.
- Pojištění zemědělských rizik – v případě pojišťování zemědělských podniků jsou vedle druhů pojištění uplatňujících se v rámci podnikatelské sféry využívány specifické druhy pojištění, která představují pojištění plodin a pojištění hospodářských zvířat. Pojištění v oblasti rostlinné a živočišné produkce představuje krytí rizik, která mají specifický charakter.

### **1.1.3 Pojištění odpovědnosti za škody**

Pojištění odpovědnosti za škody kryje rizika související se skutečností, že pojištěný subjekt může způsobit svou činností škody jinému subjektu, jako jsou škody na majetku, na zdraví a na životě, nebo finanční škody, za které poškozenému odpovídá. Do pojištění by měla být zahrnuta pouze odpovědnost mající charakter nahodilosti. Produkty odpovědnostního pojištění lze podle charakteru odpovědnostních rizik rozdělit do následujících oblastí [8]:

- Odpovědnostní pojištění za škody při provozu vozidel – z hlediska společenské závažnosti je toto pojištění na ochranu poškozených při dopravních nehodách provozováno jako pojištění povinné. Pojištěný má na základě tohoto pojištění nárok na úhradu škody pojistitelem vzniklé v souvislosti s provozem vozidla. Konkrétně se jedná o škody na zdraví nebo usmrcením, škody vzniklé poškozením, zničením nebo ztrátou věci, škody mající povahu ušlého zisku a účelně vynaložené náklady spojené s právním zastoupením.
- Odpovědnostní pojištění při pracovním úrazu nebo nemoci z povolání – krytí těchto škod je v podmínkách České republiky řešeno prostřednictvím povinného odpovědnostního pojištění, a to v podobě pojištění zákonného. Povinnost platit pojistné vzniká zaměstnavateli zaměstnávajícímu alespoň jednoho zaměstnance. Výplaty z tohoto pojištění jsou představovány náhradami především v případě poškození zdraví zaměstnance, případně náhradami za věcné škody.

- Profesní odpovědnostní pojištění – zahrnuje řadu druhů pojištění odpovědnosti za škody určených pro jednotlivé profese, kdy osoby provozující dané profese jsou ze zákona odpovědné za profesionální chyby a omyly. Mezi tato povolání patří například advokát, lékař, notář, daňový poradce, pojišťovací zprostředkovatel atd.
- Obecné odpovědnostní pojištění – zahrnuje pojištění odpovědnosti jak pro jednotlivce, tak pro podnikatelské subjekty. K pojištění odpovědnosti za škody jednotlivců patří například pojištění odpovědnosti za škody v běžném občanském životě, pojištění odpovědnosti za škody vlastníka nemovitosti, odpovědnostní pojištění z výkonu povolání atd. Z hlediska podnikatelských subjektů se jedná vedle obecného odpovědnostního pojištění podniků o pojištění odpovědnosti za výrobek, pojištění odpovědnosti za škody na životním prostředí a pojištění odpovědnosti vedoucích pracovníků podniku.

#### **1.1.4 Pojištění právní ochrany**

Pojištění právní ochrany zahrnuje krytí nákladů pojištěného v souvislosti s právními úkony a nákladů spojených s prosazením požadavků na náhradu škod pojištěného. V rámci pojistného plnění jsou v tomto případě kryty [8]:

- Soudní výdaje a náklady.
- Náklady na svědky a soudní znalce povolané soudem.
- Odměny a náklady zvoleného právního zástupce.
- Náklady na provedení výkonu rozhodnutí.
- Výdaje pojištěného za cesty k soudnímu řízení.
- Služby pojišťovny spočívající v objasnění skutečnosti, ověření existence pojistné události, jmenování advokáta, dohled nad průběhem procesu.

Součástí pojištění právní ochrany je také poskytování právních rad a právní asistence. Pojištění právní ochrany nachází uplatnění ve třech základních podobách, a to pojištění právní ochrany motorového vozidla, pojištění právní ochrany rodiny a pojištění právní ochrany podniků.

### 1.1.5 Cestovní pojištění

Cestovní pojištění představuje oblast pojištění, kde se aplikuje kombinace pojistných produktů různého typu. Do cestovního pojištění jsou zařazovány následující produkty [8]:

- Pojištění zdravotní, kryjící náklady při cestách do zahraničí na lékařskou péči, ošetření, léky, pobyt v nemocnici atd.
- Pojištění úrazové.
- Pojištění storna zájezdu – krytí finančních ztrát při nevyužití cesty v návaznosti na výskyt nahodilé události.
- Pojištění zavazadel – majetkové pojištění pro krytí škod při ztrátě, zničení, poškození zavazadel.
- Pojištění odpovědnosti za škody.
- Pojištění právní ochrany.

## 1.2 Modely kolektivního rizika neživotní pojišťovny

Modely kolektivního a individuálního rizika mají zejména v neživotním pojištění veliký praktický význam pro krátkodobé pojistné kontrakty. Umožňují širokou aplikaci metod pravděpodobnosti a statistiky. Jejich základem jsou rozdělení počtu a výšky individuálních pojistných plnění, která budou specifikována později.

V modelech kolektivního rizika se uplatňují zejména centrální limitní věta, vlastnosti momentové vytvářející funkce a odvození počátečních a centrálních momentů pomocí této funkce, konvoluce distribučních funkcí a vlastnosti podmíněných středních hodnot [15].

#### ➤ Centrální limitní věta:

Nechť  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné. Předpokládá

se, že  $E(X_i) = \mu$  a  $D(X_i) = \sigma^2$ . Nechť  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ . Potom limitním rozdělením náhodné

proměnné  $\bar{X}$  pro  $n \rightarrow \infty$  je normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\frac{\sigma^2}{n}$ . Zapsané jako [15]:

$$\bar{X} \approx N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ pro } n \rightarrow \infty$$



➤ **Momentová vytvářející funkce:**

Momentová vytvářející funkce náhodné proměnné  $X$  je definovaná vztahem [15]:

$$M_X(z) = E(e^{zX})$$

Momentová vytvářející funkce má následující vlastnosti, z nichž první dvě velmi ulehčují výpočet počátečních a centrálních momentů [15]:

- Nechť  $X$  je libovolná náhodná proměnná s momentovou vytvářející funkcí  $M_X(z)$ .

Potom pro libovolné celé kladné číslo  $k$  platí:

$$\frac{d^k}{dz^k} M_X(z) \Big|_{z=0} = E(X^k) = m_k$$

- Pro  $k = 2$  a  $k = 3$  platí vztah:

$$\frac{d^k}{dz^k} \ln M_X(z) \Big|_{z=0} = E\{[X - E(X)]^k\} = \mu_k$$

- Pro daný zákon rozdělení pravděpodobností existuje jediná momentová vytvářející funkce  $M_X(z)$ , která je tímto zákonem jednoznačně určená.
- Pokud náhodná proměnná  $X$  má momentovou vytvářející funkci  $M_X(z)$ , pak pro momentovou vytvářející funkci náhodné proměnné  $Y$ , která je funkcí náhodné proměnné  $X$ ,  $Y = y(X)$ , platí:

$$M_Y(z) = E[e^{zy(X)}]$$

- Pokud  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , jsou nezávislé náhodné proměnné, potom momentová vytvářející funkce jejich součtu se rovná součinu jejich momentových vytvářejících funkcí:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z)$$

➤ **Konvoluce distribučních funkcí:**

Předpokládá se, že  $\{X_i\}_{i=1}^n$  jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné se společnou distribuční funkcí  $F(x)$ . Distribuční funkci  $F^{*n}(x)$  jejich součtu  $\sum_{i=1}^n X_i$  se nazývá  $n$ -násobnou konvolucí distribučních funkcí [15]:

$$F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x)$$

➤ **Vlastnosti podmíněných středních hodnot:**

Pro modely kolektivního rizika se uplatňují zejména následující dva vztahy, které platí pro libovolné náhodné proměnné  $X, Y$  [15]:

$$E(X) = E[E(X/Y)]$$

$$D(X) = E[D(X/Y)] + D[E(X/Y)]$$

### 1.2.1 Obecná charakteristika kolektivního rizika

Model kolektivního rizika v pojišťovnictví slouží pro modelování celkové výšky škod  $S$ , které nastaly během daného časového období délky  $T$  v daném pojistném kmeni, přičemž hlavním cílem je najít rozdělení pravděpodobnosti a základní charakteristiky náhodné proměnné  $S$ . Jako časové období  $T$  se bude dále předpokládat jeden rok.

Kolektivní model rizika vychází z předpokladu, že v homogenním pojistném kmenu lze výše škodních nároků z jednotlivých pojistných událostí považovat za stejně rozdělené náhodné veličiny [1], [3], [4], [15]:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

- Kde  $X_1, \dots, X_N$  je posloupnost škodních nároků uspořádaná libovolně bez ohledu na to, jakým pojistným smlouvám tyto škody přísluší, a  $N$  je počet pojistných událostí v uvažovaném období.

Základním krokem pro určení rozdělení  $S$  je vyjádření náhodné proměnné  $S$  pomocí náhodné proměnné  $N$  představující počet pojistných plnění za rok a náhodných proměnných  $X_i$ , kterými jsou výšky pojistných plnění při  $i$ -té pojistné události.

Celkový počet pojistných plnění není závislý na výšce individuálních plnění a výška individuálního plnění není závislá na počtu či výšce ostatních pojistných náhrad, přičemž rozdělení výšky individuálních pojistných plnění se ve sledovaném období nemění.

Dále je třeba zavést označení podle vztahů [15]:

$$G(x) = \begin{cases} P(S \leq x) = F_s(x) & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

- Kde  $G(x)$  je distribuční funkce náhodné proměnné  $S$ .

$$F(x) = \begin{cases} P(X_i \leq x) & \text{pro } i = 1, 2, \dots, N, x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } i = 1, 2, \dots, N, x < 0 \end{cases}$$

- Kde  $F(x)$  je společná distribuční funkce náhodných proměnných  $X_i$ .

Ve většině případů se bude předpokládat, že existuje derivace funkce  $F(x)$  představující hustotu pravděpodobností náhodných proměnných  $X_i$  a bude se značit  $f(x)$ . Pro momentové vytvářející funkce  $S$ ,  $N$  a  $X_i$  se bude v příslušném pořadí používat označení  $M_S(z)$ ,  $M_N(z)$ ,  $M_X(z)$ .

Symbol  $m_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) označuje  $k$ -tý počáteční moment identicky rozdělených individuálních pojistných plnění  $X_i$ , což je  $m_k = E(X_i^k)$  [15].

## 1.2.2 Rozdělení kolektivního rizika

### ➤ Rozdělení $S$ bez specifikace $N$ :

Nechť  $S$  je celkové pojistné plnění. Cílem je najít vyjádření pro distribuční funkci  $G(x)$ , celkové plnění  $S$  a najít střední hodnotu, rozptyl a momentovou vytvářející funkci rozdělení  $S$ , nejprve bez specifikace rozdělení počtu pojistných plnění  $N$ .

Distribuční funkce  $G(x)$  se vyjádří jako pravděpodobnost náhodné události  $\{S \leq x\}$ . Využívá se přitom skutečnosti, že událost  $\{S \leq x\}$  nastává tehdy a jen tehdy, když nastane právě jedna z následujících náhodných událostí [15]:

- $\{S \leq x \wedge N = 0\}$  - nenastane žádná pojistná událost.
- $\{S \leq x \wedge N = 1\}$  - nastane právě jedna pojistná událost, při které výška pojistných plnění nepřesáhne hodnotu  $x$ .

- $\{S \leq x \wedge N = 2\}$  - nastanou právě dvě pojistné události s celkovým pojistným plněním menším nebo rovnajícím se  $x$ .
- $\{S \leq x \wedge N = n\}$  - nastane právě  $n$  pojistných událostí, při kterých celkové pojistné plnění nepřesáhne hodnotu  $x$ .

Specifikované pojistné události tvoří systém vzájemně se vylučujících náhodných událostí, jejichž sjednocením je právě událost  $\{S \leq x\}$ :

$$\{S \leq x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leq x \wedge N = n\}$$

Po úpravách vzniká všeobecné vyjádření distribuční funkce  $G(x)$  celkového plnění  $S$  pro libovolné rozdělení počtu pojistných plnění  $N$  a výšky pojistných plnění  $X_i$ :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x)$$

- Kde  $F^{*n}(x)$  je  $n$ -násobná konvoluce distribučních funkcí  $F(x)$ .

#### ➤ Základní charakteristiky kolektivního rizika $S$ :

Při aproximaci distribuční funkce  $G(x)$  rozdělení  $S$  je potřeba znát základní momenty kolektivního rizika  $S$ :

- Střední hodnota  $E(S)$
- Rozptyl  $D(S)$
- Momentová vytvářející funkce  $M_S(z)$ .

Vztahy pro základní momenty kolektivního rizika  $S$  jsou velmi užitečné v případě, kdy existuje předpoklad, že proměnné  $N$  a  $X_i$  mají konkrétní zákon rozdělení pravděpodobnosti, přičemž jsou vyjádřeny takto [15]:

$$E(S) = E(N)m_1$$

$$D(S) = E(N)(m_2 - m_1^2) + D(N)m_1^2$$

$$M_S(z) = M_N(\ln M_X(z))$$

### 1.2.3 Základní typy složených rozdělání

➤ **Složené Poissonovo rozdělání:**

Nechť  $S$  je celkové pojistné plnění, přičemž  $N$  má Poissonovo rozdělání s parametrem  $\lambda$ . Pak lze říci, že  $S$  má složené Poissonovo rozdělání s parametry  $\lambda$  a  $F(x)$ , které se bude značit jako  $CoPo(\lambda, F(x))$ . V tomto případě platí [15]:

$$E(N) = D(N) = \lambda \quad \text{a} \quad M_N(z) = e^{\lambda(e^z - 1)}$$

Po dosazení do vztahů pro charakteristiky  $S$  lze vyjádřit základní charakteristiky složeného rozdělání  $CoPo(\lambda, F(x))$  ve tvaru [15]:

$$\begin{aligned} E(S) &= \lambda m_1 \\ D(S) &= \lambda(m_2 - m_1^2) + \lambda m_1^2 = \lambda m_2 \\ M_S(z) &= e^{\lambda[M_X(z) - 1]} \end{aligned}$$

Poslední vztah se následně využije na vyjádření třetího centrálního momentu proměnné  $S$  [15]:

$$\begin{aligned} \mu_3(S) &= E[(S - E(S))^3] = E[(S - \lambda m_1)^3] = \frac{\partial^3}{\partial z^3} \ln M_S(z) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{\partial^3}{\partial z^3} (\lambda M_X(z) - 1) = \lambda \frac{\partial^3}{\partial z^3} M_X(z) \Big|_{z=0} = \lambda m_3 \end{aligned}$$

Dále je třeba vyjádřit koeficient šikmosti  $\gamma_1$  rozdělání  $CoPo(\lambda, F(x))$ :

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3(S)}{[D(S)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Protože  $\lambda > 0$  a  $X_i \geq 0$ , platí i  $\gamma_1 > 0$ . Složené Poissonovo rozdělání je vždy pozitivně zešikmené a to i v případě, že individuální pojistná plnění jsou negativně zešikmené. Pro velké hodnoty parametru  $\lambda$  se rozdělání  $CoPo(\lambda, F(x))$  stává symetričtějším, neboť platí, že  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , když  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Základní charakteristiky rozdělání  $CoPo(\lambda, F(x))$  mají podle předchozích vztahů vyjádření [15]:

$$E(S) = \lambda m_1 \quad D(S) = \lambda m_2 \quad \mu_3(S) = \lambda m_3 \quad \gamma_1 = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

➤ **Složené binomické rozdění:**

Vhodným pravděpodobnostním modelem počtu pojistných plnění  $N$  může být v některých typech pojištění binomické rozdění.

Nechť počet pojistných plnění  $N$  má binomické rozdění  $Bi(n, \pi)$ , potom celkové pojistné plnění  $S$  má složené binomické rozdění.

Za předpokladu, že  $N \approx Bi(n, \pi)$ , platí pro základní charakteristiky náhodné proměnné  $N$  tyto vztahy [15]:

$$E(N) = n\pi \quad D(N) = n\pi(1 - \pi) \quad M_N(z) = (\pi e^z + 1 - \pi)^n$$

Tyto vzorce se následně využijí na vyjádření základních charakteristik složeného binomického rozdění:

$$\begin{aligned} E(S) &= n\pi m_1 \\ D(S) &= n\pi(m_2 - m_1^2) + n\pi(1 - \pi)m_1^2 = n\pi m_2 - n\pi^2 m_1^2 \\ M_S(z) &= M_N(\ln M_X(z)) = [\pi M_X(z) + 1 - \pi]^n \end{aligned}$$

➤ **Složené negativně binomické rozdění:**

Vzhledem k tomu, že rozptyl negativního binomického rozdění je větší než střední hodnota, což často odpovídá reálné situaci v pojišťovně, může být rozdění  $NB(k, \pi)$  při více typech pojištění lepším modelem počtu pojistných plnění  $N$  než Poissonovo rozdění.

Nechť počet pojistných plnění  $N$  má negativně binomické rozdění, potom celkové pojistné plnění  $S$  má složené negativně binomické rozdění.

Základní charakteristiky složeného negativně binomického rozdění jsou vyjádřeny těmito vztahy [15]:

$$\begin{aligned} E(S) &= \frac{k(1 - \pi)}{\pi} m_1 \\ D(S) &= \frac{k(1 - \pi)}{\pi} (m_2 - m_1^2) + \frac{k(1 - \pi)}{\pi^2} m_1^2 = \frac{k(1 - \pi)}{\pi} m_2 + \frac{k(1 - \pi)^2}{\pi^2} m_1^2 \\ M_S(z) &= \frac{\pi^k}{[1 - (1 - \pi)M_X(z)]^k} \end{aligned}$$

## 1.2.4 Aproximace kolektivního modelu rizika

### ➤ Aproximace normálním rozdělením:

Nechť vše, co je známé nebo se dá spolehlivě odhadnout o kolektivním riziku  $S$ , jsou základní charakteristiky:

- Střední hodnota  $E(S) = \mu$ .
- Rozptyl  $D(S) = \sigma^2$ .

Protože  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  je součtem nezávislých a identicky rozdělených náhodných proměnných, nabízí se podle centrální limitní věty normální aproximace rozdělení  $S$ . Pro libovolné  $s$  tak platí [15]:

$$G(s) = P(S \leq s) = P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq \frac{s - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{s - \mu}{\sigma}\right)$$

Platí zde, že čím je větší počet pojistných plnění  $N$ , tím je aproximace  $G(s)$  pomocí distribuční funkce normovaného normálního rozdělení přesnější.

### ➤ Aproximace posunutým gama rozdělením:

Nechť jsou známé nebo dostatečně spolehlivě odhadnutelné první tři počáteční momenty celkového pojistného plnění  $S$ , pak lze použít posunuté gama rozdělení na aproximaci rozdělení  $S$ , čímž se částečně sníží podhodnocení pravděpodobností vysokých pojistných plnění, k němuž dochází při normální aproximaci  $S$ .

Nechť symboly  $\mu$ ,  $\sigma^2$  a  $\gamma$  označují postupně průměr, rozptyl a koeficient šikmosti kolektivního rizika  $S$ .

Pro posunutou gama aproximaci se předpokládá, že  $S$  má přibližně stejné rozdělení pravděpodobnosti jako náhodná proměnná  $k + Y$ , kde  $k$  je konstanta a  $Y$  má gama rozdělení s parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $Y \approx G(\alpha, \beta)$ ).

Parametry  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  se určí za předpokladu, že náhodná proměnná  $k + Y$  má první tři momenty shodné s adekvátními momenty  $S$ , které jsou známé. Poté lze vyjádřit systém tří rovnic s neznámými  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  [15]:

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \mu = k + \frac{\alpha}{\beta}$$

Protože hodnoty  $\mu$ ,  $\sigma^2$  a  $\gamma$  jsou podle předpokladu známe, je možné postupně vypočítat neznámé parametry [15]:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2} \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma^2}} \quad k = \mu - \frac{\alpha}{\beta}$$

Výhodou této aproximace je jednodušší určení pravděpodobnosti  $P(a < k + Y < b)$  než pravděpodobnosti  $P(a < S < b)$ .

### 1.2.5 Modely počtu pojistných nároků

Modely počtu pojistných nároků vycházejí z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny  $N$  nabývajících většinou hodnot 0, 1, 2 atd.

#### ➤ Poissonovo rozdělení:

Poissonovo rozdělení ( $N \approx P(\lambda)$ ) je jednoparametrické rozdělení s intenzitou  $\lambda > 0$ , kde  $N$  má význam počtu pojistných událostí ve velkém počtu nezávislých homogenních pojistných smluv s malou pravděpodobností pojistné události [1]:

$$P(N = j) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!}$$

- Kde  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $E(N) = \text{var}(N) = \lambda$

#### ➤ Negativně binomické rozdělení:

Negativně binomické rozdělení ( $N \approx NB(r, p)$ ) je dvouparametrické rozdělení s  $r > 0$  a  $0 < p < 1$ .  $N$  má význam (pro  $r \in N$ ) počtu nezdarů před  $r$ -tým zdarem v nezávislých pokusech s pravděpodobností zdaru  $p$  [1]:

$$P(N = j) = \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j$$

- Kde  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $E(N) = \frac{r(1-p)}{p} < \text{var}(N) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .



➤ **Smíšené Poissonovo rozdělení:**

Smíšené Poissonovo rozdělení má náhodný parametr  $\lambda$ . Používá se pro pojistné kmény s heterogenními riziky, kdy u pojistných smluv s malým (resp. velkým) rizikem nabývá parametr  $\lambda$  malých (resp. velkých) hodnot. Ve zvláštních případech pro  $\lambda$  konstantní s  $P(\lambda = \lambda_0) = 1$  jde o rozdělení  $P(\lambda_0)$  a pro  $\lambda$  s gama rozdělením s parametry  $p/(1-p)$  a  $r$  jde o rozdělení  $NB(r, p)$  [1]:

$$P(N = j) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} dF(\lambda)$$

- Kde  $j = 0, 1, 2, \dots$

### 1.2.6 Modely počtu pojistných nároků v K tarifních skupinách

V tomto případě  $N$  označuje počet pojistných nároků v uvažovaném období v  $K$  navzájem nezávislých tarifních skupinách ( $N = N_1 + \dots + N_K$ , kde  $N_i$  je počet pojistných nároků v uvažovaném období v  $i$ -té tarifní skupině) [1]:

- Je-li  $N_i \approx P(\lambda_i)$ , pak  $N \approx P(\lambda_1 + \dots + \lambda_K) \approx N(\lambda_1 + \dots + \lambda_K, \lambda_1 + \dots + \lambda_K)$ .
- Je-li  $N_i \approx NB(r_i, p)$ , pak  $N \approx NB(r_1 + \dots + r_K, p)$ .

### 1.2.7 Modely výše škod

Modely výše škod vycházejí z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny  $X$  (výše škody obvykle na jednu pojistnou událost v uvažovaném období) nabývající ve většině případů nezáporných hodnot.

➤ **Logaritmicko-normální rozdělení:**

Logaritmicko-normální rozdělení ( $X \approx LN(\mu, \sigma^2)$ ) je dvouparametrické rozdělení s  $-\infty < \mu < \infty$  a  $\sigma > 0$ ; platí  $\ln X \approx N(\mu, \sigma^2)$ . Používá se k modelování výše škod například v pojištění úrazovém, havarijním, požárním (zděných budov), proti vichřicím atd. [1]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Kde  $x > 0$ ;  $E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ ;  $\text{var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$ .

➤ **Gama rozdělení:**

Gama rozdělení ( $X \approx \Gamma(a, \lambda)$ ) je dvouparametrické rozdělení s  $a > 0, \lambda > 0$  [1]:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$$

- Kde  $x \geq 0$ ;  $E(X) = \frac{a}{\lambda}$ ;  $\text{var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$ .

➤ **Weibullovo rozdělení:**

Weibullovo rozdělení je dvouparametrické rozdělení s  $a > 0, \lambda > 0$  [1]:

$$f(x) = a\lambda^a x^{a-1} \exp(-\lambda^a x^a)$$

- Kde  $x > 0$ ;  $E(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{a+1}{a}\right)$ ;  $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \Gamma\left(\frac{a+2}{a}\right) - \Gamma^2\left(\frac{a+1}{a}\right) \right)$ .

➤ **Exponenciální rozdělení:**

Exponenciální rozdělení ( $X \approx \text{Exp}(\lambda)$ ) je jednoparametrické rozdělení s  $\lambda > 0$ . Představuje speciální případ gama rozdělení a Weibullova rozdělení pro  $a = 1$ . Používá se také k modelování doby mezi pojistnými nároky [1]:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

- Kde  $x \geq 0$ ;  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ;  $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

➤ **Beta rozdělení:**

Beta rozdělení je dvouparametrické rozdělení s  $p > 0, q > 0$ . Hustota ve tvaru „U“ typická pro beta rozdělení s  $p < 1, q < 1$  se využívá k modelování výše škod například v požárním pojištění, kde obvykle nastávají buď velmi malé, nebo naopak velmi velké škody [1]:

$$f(x) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$$

- Kde  $0 < x < 1$ ;  $E(X) = \frac{p}{p+q}$ ;  $\frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)}$ .

➤ **Paretovo rozdělení:**

Paretovo rozdělení je dvouparametrické rozdělení s  $a > 0$  a  $b > 0$ . Používá se v situacích s odlehlými extrémními hodnotami škod, například v pojištění nemocenském, požárním (dřevěných budov) atd. [1]:

$$f(x) = \frac{b \cdot a^b}{x^{b+1}}$$

- Kde  $x \geq a$ ;  $E(X) = \frac{ab}{b-1}$  pro  $b > 1$ ;  $\text{var}(X) = \frac{a^2b}{(b-1)^2(b-2)}$  pro  $b > 2$ .

## 2 SIMULACE KOLEKTIVNÍHO RIZIKA METODOU MONTE CARLO

Cílem této kapitoly je přiblížit princip metody Monte Carlo a pomocí praktické ukázky využít tuto metodu pro modelování kolektivního rizika v neživotním pojištění s využitím vhodného statistického programu.

Kvantifikace rizika využívá metod řešení numerických úloh pomocí speciálně organizovaných statistických pokusů. Při použití těchto metod se získává řešení pomocí umělých realizací náhodných procesů, jež jsou vytvořeny tak, aby některé z jejich charakteristik byly řešením úlohy. Struktura modelu kvantifikace rizika je velmi podobná deterministickým modelům včetně rovnic, závislostí a propojení všech proměnných. Navíc však umožňuje definovat kteroukoliv proměnnou prostřednictvím pravděpodobnostního rozdělení nejlépe charakterizujícího její chování [16].

V reálném světě existuje mnoho případů, které nelze popsat matematickým vzorcem, jelikož vyjádření některých proměnných je možné pouze aproximacemi. Jediným možným analytickým východiskem jsou pak simulace. Simulační metody se tak aplikují především ve chvílích, kdy by matematická analýza byla příliš komplexní či její reprodukce příliš komplikovaná. Praxe navíc ukazuje, že pokud je model navržen správně, získané aproximace jsou velmi blízké hodnotám vypočteným pomocí matematických vzorců a zároveň tak velmi přesně kopírují realitu.

V případě, že se pomocí metod pravděpodobnosti a statistiky podaří najít pravděpodobnostní modely počtu  $N$  a výšky  $X$  individuálních pojistných škod, lze zjistit přesné nebo přibližné rozdělení celkových škod  $S$  za rok, což je pro pojišťovny velice důležité.

Se stále se zvyšujícím výkonem osobních počítačů se dostává do všeobecného povědomí simulační metoda Monte Carlo [9], [10], [16], [21] založená na opakovaném hledání východisek z určité předem definované situace pomocí vhodných algoritmů.

Metoda Monte Carlo, je založena na provádění náhodných experimentů s modelem předpokladů a jejich vyhodnocení. Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle aproximace chování určitého jevu. Na základě získané aproximace a známých vztahů je následně možné interpretovat potřebné výsledky [16].

## 2.1 Realizace postupu metody Monte Carlo

Simulovaným náhodným procesem jsou hodnoty  $s_1, s_2, \dots, s_n$  celkových škod  $S$ , realizací simulací nejprve hodnot počtu pojistných škod  $N$  a následně výšky pojistných plnění  $X$ , přičemž předpokládáme znalost rozdělení i jeho parametrů (nebo jejich odhadů) náhodných proměnných  $N$  a  $X$ . Uvedený postup se realizuje pomocí těchto kroků:

- Vygeneruje se náhodné číslo  $n_1$  z rozdělení počtu škod  $N$  přímo pomocí generátoru náhodných čísel z rozdělení  $N$  (například Poissonovo, negativně-binomické atd.), pokud to používaný software umožňuje, nebo se vygeneruje náhodné číslo  $r_1$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $\langle 0;1 \rangle$  a náhodné číslo  $n_1$  se dostane podle vztahu  $n_1 = Q(r_1)$ , kde  $Q(r)$  je kvantilová funkce rozdělení  $N$ .
- Analogicky se vygeneruje z rozdělení výšky škod  $X$  právě  $n_1$  hodnot individuálních škod  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ . Jejich součet  $s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}$  bude první vygenerovanou hodnotou celkových škod  $S$ .
- První dva kroky se zopakují  $n$ -krát, přičemž  $n$  musí být dostatečně velké číslo, nejlépe několik stovek až tisíců. Dostanou se tak vygenerované hodnoty  $s_1, s_2, \dots, s_n$  z neznámého rozdělení celkových škod  $S$ , představující jeden náhodný výběr z tohoto rozdělení.
- Vzhledem k dostatečnému počtu vygenerovaných hodnot se může rozdělení pravděpodobnosti kolektivního rizika  $S$  modelovat metodami statistiky, například použitím testů dobré shody [15], [18], [19].

V praktické ukázce modelování kolektivního rizika metodou Monte Carlo bude pro testy dobré shody vzhledem k jejich výpočetní náročnosti využíván statistický program. Princip dvou nejčastěji používaných testů dobré shody je popsán v následující kapitole.

## 2.2 Testy dobré shody

Všeobecný postup pro výběr nejvhodnějšího rozdělení počtu a výšky pojistných plnění lze shrnout do třech kroků [15]:

- Návrh předpokládaného typu rozdělení pravděpodobnosti na základě grafického zobrazení rozdělení četností nebo výběrových charakteristik dostupných empirických údajů.
- Odhad parametrů předpokládaného rozdělení (metoda maximální věrohodnosti, metoda momentů, metoda kvantilů).
- Ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry na základě výběrových údajů.

Poslední krok je možno realizovat pomocí testů dobré shody. Pro ověření vhodnosti zvoleného rozdělení se používají zejména *Pearsonův  $\chi^2$  - test dobré shody* a *Kolmogorov-Smirnovův test*.

### 2.2.1 Pearsonův $\chi^2$ - test dobré shody

$\chi^2$ -test dobré shody slouží k ověření shody empirického rozdělení (rozdělení četností výběrových údajů) s předpokládaným teoretickým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti  $f(x; \Theta)$ , kde  $\Theta$  je vektor parametrů nejčastěji odhadnutých z výběrového souboru. Na hladině významnosti  $\alpha$  poté dochází k rozhodnutí, zda přijmout, či zamítnout *nulovou hypotézu* [15]:

- $H_0$ : náhodná proměnná  $X$  má rozdělení s hustotou  $f(x; \Theta)$ .

Východiskem pro test hypotézy  $H_0$  jsou empirické údaje  $x_1, x_2, \dots, x_n$  náhodné proměnné  $X$ , zjištěné z výběrového souboru a roztříděné do  $k$  skupin s četnostmi  $O_1, O_2, \dots, O_k$ . Pro test se využívá testovací charakteristika  $\chi^2$  vyjádřená vztahem [15]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

- Kde  $\chi^2$ -rozdělení má počet stupňů volnosti  $k - 1 - p$ , přičemž  $p$  je počet odhadnutých parametrů předpokládaného teoretického rozdělení s hustotou  $f(x; \Theta)$ ,  $O_i$  jsou empirické, skutečně zjištěné četnosti hodnot  $x_i$  diskrétní proměnné nebo intervalu  $(x_{i-1}, x_i)$  hodnot  $x$  spojitě proměnné  $X$  a  $E_i$  jsou příslušné teoretické, očekávané četnosti vyjádřené vztahem [15]:

$$E_i = np_i$$

- Kde  $n$  je rozsah výběrového souboru a  $p_i$  je pravděpodobnost hodnoty  $x_i$  diskrétní proměnné s předpokládaným rozdělením ( $p_i = P(x_i) = P(X = x_i)$ ), respektive pravděpodobnost intervalu hodnot  $x \in (x_{i-1}, x_i)$  spojitě proměnné ( $p_i = P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ), kde  $F(x)$  je distribuční funkce předpokládaného teoretického rozdělení).

Pokud charakteristika  $\chi^2$  nabývá hodnoty blízké nule, naznačuje to platnost nulové hypotézy, protože mezi hodnotami  $O_i$  a  $E_i$  jsou malé rozdíly. Naopak její vysoké hodnoty signalizují platnost *alternativní hypotézy* [15]:

- $H_1$ : náhodná proměnná  $X$  nemá rozdělení s hustotou  $f(x; \Theta)$ .

Nulová hypotéza  $H_0$  se přijme na hladině významnosti tehdy, když vypočítaná hodnota testovací charakteristiky  $\chi^2$  nepřekročí hodnotu percentilu  $\chi^2_{1-\alpha}$  rozdělení  $\chi^2$  s  $k - 1 - p$  stupni volnosti. Nulová hypotéza se tedy přijímá, pokud platí:

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$$

Nejčastěji se při testu používá hladina významnosti  $1 - \alpha = 0,95$ . Potom  $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0,95}$  je 95. percentil  $\chi^2$ -rozdělení s  $k - 1 - p$  stupni volnosti.

## 2.2.2 Kolmogorov-Smirnovův test

V případě, že náhodný výběr pochází ze spojitého rozdělení specifikovaného distribuční funkcí  $F(x)$ , a rozsah  $n$  výběrového souboru není postačující na použití  $\chi^2$ -testu, potom lze použít Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody pro testování nulové hypotézy [15]:

- $H_0$ : náhodná proměnná  $X$  má rozdělení s distribuční funkcí  $F(x)$ .

Tento test na rozdíl od  $\chi^2$ -testu vychází z netříděných, vzestupně uspořádaných výběrových údajů  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ .

Uspořádanému náhodnému výběru ( $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ ) přísluší výběrová neboli empirická distribuční funkce definovaná vztahem [15]:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{(1)} \\ \frac{j}{n} & x_{(j)} < x \leq x_{(j+1)} \\ 1 & x > x_{(n)} \end{cases}$$

- Kde  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Hodnota empirické distribuční funkce  $F_n(x)$  je pro dané  $x$  náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$ , přičemž hodnotu  $\frac{1}{n}$  má tehdy, pokud  $j$  výběrových údajů je menších jak hodnota  $x$  a současně  $n - j$  výběrových údajů je větší nebo rovno hodnotě  $x$ .

Kolmogorov-Smirnovova testovací charakteristika je definovaná vztahem [15]:

$$d_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (2.5)$$

- Kde  $d_n$  představuje maximální absolutní odchylku výběrové distribuční funkce  $F_n(x)$  od spojitě distribuční funkce  $F(x)$ , která je předpokládána nulovou hypotézou.



Empirická distribuční funkce  $F_n(x)$  je nespojitá a jejím grafickým obrazem je schodovitá funkce s body nespojitosti  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ . Maximální absolutní odchylka  $|F_n(x) - F(x)|$  tak může představovat buď vzdálenost křivky  $F(x)$  od paty schodu, nebo vzdálenost této křivky od vrcholu schodu. Při určování hodnoty testovacího kritéria  $d_n$  se zkoumají v bodech  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  absolutní odchylky [15]:

$$\left| F_n(x_{(j)}) - F(x_{(j)}) \right| \quad \left| F_n(x_{(j+1)}) - F(x_{(j)}) \right| \quad (2.6)$$

- Kde  $j = 1, 2, \dots, n$  a  $F_n(x_{(n+1)}) = 1$ .

Největší z těchto odchylek se považuje za hodnotu testovacího kritéria  $d_n$ .

V případě, že je podle předpokladu funkce  $F(x)$  spojitá, je možné najít rozdělení statistiky  $d_n$ , které nezávisí na  $F(x)$ . Ve statistických tabulkách pro Kolmogorov-Smirnovův test jsou uvedené kvantily  $d_{n;0,95}$  a  $d_{n;0,99}$  tohoto rozdělení pro rozsah výběru  $n = 1, 2, \dots, 100$ , které při testování hypotézy slouží jako kritické hodnoty.

Pro soubory s rozsahem větším než sto hodnot je možné využít asymptotické rozdělení náhodné proměnné  $d_n$ . Kritické hodnoty  $d_{n;0,95}$  a  $d_{n;0,99}$  se tak v tomto případě určují podle vztahů [15]:

$$d_{n;0,95} \approx \frac{1,358}{\sqrt{n}} \quad d_{n;0,99} \approx \frac{1,628}{\sqrt{n}}$$

Nulová hypotéza se přijme tehdy, pokud platí, že  $d_n < d_{n;1-\alpha}$ , kde  $\alpha = 0,05$ , případně  $\alpha = 0,01$  je hladina významnosti.

## 2.3 Praktická ukázka modelování rizika metodou Monte Carlo

Vzhledem k velké výpočtové pracnosti spojené s testy dobré shody empirických a teoretických rozdělení stejně jako s maximálně věrohodnými odhady parametrů teoretických rozdělení je vhodné použít účinný statistický program.

Všechny provedené výpočty v této kapitole byly realizovány pomocí programu STATGRAPHICS *Centurion XV*.

Pro výběr vhodného rozdělení výšky pojistných plnění při určitém neživotním pojištění bylo použito 96 pojistných plnění z portfolia pojistek. Peněžní jednotka pro dané údaje je 100 Kč. Jednotlivé výšky pojistných plnění prezentuje tabulka 1:

**Tabulka 1: Individuální pojistná plnění [15]**

24	26	73	84	102	115
132	159	207	240	241	254
268	272	282	300	302	329
346	359	367	375	378	384
452	475	495	503	531	543
563	594	609	671	687	691
716	757	821	829	885	893
968	1053	1081	1083	1150	1205
1262	1270	1351	1385	1498	1546
1565	1635	1671	1706	1820	1829
1855	1873	1914	2030	2066	2240
2413	2421	2521	2586	2727	2797
2850	2989	3110	3166	3383	3443
3512	3515	3531	4068	4527	5006
5065	5481	6046	7003	7245	7477
8738	9197	16370	17605	25318	58524

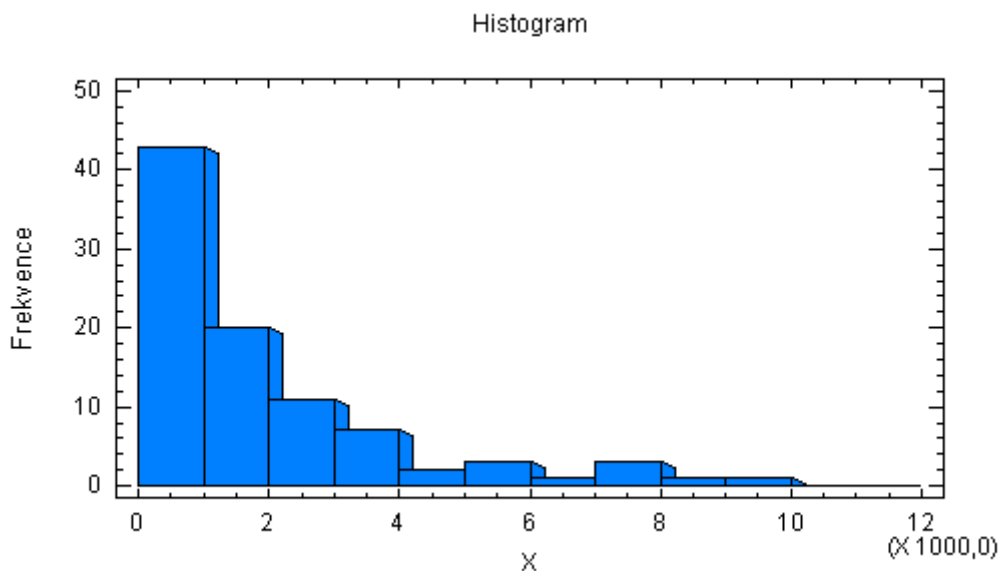
Předpokládá se, že model počtu pojistných nároků  $N$  má Poissonovo rozdělení pravděpodobností s parametrem  $\lambda = 100$  ( $N \approx P(\lambda = 100)$ ). Pomocí funkce *Probability Distributions*, která je součástí procedury *Distribution Fitting* bylo vygenerováno 100 hodnot počtu pojistných nároků s tímto rozdělením pravděpodobností. Získané hodnoty lze vidět v tabulce 2:

**Tabulka 2: Vygenerované hodnoty počtu pojistných nároků [vlastní]**

86	112	88	93	82	107	101	115
106	103	97	109	103	85	116	117
103	92	95	104	95	91	82	88
110	109	99	104	104	97	93	112
94	113	105	127	87	85	105	107
101	99	106	105	86	94	101	113
90	111	106	105	96	103	84	85
106	97	85	104	112	100	91	104
104	103	113	101	90	95	108	96
114	92	100	90	114	84	88	106
105	100	84	87	103	92	101	110
119	93	79	95	82	86	98	118
96	108	93	106	-	-	-	-

Získané hodnoty tedy představují pravděpodobný počet pojistných plnění pro pojišťovnu v rámci 100 účetních období. Pomocí těchto hodnot byly poté generovány jednotlivé výšky individuálních pojistných plnění, pro jejichž zjištění bylo třeba odhadnout, z jakého rozdělení pravděpodobnosti pochází původní data.

Nejprve bylo nutné vytvořit si konkrétní představu o empirickém rozdělení výběrových údajů uvedených v tabulce 1. Základní informace o rozdělení výšky pojistných plnění lze určit pomocí histogramu vytvořeného ze zadaných hodnot individuálních pojistných plnění, což dokumentuje obrázek 1:



**Obrázek 2: Histogram rozdělení četnosti výšky individuálních pojistných plnění [vlastní]**

Dále je vhodné vypočítat základní výběrové charakteristiky pomocí procedury *Summary Statistics* v programu *STATGRAPHIC Centurion*. Tyto charakteristiky zachycuje tabulka 3:

**Tabulka 3: Základní charakteristiky výšky individuálních pojistných plnění [vlastní]**

Počet	96
Průměr	2989,83
Medián	1233,50
Modus	1205
Variance	4,70062E7
Směrodatná odchylka	6856,11
Dolní kvartil	418
Horní kvartil	2823,5
Koeficient šikmosti	6,26519
Koeficient špičatosti	46,8536
Koeficient variace	229,314
Suma	287024

Ze získaných informací je zřejmé, že většina pojistných plnění má nízké hodnoty, jde o pozitivně (pravostranně) zešikmené rozdělení, protože koeficient šikmosti nabyl hodnoty větší než nula. Výskyt extrémně vysokých hodnot poukazuje na velkou variabilitu pojistných plnění.

Vhodným modelem výšky pojistných plnění tak může být některé z pravostranně zešikmených rozdělení, jako jsou exponenciální, Pareto, gama, lognormální nebo Weibullovo rozdělení.

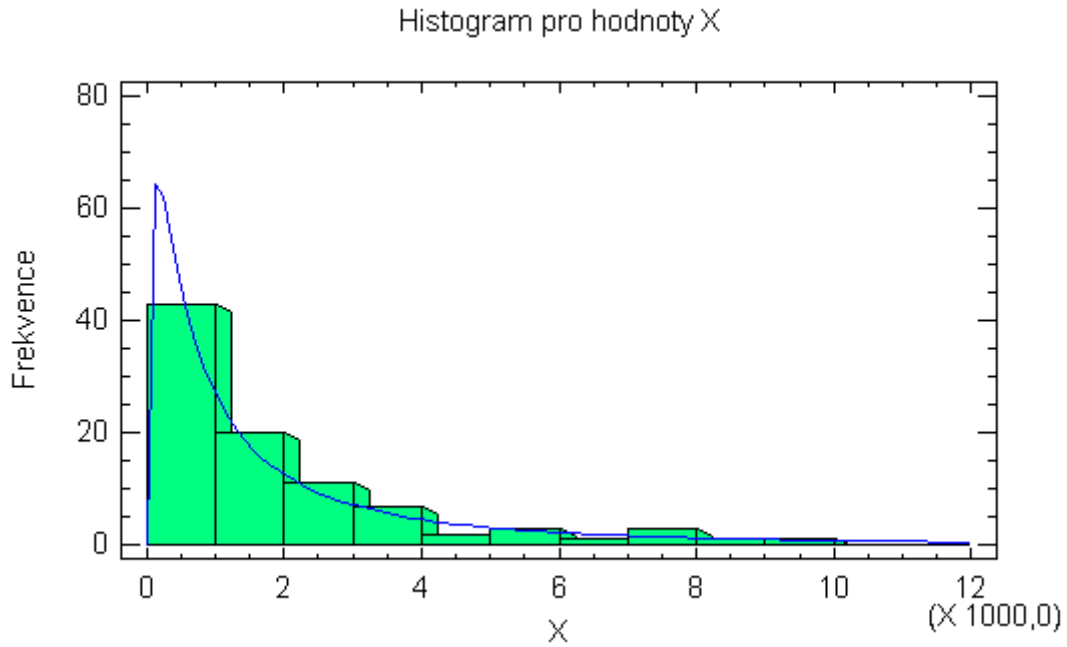
Pomocí procedury *Distribution fitting* v rámci testů dobré shody se ověří předpoklad o shodě empirického rozdělení výšky pojistných plnění pro výše uvedená pravostranně zešikmená rozdělení, přičemž pro testování bude zvolena hladina významnosti  $\alpha = 0,05$ . Hodnoty testované charakteristiky  $\chi^2$  a *p-Value* jsou uvedené v tabulce 4:

**Tabulka 4: Výsledky Chí-kvadrát testu pro individuální pojistná plnění [vlastní]**

Rozdělení	$\chi^2$	<i>p-Value</i>
Exponenciální	18,6776	0,0166825
Pareto	184,187	0,0
Gama	6,86116	0,443478
Lognormální	1,95929	0,923405
Weibullovo	4,40746	0,73183

Jednotlivé hodnoty výsledků  $\chi^2$ -testu jsou závislé na počtu intervalů, do kterých se třídí empirické údaje, od jejich dolní a horní hranice, ale také na tom, zda se použije řazení do tříd se stejnou pravděpodobností. Výsledky v tabulce 4 byly docíleny při zadaném počtu 12 intervalů, přičemž se spodní hranice rovnala 0, horní hranice představovala hodnotu 15000 a řazení bylo aplikováno do tříd s různou pravděpodobností.

Porovnáním hodnot testovacího kritéria  $\chi^2$  a hodnot  $p$ -Value je zřejmé, že pojistná plnění nejlépe modeluje lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Shoda empirického rozdělení výšky pojistných plnění s lognormálním rozdělením je patrná na obrázku 2:



**Obrázek 3: Grafické porovnání shody výšky individuálních pojistných plnění s lognormálním rozdělením [vlastní]**

Dosažené výsledky v programu STATGRAPHICS *Centurion* poukazují na malé rozdíly mezi empirickými četnostmi  $O_i$  a teoretickými četnostmi  $E_i$ , jak při intervalech nejnižších, tak nejvyšších pojistných plnění. Výsledky  $\chi^2$ -testu a *K-S* testu pro toto rozdělení jsou na obrázku 4:

<b>Goodness-of-Fit Tests for X</b>					
Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		1000,0	43	44,91	0,08
	1000,0	2000,0	20	18,44	0,13
	2000,0	3000,0	11	9,44	0,26
	3000,0	4000,0	7	5,67	0,31
	4000,0	5000,0	2	3,74	0,81
	5000,0	6000,0	3	2,63	0,05
	6000,0	8000,0	4	3,39	0,11
	8000,0	10000,0	2	2,04	0,00
above	10000,0		4	5,01	0,20

Chi-Squared = 1,95929 with 6 d.f. P-Value = 0,923405

Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Lognormal</i>
DPLUS	0,0509025
DMINUS	0,0428284
DN	0,0509025
P-Value	0,964745

**Obrázek 4: Testy dobré shody pro individuální pojistná plnění s lognormálním rozdělením [vlastní]**

Na základě dosažených výsledků lze tvrdit, že vhodné rozdělení výšky pojistných plnění pro uvedené hodnoty je lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Pro generování náhodných hodnot výšky individuálních škod bude tedy použit tento druh rozdělení. Celkové výsledky ostatních testovaných rozdělení jsou uvedeny v příloze A.

Součástí procedury *Distribution Fitting* je také *Analysis Summary*, kde jsou uvedeny střední hodnota a rozptyl včetně parametrů lognormálního rozdělení potřebných pro generování nových hodnot, které jsou zachyceny na obrázku 5:

<b>Fitted Distributions</b>	
<i>Lognormal</i>	
mean =	3011,06
standard deviation =	7510,78
Log scale: mean =	7,02148
Log scale: std. dev. =	1,40611

**Obrázek 5: Parametry lognormálního rozdělení [vlastní]**

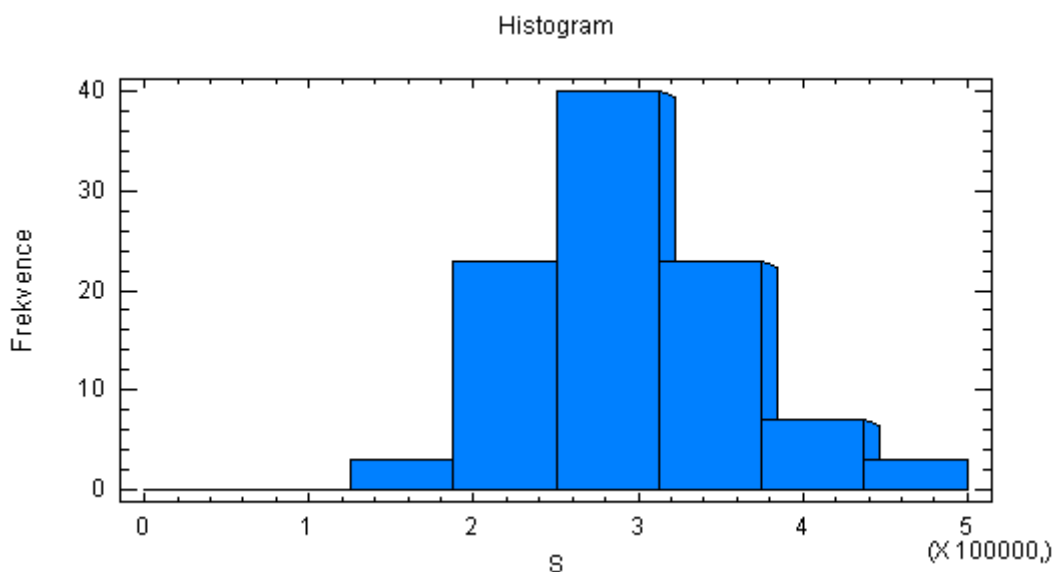
Na základě analýzy původních údajů v tabulce 1 byly tedy generovány jednotlivé soubory čítající výšky individuálních pojistných plnění  $X$  z lognormálního rozdělení ( $X \approx LN(\mu = 7,02148; \sigma = 1,40611)$ ) pomocí procedury *Probability Distributions*, přičemž počet individuálních pojistných plnění v daných souborech byl určen dle tabulky 2. Získané hodnoty celkových škod  $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ , jejichž peněžní jednotku představuje 100 Kč, jsou uvedeny v tabulce 5:

**Tabulka 5: Získané hodnoty celkových škod [vlastní]**

225602	319918	228310	380466	268029	308967	244523	471258
205621	231304	334728	268346	235640	312985	269011	281834
364957	380734	335573	343254	394275	389830	317670	282679
282428	291840	422124	292374	257879	295484	184772	547671
366312	265228	251505	282584	266184	238686	257383	287752
267879	235273	335519	315107	360453	283969	243534	279501
490847	267069	339575	362429	274843	325620	165262	248166
268438	347235	188828	278692	311005	288455	240603	410336
317033	243192	326486	264791	358413	240693	340177	328637
252645	303580	260899	232792	297600	224776	220467	279409
395340	290410	245218	230449	357086	218233	263653	256199
336603	309052	208798	208612	283398	258050	162592	344356
468107	244700	294404	307243	-	-	-	-



Hodnoty celkových škod  $s_1, s_2, \dots, s_{100}$  bylo nutné podrobit bližší analýze. Základní informace o rozdělení výšky kolektivního rizika byly opětovně získány pomocí frekvenčního histogramu, který znázorňuje obrázek 6:



**Obrázek 6: Histogram rozdělení výšky celkových škod [vlastní]**

Histogram rozdělení výšky škod poukazuje na pravostranně zešikmené rozdělení. Je zde však patrná jemná inklinace k normálnímu rozdělení. Pro lepší představu byly opět vypočítány základní výběrové charakteristiky pomocí procedury *Summary Statistics* v programu *STATGRAPHIC Centurion XV*. Tyto charakteristiky dokumentuje tabulka 6:

**Tabulka 6: Základní charakteristiky celkových škod [vlastní]**

Počet	100
Průměr	294885
Medián	282632
Variance	4,6228E9
Směrodatná odchylka	67991,1
Dolní kvartil	246692
Horní kvartil	335124
Koeficient šikmosti	4,13969
Koeficient špičatosti	3,67808
Koeficient variace	2305,69
Suma	2,94885E7

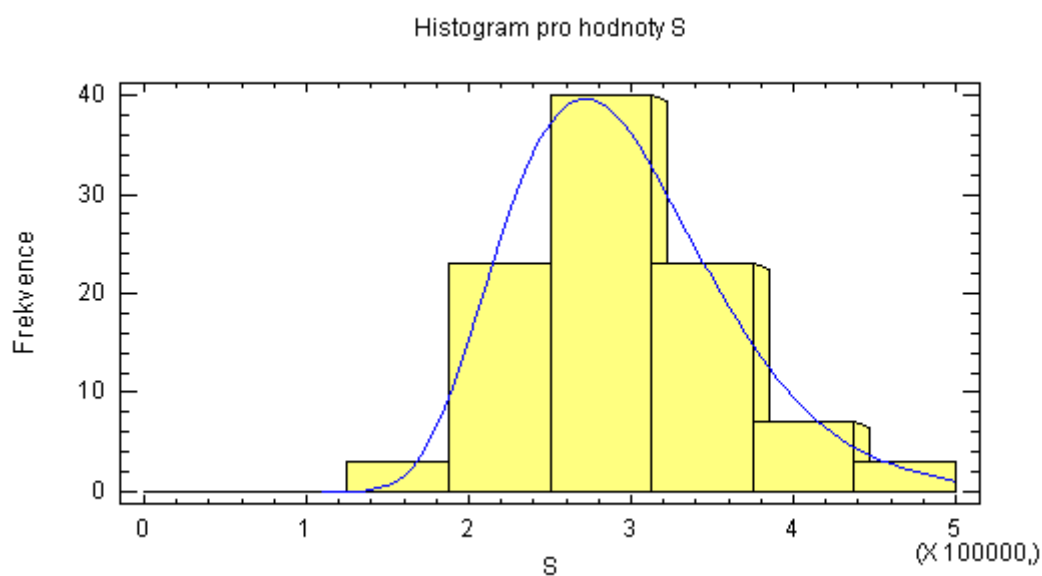
Koeficient šikmosti nabyl hodnoty větší než nula, což poukazuje na pravostranně zešikmené rozdělení. Analýze bylo podrobena posunuté gama a normální rozdělení, pomocí nichž se běžně provádí aproximace kolektivního modelu rizika. Hodnoty pro  $\chi^2$ -test s hladinou významnosti  $\alpha = 0,05$  zachycuje tabulka 7:

**Tabulka 7: Výsledky Chí-kvadrát testu pro celkové škody [vlastní]**

Rozdělení	$\chi^2$	$p$ -Value
Posunutá gama	1,05846	0,58906
Normální	3,52893	0,171279

Pro získání daných výsledků bylo v tomto případě zvoleno 8 intervalů, přičemž spodní hranice se rovnala 0, horní hranice představovala hodnotu 500000 a řazení bylo aplikováno do tříd s různou pravděpodobností.

Porovnáním hodnot testovacího kritéria  $\chi^2$  a hodnot  $p$ -Value je zřejmé, že pojistná plnění lépe modeluje posunutá gama rozdělení pravděpodobnosti. Shoda empirického rozdělení výšky celkových pojistných plnění s posunutým gama rozdělením je patrná na obrázku 7:



**Obrázek 7: Grafické porovnání shody celkových škod s posunutým gama rozdělením [vlastní]**

Komplexní analýzu testů dobré shody v programu STATGRAPHICS *Centurion* lze vidět na obrázku 8:

<b>Goodness-of-Fit Tests for S</b>					
Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		187500,	3	2,40	0,15
	187500,	250000,	23	24,41	0,08
	250000,	312500,	40	37,79	0,13
	312500,	375000,	23	23,56	0,01
	375000,	437500,	7	8,81	0,37
above	437500,		4	3,03	0,31

Chi-Squared = 1,05846 with 2 d.f. P-Value = 0,58906

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Gamma (3-Parameter)</i>
DPLUS	0,0496259
DMINUS	0,0447418
DN	0,0496259
P-Value	0,966288

**Obrázek 8: Testy dobré shody pro celkové škody s posunutým gama rozdělením [vlastní]**

Celkové výsledky normálního rozdělení pro výšku celkových škod jsou uvedeny v příloze B.

### 3 KVANTIFIKACE RIZIKOVÉHO KAPITÁLU METODOU VALUE AT RISK

Obsahem kapitoly je popis metody Value at Risk. Bude vysvětlena její podstata a specifikace včetně možností parametrického výpočtu této metody.

Modely Value at Risk (VaR) [1], [2], [11], [13], [20], [23] vyvinuly vyspělé banky k měření celkového tržního rizika portfolia. Výchozím předpokladem je, že finanční instituce mají lepší předpoklady sestavit modely, které přesně měří riziko během určité doby držení, než regulátoři. Tím, že modely nahrazují jednotná regulační pravidla měření rizik, kapitálové požadavky by měly lépe odrážet skutečné riziko jednotlivých institucí. Úlohou regulátorů je potom modely ověřit. Tato varianta byla umožněna na žádost bank a představuje zásadní průlom do jinak přesně stanovených postupů regulátorů. I když odpovědnost za model nese finanční instituce (banka, pojišťovna), dohled musí modely testovat, aby instituce nebyla vystavena nepřiměřeně velkému riziku. Modely VaR se obecně používají k měření rizika velkých portfolií, k alokaci kapitálu mezi obchodní jednotky a k výpočtu regulačního kapitálu [13].

#### 3.1 Podstata metody VaR

Metodika VaR je založena na odhadu nejhorší ztráty, ke které může dojít s předepsanou pravděpodobností ve stanoveném budoucím období.

Ve finančních institucích se jedná o jeden z nejpoužívanějších přístupů pro stanovení kapitálových požadavků při regulaci kapitálové přiměřenosti a vůbec pro řízení finančních rizik [1].

Výsledkem této metody tak například může být výpočetně podložené tvrzení, že denní VaR činí 10 mil. Kč se spolehlivostí 95%. To znamená, že případná denní ztráta vyšší než 10 mil. Kč hrozí s pravděpodobností pouze 5%. Jinými slovy, za neměnných podmínek lze ztrátu vyšší než 10 mil. Kč očekávat nejvýše v jednom z dvaceti příštích obchodních dní. Výsledky tohoto typu lze zužítkovat nejrůznějšími způsoby [2]:

- Pro stanovení kapitálových požadavků jako nejdůležitější aplikaci metody VaR.
- Pro alokaci investičních prostředků, například pro stanovení horních hranic omezujících investiční aktivity jednotlivých obchodníků banky dle jejich předchozích výsledků formulovaných právě pomocí metody VaR.

- Pro ohodnocení jednotlivých obchodníků zohledňující také hledisko rizikivosti jejich investičních aktivit.
- Pro názornější a operativnější informovanost jak vrcholového managementu, tak akcionářů o rizikivosti prováděných investičních aktivit.
- Pro řízení finančních rizik (risk management) nejen v bankách, ale i jiných finančních institucích, jako jsou pojišťovny, penzijní fondy atd.
- Pro integraci různých typů rizik do jedné hodnoty, umožňující mimo jiné vzájemně porovnat různé systémy.

Při metodě VaR se vyčleňuje s předepsanou pravděpodobností nejzazší konec na straně možných ztrát. Jiné metody nepřinášejí požadované informace o riziku portfolia ke ztrátě nebo jsou komplikovanější. Alternativou by mohly být [2]:

- Maximálně možná škoda (maximum possible loss) – zde se jedná o hodnotu celého portfolia, která je ve většině případů známá a nepřináší žádnou informaci o tom, jak náchylné je toto portfolio ke ztrátě.
- Volatilita míry zisku portfolia – tento ukazatel vypovídá pouze o proměnlivosti míry zisku a nezohledňuje konkrétní pravděpodobnost ztráty.
- Střední hodnota nejzazšího konce ztrát odpovídajícího předepsané pravděpodobnosti (expected tail loss) - její výpočet je v praxi komplikovanější než klasická metoda VaR.

### **3.2 Specifikace metody VaR**

Metodiku VaR specifikují přinejmenším dva faktory, které musí být předem nastaveny (časový horizont a spolehlivost). Volba obou těchto faktorů je subjektivní, ale v některých standardně používaných systémech typu RiskMetrics nebo doporučeních dozorových a regulačních orgánů je jejich velikost pevně nastavena [2].

Časový horizont (holding period) je období, přes které se možná ztráta uvažuje. Mluví se například o denní hodnotě v riziku přes jeden obchodní den nebo o desetidenní hodnotě v riziku přes dva kalendářní týdny s deseti obchodními dny. Volbu časového horizontu v konkrétní situaci ovlivňuje řada okolností [2]:

- Likvidita trhu – doba potřebná na likvidaci příslušných pozic ve finančních nástrojích v rámci dané investice. Jestliže obchodní portfolio banky je tvořeno z velké části vysoce likvidními měnami, pak je vhodný denní VaR. V případě, že správce investičního portfolia složeného z méně likvidních cenných papírů provádí rebalancování a výkaznictví čtvrtletně, je na místě devadesátidenní VaR.
- Neměnnost portfolia – je často předpokládána při výpočtu hodnoty v riziku. Požadavek neměnnosti portfolia mluví ve prospěch kratších časových horizontů, neboť během delších časových horizontů jsou změny ve složení investičního portfolia velmi reálné.
- Ověřitelnost získaných výsledků – ověřovací postupy vyžadují větší objem skutečně pozorovaných hodnot (zisků a ztrát v posuzovaném portfoliu), což mluví opět ve prospěch kratších časových horizontů, neboť pak počet pozorování přibývá rychleji.

Konkrétně RiskMetrics pracuje s jednodenním časovým horizontem, zatímco doporučení Basilejského výboru pro bankovní dohled je desetidenní VaR (v průměru přes dva kalendářní týdny vždy s deseti obchodními dny).

Spolehlivost (confidence level) je pravděpodobnost, se kterou skutečná ztráta nepřevýší hodnotu v riziku během příslušného časového horizontu; pracuje se například se spolehlivostí 95% nebo 99%. Konkrétně RiskMetrics pracuje se spolehlivostí 95%, zatímco doporučení Basilejského výboru pro bankovní dohled je spolehlivost 99%.

Kromě časového horizontu a spolehlivosti jsou pro specifické modely VaR případně nutná další upřesnění (například bezpečnostní koeficient při výpočtu kapitálových požadavků).

Dále je třeba zavést značení pro elementy, se kterými se bude pracovat při různých výpočtech VaR. Pro uvedené vzorce se bude používat následující symboliky [1]:

- $X$  – náhodná veličina představující zisk (když  $X$  je kladná) nebo ztrátu (když  $X$  je záporná) vzniklé během příslušného časového horizontu (například v posuzovaném investičním portfoliu).
- $c$  – požadovaná spolehlivost (například  $c = 0,99$ ).
- $P$  – cena (například posuzovaného investičního portfolia).
- $r$  – míra zisku přes příslušný časový horizont uvažovaná jako náhodná veličina se střední hodnotou  $\mu$ .
- $r_{1-c} - (1 - c)$  – kvantil náhodné veličiny  $r$ .
- $z_{1-c} - (1 - c)$  – kvantil normovaného normálního rozdělení  $N(0, 1)$ .

Při zavedeném značení lze pak příslušnou denní hodnotu v riziku VaR definovat vztahy [1]:

- *Absolutní hodnota v riziku*  $VaR^{abs}$ : hodnota  $-VaR^{abs}$  je  $(1 - c)$  – kvantil  $x_{1-c}$  náhodné veličiny  $X$ :

$$P(X < -VaR^{abs}) = 1 - c$$

- *Relativní hodnota v riziku*  $VaR^{rel}$ : je vztažena ke střední hodnotě  $E(X)$  náhodné veličiny  $X$  jako vzdálenost absolutní hodnoty v riziku od středního zisku; v praxi se jednoduše nazývá *hodnota v riziku* a značí se jen jako  $VaR$ , neboť se používá nejčastěji:

$$VaR = VaR^{rel} = VaR^{abs} + E(X)$$

- Absolutní hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku:

$$VaR^{abs} = -P \cdot r_{1-c}$$

- Hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku:

$$VaR = VaR^{rel} = -P \cdot (r_{1-c} - \mu)$$

### 3.3 Parametrický výpočet VaR

#### 3.3.1 Výpočet VaR pomocí normálního rozdělení

Pokud lze rozdělení míry zisku přes příslušný časový horizont popsat pomocí nějakého parametrického rozdělení s odhadnutelnými parametry, pak lze provést parametrický výpočet hodnoty v riziku. Pro tento účel se nejčastěji využívá normální rozdělení [1]:

- Absolutní hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku s *normálním rozdělením*  $r \approx N(\mu, \sigma^2)$ :

$$VaR^{abs} = -P \cdot (\mu + \sigma \cdot z_{1-c})$$

- Hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku s *normálním rozdělením*  $r \approx N(\mu, \sigma^2)$ :

$$VaR = -P \cdot \sigma \cdot z_{1-c}$$

- Hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku s *normálním rozdělením*  $r \approx N(\mu, \sigma^2)$  přes časový horizont  $\Delta t$ . Přitom náhodná míra zisku  $r$  se vztahuje na časovou jednotku, takže například pro roční míru zisku  $r$  a denní časový horizont při 252 obchodních dnech v roce je  $\Delta t = 1/252$ ):

$$VaR = -P \cdot \sigma \cdot z_{1-c} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

- Hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku s *normálním rozdělením*  $r \approx N(\mu, \sigma^2)$  přes časový horizont  $\Delta t$  a se spolehlivostí 95% (dle RiskMetrics):

$$VaR = 1,65 \cdot P \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$$

- Hodnota v riziku vyjádřená pomocí míry zisku s *normálním rozdělením*  $r \approx N(\mu, \sigma^2)$  přes časový horizont  $\Delta t$  a se spolehlivostí 99% (dle Basilejského výboru pro bankovní dohled):

$$VaR = 2,33 \cdot P \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$$

- Hodnota v riziku konstruovaná jako předpověď v čase  $t$  pro budoucí časový horizont  $\Delta t$  s využitím předpovědi volatility  $\sigma_{t+\Delta t/t}$ :

$$VaR_{t+\Delta t/t} = -P \cdot \sigma_{t+\Delta t/t} \cdot z_{1-c} \cdot \sqrt{\Delta t}$$



- *Denní příjem v riziku*: jsou denní předpovědi hodnoty v riziku ( $t$  představuje jednotlivé obchodní dny) při spolehlivosti 95%:

$$DEaR = VaR_{t+1/t} = 1,65 \cdot P \cdot \sigma_{t+1/t}$$

### 3.3.2 Přírůstková hodnota v riziku

- *Přírůstková hodnota v riziku*: vyjadřuje přírůstek  $\Delta VaR_p$  hodnoty v riziku portfolia  $VaR_p$ , odpovídající přírůstku  $\Delta P_i$  ceny  $P_i$   $i$ -tého aktiva v portfoliu o  $\Delta P_i$  ( $\beta_i$  je koeficient citlivosti relativních změn volatility ceny portfolia na změny v ceně  $i$ -tého aktiva v portfoliu) [2]:

$$\Delta VaR_p = VaR_p \cdot \beta_i \cdot \Delta P_i$$

- Rozklad hodnoty v riziku portfolia [2]:

$$VaR_p = \sum_{i=1}^N VaR_p \cdot \beta_i \cdot P_i$$

Co se týče rozdělení náhodné veličiny  $X$  (zisk nebo ztráta), respektive  $r$  (míra zisku), často se předpokládá normální rozdělení. Při aproximaci normálním rozdělením však v praxi často překáží nedostatečně těžký záporný konec na straně ztrát. Při nevhodném použití normální aproximace poté vychází hodnota v riziku nižší, než by měla správně být. Proto byly navrženy různé alternativy k normální aproximaci, například  $t$ -rozdělení, směs normálních rozdělení atd. [1].

### 3.3.3 Výpočet VaR pomocí t-rozdělení

Studentovo t-rozdělení je pravděpodobnostní rozdělení intenzivně využívané ve statistice. Jeho pravděpodobnostní hustota má tvar [2]:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot n}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

- Kde přirozené číslo  $n$  je tzv. *počet stupňů volnosti* a  $\Gamma(\cdot)$  je gama funkce. Toto rozdělení má střední hodnotu  $E(X) = 0$  a pro  $n > 2$  rozptyl  $\text{var}(X) = n/(n - 2)$ . Průběh jeho pravděpodobnostní hustoty je podobný jako u normálního rozdělení, má však těžší konce než odpovídající normální rozdělení. Proto jeho použití v metodě VaR místo normálního rozdělení dává často korektnější výsledky, jak dokazuje řada reálných příkladů. Jediný parametr  $n$  se nastaví tak, aby rozptyl  $n/(n - 2)$  odpovídal výběrovému rozptylu vypočtenému z dat.

### 3.3.4 Výpočet VaR pomocí směsi normálních rozdělení

Směs normálních rozdělení může být v nejjednodušším případě definována pro míru zisku  $r_t$  s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_t$  jako [2]:

$$r_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_{1t} + \sigma_t \cdot \delta_t \cdot \varepsilon_{2t}$$

- Kde  $\varepsilon_{1t}$  a  $\varepsilon_{2t}$  jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $\varepsilon_{1t} \approx N(0;1)$  a  $\varepsilon_{2t} \approx N(\mu_{2t}; \sigma_{2t}^2)$  a  $\delta_t$  je nula-jedničková náhodná veličina s rozdělením  $P(\delta_t = 1) = 1 - P(\delta_t = 0) = p$  ( $p$  je kladné číslo blízké nule). V rámci takového modelu se  $r_t$  chová většinou jako náhodná veličina s rozdělením  $N(\mu_{2t}; \sigma_t^2 \cdot (1 + \sigma_{2t}^2))$ . Náhodná veličina  $r_t$  pak vykazuje žádoucí záporný těžký konec, je-li buď  $\mu_{2t}$  velké záporné číslo (rozptyl  $\sigma_{2t}^2$  v tom případě může být jednotkový), nebo  $\sigma_{2t}^2$  číslo mnohem větší než jedna (střední hodnota  $\mu_{2t}$  v tom případě může být nulová).

Parametry v tomto modelu lze z dat odhadnout pomocí postupů bayesovské statistiky.

### 3.3.5 Výpočet VaR pomocí rozdělení GED

Rozdělení GED (generalized error distribution) je oblíbené ve financích, neboť je velmi flexibilní v závislosti na volbě jediného parametru a zahrnuje jako speciální případ také normální rozdělení. Má pravděpodobnostní hustotu tvaru [2]:

$$f(x) = \frac{v}{\lambda \cdot 2^{1+v^{-1}} \cdot \Gamma(v^{-1})} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right), \quad -\infty < x < \infty$$

- Kde  $\lambda = [2^{-(2/v)} \cdot v \cdot \Gamma(1/v) / 3]^{1/2}$ . Vlastnosti tohoto rozdělení lze řídit jediným kladným parametrem  $v$ : například pro  $v = 2$  se dostane normální rozdělení, zatímco pro  $v < 2$  se jedná o rozdělení s těžkými konci, které jsou tím výraznější, čím je  $v$  blíže nule. V rámci metody VaR se doporučuje rozdělení GED aplikovat pro normovanou náhodnou veličinu  $r_t / \sigma_t$ .

## 4 METODY MODELŮ VaR

Kapitola se zaměřuje na konkrétní metody modelů VaR (metoda variancí a kovariancí, historická simulace, strukturovaná metoda Monte Carlo, analýza scénářů). Dále obsahuje praktickou ukázkou aplikace metody VaR na neživotní pojištění.

Existují různé metody odhadu VaR a finanční instituce mají poměrně velkou flexibilitu v používání modelů. Neexistuje standardní metoda VaR. Metody VaR se liší [13]:

- V metodách simulace změn rizikových faktorů.
- V metodách transformace změn rizikových faktorů na změnu hodnoty portfolia.

Při použití nástrojů s proměnlivými peněžními toky se tyto peněžní toky stanoví z rizikových faktorů. Poté se diskontují na současnou hodnotu. Většina metod VaR předpokládá statické portfolio.

Existují tři hlavní metody stanovení VaR, a to metoda variancí a kovariancí, metoda historické simulace a metoda Monte Carlo. Doplnkem pro tyto metody je pak analýza scénářů (stress testing).

Neexistuje jednoznačný názor o nejlepší metodě. Využívají rozdílné korelace. Metoda variancí a kovariancí je založena na průměrných korelacích po celé období, zatímco metoda simulací počítá skutečné korelace v konkrétní dny. Během extrémních tržních změn se korelace značně mění, což má dopad na VaR. Korelace mezi trhy mohou být blízké jedné, v případě, že se trhy pohybují společně. I když v takových obdobích neexistuje efekt diverzifikace, je možné zisku dosáhnout kombinací dlouhých a krátkých pozic v různých rizikových kategoriích. Jindy je korelace mezi trhy blízká nule a diverzifikace je výhodná [13].

### 4.1 Metoda variancí a kovariancí

První metodou je metoda variancí a kovariancí (tzv. parametrická metoda), u které se k odhadu potenciálních ztrát portfolia v budoucnosti využívá statistiky o volatilitách hodnot v minulosti a korelací mezi změnami hodnot. Volatility a korelace rizikových faktorů se stanoví pro zvolené doby držení a historické období, a to pomocí historických údajů.

VaR odvozuje od rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů změny hodnoty portfolia. Vychází z určitého rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů a předpokládá korelace mezi nimi. Parametrický přístup je založen na předpokladu, že rozdělení budoucích výnosů náleží do určité parametrické skupiny. Stanoví se rozdělení pravděpodobnosti potenciálních změn hodnoty portfolia pro tisíce scénářů, vyskytujících se s určitou pravděpodobností [13]. Metoda variancí a kovariancí se poměrně snadno aplikuje při splnění následujících dvou předpokladů [2]:

- Příslušné zisky a ztráty mají *normální rozdělení*, či modifikace tohoto rozdělení.
- Rozklad analyzované pozice na základní finanční toky je lineární, takže současná hodnota oceňující tuto pozici je lineární funkcí současných hodnot základních finančních toků.

Popsaný postup při splnění uvedených dvou předpokladů se také označuje jako *delta-normální metoda*. Například VaR při spolehlivosti 95% přes jednotkový časový horizont je pak [2]:

$$VaR = 1,65 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i \cdot P_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}} = \sqrt{\text{var}' \cdot R \cdot \text{var}}$$

- Kde  $\text{var} = (1,65 \cdot P_1 \cdot \sigma_1, \dots, 1,65 \cdot P_n \cdot \sigma_n)' = (V_1 \cdot P_1, \dots, V_n \cdot P_n)'$ ,  $P_i$  je cena  $i$ -tého základního finančního toku,  $\sigma_i$  je volatilita míry zisku  $i$ -tého základního finančního toku vyjádřená stejně jako míra zisku v procentech ceny  $P_i$ ,  $\rho_{ij}$  je korelační koeficient měr zisku  $i$ -tého a  $j$ -tého základního finančního toku ( $\rho_{ij} = 1$ ) a  $R$  je korelační matice sestavená z korelačních koeficientů  $\rho_{ij}$ . Často se jako příslušné míry zisku používají přímo odpovídající úrokové míry bezkuponových dluhopisů  $IR_t$ .

Výhodou metody variancí a kovariancí je rychlá a jednoduchá kalkulace, nejsou potřeba rozsáhlá historická data (je pouze nutné znát volatilitu a korelace).

Nevýhodou jsou nepřesné výsledky u nelineárních portfolií, velké informační požadavky (potřeba znát variance a kovariance každé dvojice aktiv v portfoliu) a předpoklad normálního rozdělení pravděpodobností [20].

## 4.2 Historická simulace

U výpočtu VaR pomocí metody historické simulace se počítají potenciální ztráty na základě údajů o minulých hodnotách, konkrétně na základě minulých ztrát u daného instrumentu. Zatímco u metody variance a kovariance se interval počítá statisticky, u této metody se simulují potenciální ztráty na základě historických údajů bez uvažování o rozdělení [13].

Nechť analyzované portfolio je tvořeno v současném čase  $T$  celkem  $N$  nástroji, které jsou v portfolio zastoupeny vahami  $w_{iT}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Nechť míra zisku  $i$ -tého nástroje v čase  $t$  byla  $r_{it}$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Pak se při metodě historických simulací postupuje podle následujícího algoritmu [2]:

1. Simuluje se míra zisku portfolio  $r_{pt}$  s využitím pozorovaných měr zisku  $r_{it}$  jednotlivých nástrojů  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) a hypotetického předpokladu, že složení portfolio v čase  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) bylo stejné jako v současném čase  $T$ :

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^N w_{iT} \cdot r_{it} .$$

Ze získaného výběru měr zisku portfolio pro dostatečný rozsah výběru  $T$  se odhadnou charakteristiky jejich pravděpodobnostního rozdělení, především příslušný kvantil.

2. Poté se stanoví hledaná hodnota v riziku přes budoucí časový horizont za předpokladu, že odhadnuté pravděpodobnostní rozdělení míry zisku portfolio představuje přes tento horizont použitelnou aproximaci.

Výhodou této metody je vhodnost pro všechny instrumenty, poskytnutí údajů o celkovém rozdělení hodnot potenciálního portfolio v budoucnu, není potřeba vytvářet distribuční předpoklad, větší rychlost než je tomu u metody Monte Carlo, protože se neuzívá takového množství budoucích scénářů.

Nevýhodou je problém dlouhého horizontu předpovědí, které pak již mohou být zcela nezávislé na historickém vývoji, riziko nepřesných výsledků u vysokých pravděpodobnostních intervalů 99%, poměrně velká časová i výpočetní náročnost, možnost simulovat vzestupy i propady trhu pouze za předpokladu, že se již uskutečnily v minulosti [20].

### 4.3 Strukturovaná metoda Monte Carlo

Tato poslední metoda k výpočtu VaR používá velké množství simulací vývoje hodnot ceny portfolia. Pomocí simulace je pak možné generovat vysoce pravděpodobnostní odhady VaR. Metoda Monte Carlo a metoda historické simulace si jsou velmi podobné [13].

Vzhledem ke své flexibilitě je tato metoda schopná zohlednit nejrůznější typy rizik a patří tak k nejúčinnějším přístupům k výpočtu VaR.

Při strukturované metodě Monte Carlo se postupuje podle následujícího algoritmu [2]:

1. Zvolí se vhodné modely pro popis chování jednotlivých nástrojů v portfoliu a odhadnou se jejich parametry. Jako příklad lze uvést zobecněný Weinerův proces často využívaný pro modelování vývoje ceny akcie  $P_t$ , ale i jiných finančních nástrojů včetně modelování časové struktury úrokových měr u úrokových instrumentů:

$$dP_t = \mu \cdot P_t dt + \sigma \cdot P_t dz_t$$

- Kde  $\mu$  je míra zisku tržní ceny akcie,  $\sigma$  je volatilita tržní ceny akcie a  $dz_t$  je náhodná veličina s rozdělením  $N(0; dt)$ . Pro praktické účely se spíše používá přírůstkový tvar modelu:

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \mu \cdot P_t \cdot \Delta t + \sigma \cdot P_t \cdot \varepsilon_t \cdot \sqrt{\Delta t}$$

- Kde  $\varepsilon_t \approx N(0;1)$ , přičemž platí:

$$E(P_{t+\Delta t} - P_t) = \mu \cdot P_t \cdot \Delta t, \sigma(P_{t+\Delta t} - P_t) = \sigma \cdot P_t \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Jestliže se generuje  $\varepsilon_t$  v navzájem nezávisle pro jednotkové časové intervaly, pak lze psát:

$$P_T = P_0 \cdot (1 + \mu \cdot T + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{T}), \text{ respektive } P_T = P_0 \cdot e^{\mu \cdot T + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{T}}$$

- Kde  $\varepsilon \approx N(0;1)$ .

2. V případě korelovaných nástrojů v portfoliu je nutné navíc odhadnout jejich korelační strukturu například pomocí jejich korelační matice  $R$ . Simulace náhodných vektorů  $\varepsilon$  s vícerozměrným normálním rozdělením  $N(0; R)$  lze přitom založit na jednoduchém simulování náhodných vektorů  $\eta$  s rozdělením  $N(0; I)$ , kde  $I$  je jednotková matice (za složky vektorů  $\eta$  lze brát navzájem nezávislé skalární náhodné veličiny s rozdělením  $N(0; 1)$ ). Jestliže  $R = T \cdot T'$  s dolní trojúhelníkovou maticí  $T$  tzv. skeletní rozklad matice  $R$ , pak se transformací  $\varepsilon = T \cdot \eta$  zřejmě dostanou vektory  $\varepsilon$  požadovaných vlastností. Místo jednorozměrných modelů pro jednotlivé nástroje se poté použije vícerozměrný model pro celé portfolio. Například v případě portfolia tvořeného několika akciovými tituly se použije vícerozměrná verze jednorozměrného modelu tvaru:

$$P_{j,t+\Delta t} - P_{jt} = \mu_j \cdot P_{jt} \cdot \Delta t + \sigma_j \cdot P_{jt} \cdot \varepsilon_{jt} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

- Kde vektory  $\varepsilon_t$  jsou konstruované pomocí  $\varepsilon = T \cdot \eta$ .
3. Mnohonásobně opakovaným a navzájem nezávislým použitím vhodného generátoru náhodných čísel a zvoleného modelu se simuluje pravděpodobnostní rozdělení ceny portfolia, přičemž simulace jednotlivých cen portfolia se obvykle považují za stejně pravděpodobné a pomocí vzniklého histogramu se najde hledaná hodnota v riziku.

Výhodou této metody je poskytování údajů o celkovém rozdělení hodnot potenciálního portfolia v budoucnosti, možnost využít různé distribuční předpoklady, nejsou potřeba rozsáhlá historická data.

Nevýhodou je časová náročnost, kvantifikace rizika vzestupu nebo propadu trhu pouze pokud jsou tržní scénáře vygenerovány z přiměřeného rozdělení obsahující i tuto situaci, existence rizika modelu generujícího náhodné proměnné [20].



## 4.4 Analýza scénářů

Analýza scénářů (stress testing) se používá k testování zranitelnosti analyzovaného portfolia vůči různým hypotetickým jevům. Spočívá ve vyhodnocování chování portfolia pro subjektivně zadané scénáře chování některých rizikových faktorů, které portfolio ovlivňují. Modelují se zde skokové změny (šoky), které nelze na základě historických zkušeností vyloučit. Jedná se o doplněk metodiky VaR, která ve své klasické podobě nevypovídá o skutečné velikosti možných ztrát. Kromě toho analýza scénářů praktikuje k testování efektivnosti regulačních opatření a dozorových činností jednotlivých centrálních bank [2].

Při metodě analýzy scénářů postupujeme podle následujícího algoritmu [2]:

1. V rámci daného scénáře  $s$  se zvolí příslušné hodnoty parametrů.
2. Pro zvolené hodnoty parametrů se spočtou hypotetické míry zisku  $r_{is}$  jednotlivých nástrojů  $i (i = 1, \dots, N)$  daného portfolia. Z nich se poté stanoví s využitím skutečného složení portfolia v současném čase  $T$  hypotetickou míru zisku celého portfolia:

$$r_{ps} = \sum_{i=1}^N w_{iT} \cdot r_{is}$$

3. Pokud lze odhadnout pravděpodobnost  $p_s$  jednotlivých scénářů, lze dále ohodnotit příslušné ztráty  $i$  z pravděpodobnostního hlediska.

Při volbě scénářů v praxi se používají následující alternativy:

- Normované scénáře.
- Skutečné krizové scénáře.
- Hypotetické jednorázové scénáře.
- Mechanický přístup ke scénářům.

## 4.5 Ukázka aplikace výpočtu VaR v neživotní pojišťovně

Cílem této praktické ukázky je stanovení adekvátního rizikového kapitálu v neživotním pojištění, přičemž hlavní pozornost bude soustředěna na pojistně-technickou činnost pojišťovny.

Nechť je celková ztráta pojišťovny  $L_C$  dána součtem ztráty z pojistně-technické činnosti  $L_{PT}$  a ztráty z investiční činnosti  $L_{INV}$  [7]:

$$L_C = L_{PT} + L_{INV}$$

Ztráta z pojistně-technické činnosti  $L_{PT}$  pak bude definována následovně [7]:

$$L_{PT} = X - RP$$

- Kde  $X$  jsou jednotlivé škody vzniklé za dané období a  $RP$  je rizikové pojistné za dané období.

Pro následující příklad budou použity vygenerované hodnoty kolektivního rizika  $S$  z kapitoly 2.3. Je tak potřeba odvodit výpočet VaR pro celkové škody:

- Nejdříve je potřeba vyjádřit kvantilovou funkci:

$$P(S - RP < VaR / S > RP) = 1 - \varepsilon$$

$$P(S < VaR + RP / S > RP) = 1 - \varepsilon$$

- Odtud lze na základě podmíněné pravděpodobnosti odvodit:

$$\frac{P(RP < S < RP + VaR)}{P(S > RP)} = 1 - \varepsilon$$

- Poté je možné vyjádřit distribuční funkci:

$$\frac{F_S(RP + VaR) - (1 - \alpha)}{\alpha} = 1 - \varepsilon$$

$$F_S(RP + VaR) = (1 - \varepsilon)\alpha + (1 - \alpha) = P$$

Hodnota VaR se poté vypočítá jako:

$$P(S \leq RP + VaR) = P$$

$$RP + VaR = S_p$$

$$VaR = S_p - RP$$

Z kapitoly 2.3 je známo, že celková pojistná plnění nejlépe modeluje posunuté gama rozdělení. Pomocí procedury *Critical values* v nabídce *Distribution function* systému STATGRAPHICS *Centurion* lze najít při hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  požadovanou hodnotu hledaného 95. percentilu rizikového pojistného. V případě zachování stejného nastavení intervalů jako při modelování  $S$  je rizikové pojistné posunutého gama rozdělení rovno hodnotě 415685, jak dokumentuje obrázek 9:

Lower Tail Area (<=)	Gamma (3-Parameter)
0,95	415685,
0,1	216392,
0,5	287138,
0,9	383379,
0,99	482570,

**Obrázek 9: Kritické hodnoty pro rizikové pojistné při posunutém gama rozdělení [vlastní]**

Pro  $\varepsilon = 0,01$  se určí hodnota percentilu pro kolektivní riziko:

$$P = 0,99 \cdot 0,05 + 0,95 = 0,0499 + 0,95 \cong 0,9995$$

Získaná hodnota percentilu pro kolektivní riziko se následně použije pro výpočet kvantilu  $S_{0,9995}$ , jehož výsledek lze vidět na obrázku 10:

Lower Tail Area (<=)	Gamma (3-Parameter)
0,9995	591701,
0,1	216392,
0,5	287138,
0,9	383379,
0,99	482570,

**Obrázek 10: Kritické hodnoty pro kolektivní riziko při posunutém gama rozdělení [vlastní]**

Nyní lze dosadit vypočtené hodnoty do vztahu  $VaR = S_p - RP$  a určit tak hodnotu VaR pro kolektivní riziko  $S$ , přičemž peněžní jednotka je 100 Kč:

$$VaR = 591701 - 415685 = 176016$$

Na základě dosaženého výsledku lze tvrdit, že roční VaR činí 17 601 600 Kč se spolehlivostí 99%. To znamená, že s pravděpodobností 0,99 maximální rozdíl mezi celkovým pojistným plněním a rizikovým pojistným je 17 601 600 Kč.

## ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo popsat teoretický základ problematiky kvantifikace rizikového kapitálu v neživotní pojišťovně a aplikovat tuto teorii v praktických ukázkách pomocí vhodného statistického programu.

V úvodní části práce byla vymezena charakteristika a základní členění neživotního pojištění, na které byla zaměřena pozornost při kvantifikaci rizikového kapitálu. Zároveň byla vysvětlena teorie rizika, která je v moderním pojetí založena na modelování kolektivního rizika za pomoci pokročilých metod teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a operačního výzkumu. Další část práce byla věnována simulaci kolektivního rizika pomocí metody Monte Carlo, nacházející v pojišťovně důležité uplatnění. Následně byla přiblížena kvantifikace rizikového kapitálu pomocí modelů Value at Risk včetně jednotlivých metod, které se využívají pro určování cenných prognóz, týkajících se vývoje budoucího tržního rizika.

Na základě teoretických poznatků byla provedena simulace kolektivního rizika metodou Monte Carlo při použití reálných hodnot z daného portfolia pojistek v neživotním pojištění a stanovena hodnota Value at Risk, vycházející z vygenerovaných hodnot tohoto kolektivního rizika. V rámci praktických výpočtů byl využit statistický program *STATGRAPHICS Centurion XV*, který velice usnadnil výpočty, týkající se testů dobré shody empirických a teoretických rozdělání, stejně jako výpočty, spojené s maximálně věrohodnými odhady parametrů teoretických rozdělání a určením požadovaných kritických hodnot, přičemž uplatnění našly také přehledné grafické výstupy.

Získané výsledky zkoumaného portfolia pojistek v daném neživotním pojištění jsou pak základem pro posouzení rizik, týkajících se činností pojišťovny v rámci její schopnosti dostát závazkům vůči svým klientům. Komplexní posouzení rizik pojišťovny je náročný problém, jehož řešení počíná zodpovědným přístupem a končí adekvátním stanovením pojistného a zajistného.

Domnívám se, že cíle stanovené v úvodu této práce byly splněny a práce přiblížila problematiku kvantifikace rizikového kapitálu v neživotní pojišťovně včetně důležitosti statistického modelování pro tvorbu správných rozhodnutí pojišťovny. Základní požadavek je zde kladen na odhad budoucího vývoje, pomocí kterého lze dosáhnout takových výsledků, se kterými budou spokojeny jak pojišťovny, tak jejich klienti.

## LITERATURA

1. CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha : Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633-X.
2. CIPRA, T. *Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha : Ekopress, 2002. 271 s. ISBN 80-86119-54-8.
3. CIPRA, T. *Matematické metody demografie a pojištění*. 1. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1990. 455 s. ISBN 80-03-00222-2.
4. CIPRA, T. *Pojistná matematika : teorie a praxe*. 2. vyd. Praha : Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.
5. ČEJKOVÁ, V. *Pojistný trh*. 1. vyd. Praha : Grada, 2002. 119 s. ISBN 80-247-0137-5.
6. DAŇHEL, J. *Kapitoly z pojistné teorie*. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 139 s. ISBN 80-245-0306-9.
7. DAŇHEL, J. *Pojistná teorie*. 1. vyd. Praha : Professional Publishing, 2005. 332 s. ISBN 80-86419-84-3.
8. DUCHÁČKOVÁ, E. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. vyd. Praha : Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.
9. FABIAN, F.; KLUIBER, Z. *Metoda Monte Carlo : možnosti jejího uplatnění*. 1.vyd. Praha : Prospektrum, 1998. 148 s. ISBN 80-7175-058-1.
10. GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. 1st ed. New York : Springer, 2004. 596 s. ISBN 0-387-00451-3.
11. HOLTON, G.A. *Value-at-Risk : theory and Practice*. 1st ed. Academic Press, 2003. 405 s. ISBN 0123540100.
12. JANATA, J. *Pojištění a management rizik v makléřském obchodě*. 1. vyd. Praha : Professional Publishing, 2008. 180 s. ISBN 978-80-86946-66-5.
13. JÍLEK, J. *Finanční rizika*. 1. vyd. Praha : Grada, 2000. 635 s. ISBN 80-7169-579-3.
14. MAJTÁNOVÁ, A., et al. *Poišťovníctvo : teória a prax = Pojišťovníctví : teorie a praxe*. 1. vyd. Praha : Ekopress, 2006. 288 s. ISBN 80-86929-19-1.

15. PACÁKOVÁ, V. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3. vyd. Bratislava : Iura Edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.
16. Simulace Monte Carlo. *Profeta - risk analysis and consulting services* [online]. [cit. 2009-03-10]. Dostupné z www: <[http://profeta.cz/Simulace\\_Monte\\_Carlo.aspx](http://profeta.cz/Simulace_Monte_Carlo.aspx)>
17. STATGRAPHICS Centurion XV. [online]. [cit. 2009-04-01]. Dostupné z www: <<http://www.statgraphics.com/>>
18. Testy dobré shody. *Jihočeská univerzita* [online]. [cit. 2009-03-23]. Dostupné z www: <<http://botanika.bf.jcu.cz/suspa/vyuka/materialy/KAP2.pdf>>
19. Testy dobré shody. *Západočeská univerzita* [online]. [cit. 2009-03-24]. Dostupné z www: <[http://www.kmt.zcu.cz/person/Kohout/info\\_soubory/letnise/SS/stat19.pdf](http://www.kmt.zcu.cz/person/Kohout/info_soubory/letnise/SS/stat19.pdf)>
20. TOMAN, P. Řízení úrokového rizika. [online]. [cit. 2009-03-12]. Dostupné z www: <[http://old.mendelu.cz/~fin/bank2/Rizeni\\_urokoveho\\_rizika.pdf](http://old.mendelu.cz/~fin/bank2/Rizeni_urokoveho_rizika.pdf)>
21. VIRIUS, M. *Aplikace matematické statistiky : metoda Monte Carlo*. 1. vyd. Praha : České vysoké učení technické, 1991. ISBN 80-01-00057-5.
22. VOSTATEK, J. *Sociální a soukromé pojištění*. 1. vyd. Praha : Codex Bohemia, 1996. 601 s. ISBN 80-85963-21-3.
23. WALTER, J. *Teorie rizika*. 1. vyd. Praha : Vysoká škola ekonomická, 1994. 83 s. ISBN 80-7079-401-1.
24. WEISS, J. Aplikace VaR - ocenění tržních rizik. [online]. [cit. 2009-03-10]. Dostupné z www: <<http://weiss.cz/projekty/var/MODEL.pdf>>

## SEZNAM OBRÁZKŮ

OBRÁZEK 1: ČINITELÉ PŮSOBÍCÍ NA VÝŠKU POJISTNÉHO [14] .....	11
OBRÁZEK 2: HISTOGRAM ROZDĚLENÍ ČETNOSTI VÝŠKY INDIVIDUÁLNÍCH POJISTNÝCH PLNĚNÍ [VLASTNÍ] .....	35
OBRÁZEK 3: GRAFICKÉ POROVNÁNÍ SHODY VÝŠKY INDIVIDUÁLNÍCH POJISTNÝCH PLNĚNÍ S LOGNORMÁLNÍM ROZDĚLENÍM [VLASTNÍ] ..	37
OBRÁZEK 4: TESTY DOBRÉ SHODY PRO INDIVIDUÁLNÍ POJISTNÁ PLNĚNÍ S LOGNORMÁLNÍM ROZDĚLENÍM [VLASTNÍ] .....	38
OBRÁZEK 5: PARAMETRY LOGNORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ [VLASTNÍ] .....	38
OBRÁZEK 6: HISTOGRAM ROZDĚLENÍ VÝŠKY CELKOVÝCH ŠKOD [VLASTNÍ] .....	40
OBRÁZEK 7: GRAFICKÉ POROVNÁNÍ SHODY CELKOVÝCH ŠKOD S POSUNUTÝM GAMA ROZDĚLENÍM [VLASTNÍ].....	41
OBRÁZEK 8: TESTY DOBRÉ SHODY PRO CELKOVÉ ŠKODY S POSUNUTÝM GAMA ROZDĚLENÍM [VLASTNÍ].....	42
OBRÁZEK 9: KRITICKÉ HODNOTY PRO RIZIKOVÉ POJISTNÉ PŘI POSUNUTÉM GAMA ROZDĚLENÍ [VLASTNÍ] .....	58
OBRÁZEK 10: KRITICKÉ HODNOTY PRO KOLEKTIVNÍ RIZIKO PŘI POSUNUTÉM GAMA ROZDĚLENÍ [VLASTNÍ] .....	58

## SEZNAM TABULEK

TABULKA 1: INDIVIDUÁLNÍ POJISTNÁ PLNĚNÍ [15] .....	33
TABULKA 2: VYGENEROVANÉ HODNOTY POČTU POJISTNÝCH NÁROKŮ [VLASTNÍ].....	34
TABULKA 3: ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY VÝŠKY INDIVIDUÁLNÍCH POJISTNÝCH PLNĚNÍ [VLASTNÍ].....	35
TABULKA 4: VÝSLEDKY CHÍ-KVADRÁT TESTU PRO INDIVIDUÁLNÍ POJISTNÁ PLNĚNÍ [VLASTNÍ] .....	36
TABULKA 5: ZÍSKANÉ HODNOTY CELKOVÝCH ŠKOD [VLASTNÍ].....	39
TABULKA 6: ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY CELKOVÝCH ŠKOD [VLASTNÍ].....	40
TABULKA 7: VÝSLEDKY CHÍ-KVADRÁT TESTU PRO CELKOVÉ ŠKODY [VLASTNÍ].....	41

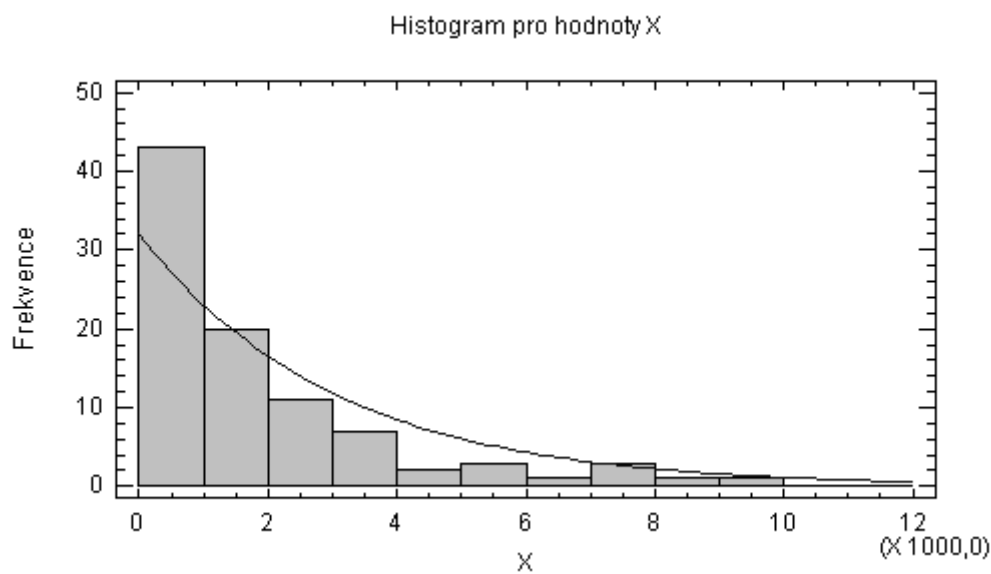
## SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA 1: CELKOVÉ VÝSLEDKY TESTOVÁNÍ VÝŠKY INDIVIDUÁLNÍCH POJISTNÝCH PLNĚNÍ PRO VYBRANÁ ROZDĚLENÍ.....	63
PŘÍLOHA 2: CELKOVÉ VÝSLEDKY TESTOVÁNÍ VÝŠKY CELKOVÝCH ŠKOD PRO NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ.....	67

## Příloha 1

### Celkové výsledky testování výšky individuálních pojistných plnění pro vybraná rozdělení [vlastní]

Grafické porovnání shody výšky individuálních pojistných plnění s exponenciálním rozdělením:



Testy dobré shody pro individuální pojistná plnění s exponenciálním rozdělením:

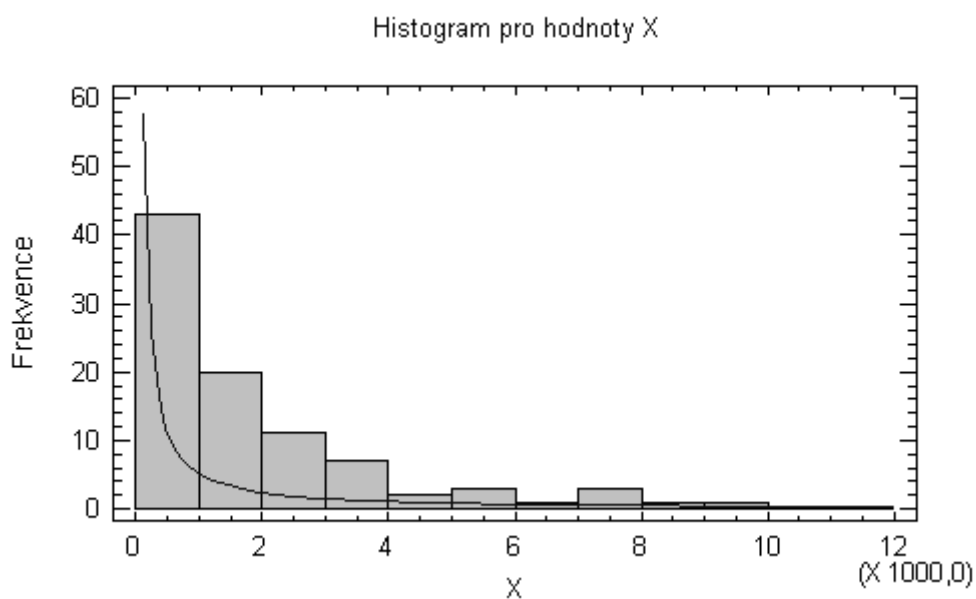
Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		1000,0	43	27,29	9,04
	1000,0	2000,0	20	19,53	0,01
	2000,0	3000,0	11	13,98	0,64
	3000,0	4000,0	7	10,01	0,90
	4000,0	5000,0	2	7,16	3,72
	5000,0	6000,0	3	5,13	0,88
	6000,0	7000,0	1	3,67	1,94
	7000,0	8000,0	3	2,63	0,05
	8000,0	10000,0	2	3,22	0,46
above	10000,0		4	2,42	1,03

Chi-Squared = 18,6776 with 8 d.f. P-Value = 0,0166825

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Exponential</i>
DPLUS	0,183453
DMINUS	0,0374774
DN	0,183453
P-Value	0,00312407



Grafické porovnání shody výšky individuálních pojistných plnění s Paretovým rozdělením:



Testy dobré shody pro individuální pojistná plnění s Paretovým rozdělením:

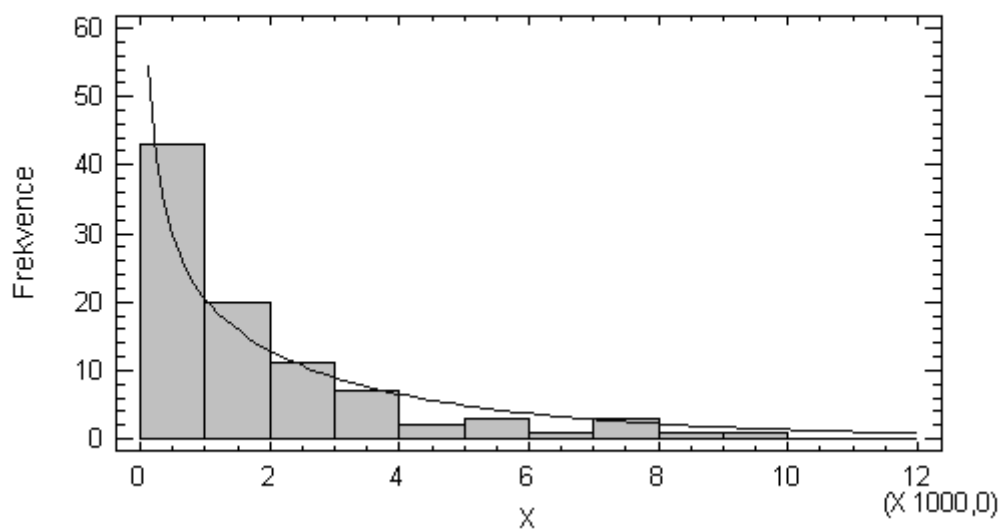
Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		1000,0	43	60,11	4,87
	1000,0	2000,0	20	3,37	81,93
	2000,0	4000,0	18	3,06	73,05
	4000,0	7000,0	6	2,26	6,21
above	7000,0		4	25,51	18,14

Chi-Squared = 184,187 with 3 d.f. P-Value = 0,0

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Pareto</i>
DPLUS	0,230915
DMINUS	0,44876
DN	0,44876
P-Value	0,0

Grafické porovnání shody výšky individuálních pojistných plnění s gama rozdělením:

Histogram pro hodnoty X



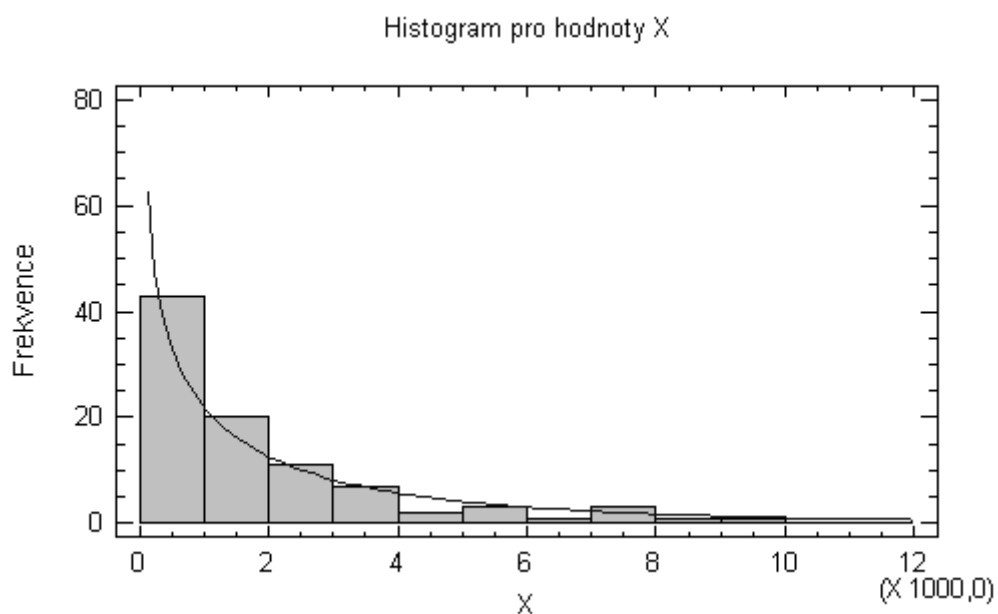
Testy dobré shody pro individuální pojistná plnění s gama rozdělením:

Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		1000,0	43	37,20	0,91
	1000,0	2000,0	20	16,06	0,97
	2000,0	3000,0	11	10,67	0,01
	3000,0	4000,0	7	7,61	0,05
	4000,0	5000,0	2	5,62	2,33
	5000,0	6000,0	3	4,22	0,35
	6000,0	7000,0	1	3,22	1,53
	7000,0	8000,0	3	2,47	0,11
	8000,0	10000,0	2	3,40	0,58
above	10000,0		4	4,37	0,03

Chi-Squared = 6,86116 with 7 d.f. P-Value = 0,443478

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Gamma</i>
DPLUS	0,132601
DMINUS	0,0746023
DN	0,132601
P-Value	0,0683733

Grafické porovnání shody výšky individuálních pojistných plnění s Weibullovým rozdělením:



Testy dobré shody pro individuální pojistná plnění s Weibullovým rozdělením:

Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		1000,0	43	41,26	0,07
	1000,0	2000,0	20	16,52	0,73
	2000,0	3000,0	11	10,15	0,07
	3000,0	4000,0	7	6,86	0,00
	4000,0	5000,0	2	4,86	1,69
	5000,0	6000,0	3	3,56	0,09
	6000,0	7000,0	1	2,67	1,04
	7000,0	8000,0	3	2,04	0,46
	8000,0	10000,0	2	2,81	0,23
above	10000,0		4	4,30	0,02

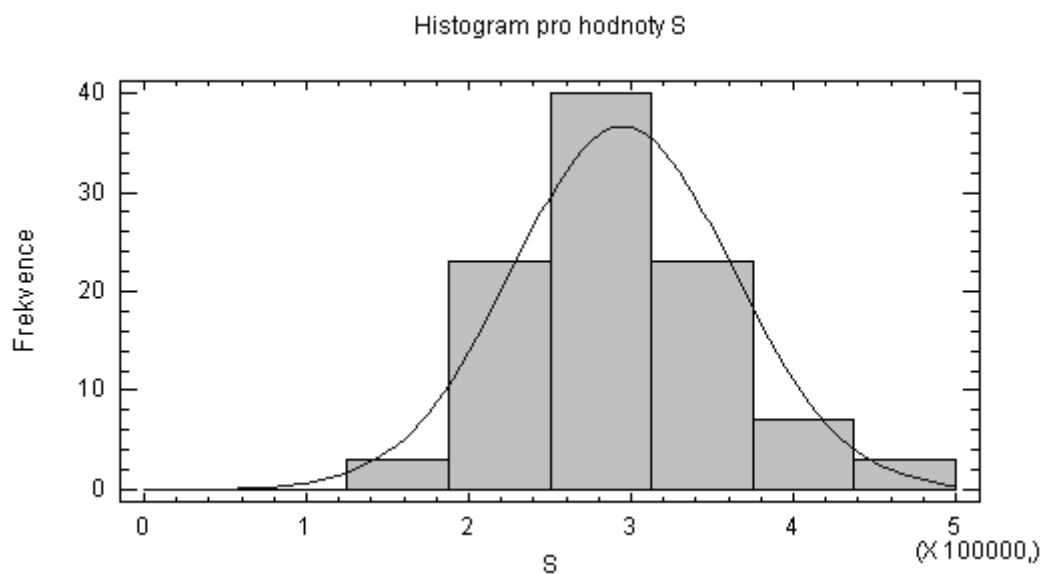
Chi-Squared = 4,40746 with 7 d.f. P-Value = 0,73183

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Weibull</i>
DPLUS	0,0949563
DMINUS	0,0899997
DN	0,0949563
P-Value	0,355125

## Příloha 2

Celkové výsledky testování výšky celkových škod pro normální rozdělení [vlastní]

Grafické porovnání shody celkových škod s normálním rozdělením:



Testy dobré shody pro celkové škody s normálním rozdělením:

Chi-Squared Test					
	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		187500,	3	5,71	1,29
	187500,	250000,	23	19,75	0,54
	250000,	312500,	40	34,76	0,79
	312500,	375000,	23	27,84	0,84
above	375000,		11	11,93	0,07

Chi-Squared = 3,52893 with 2 d.f. P-Value = 0,171279

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Normal</i>
DPLUS	0,0964796
DMINUS	0,0612365
DN	0,0964796
P-Value	0,311411