

POUŽITÍ METODY MONTE CARLO PŘI VÝUCE SPOLEHLIVOSTI NA DFJP

Jaroslav MENČÍK

Katedra provozní spolehlivosti, diagnostiky a mechaniky v dopravě

1. ÚVOD

V předmětech inženýrského a doktorského studia na Dopravní fakultě Jana Pernera, které se zabývají spolehlivostí technických zařízení, jsou m.j. vysvětlovány různé metody posuzování spolehlivosti v případech, kdy se uplatňují náhodné vlivy. Mezi ně patří i metody založené na počítačové simulaci, označované zkratkou SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment [1, 2]). Jednou z výkonných simulačních technik je metoda Monte Carlo. Její princip je jednoduchý, blízký způsobu myšlení inženýra, řešení běžných úloh je snadné a nevyžaduje tak hluboké teoretické znalosti, jako některé analytické metody. To všechno, spolu s všudypřítomností rychlých osobních počítačů, vytváří podmínky pro její široké uplatnění v inženýrské praxi. Připomeňme, že tato metoda může být použita nejen pro posuzování spolehlivosti stavebních konstrukcí, dopravních prostředků a strojních či elektrotechnických zařízení, ale i pro řešení nejrůznějších úloh z oblasti fyziky, chemie, ekonomie aj. Díky své názornosti je metoda Monte Carlo navíc vhodným výukovým prostředkem pro vysvětlování charakteristických rysů náhodných veličin a jejich funkcí, a může tak přispět k vnímání a posuzování okolního světa z pravděpodobnostního hlediska.

Čas k dispozici pro výuku metody Monte Carlo v rámci předmětu Spolehlivost je poměrně krátký. Bylo proto nutné omezit se na stručné vysvětlení základů a vybrat takové ukázkové příklady, které by co nejnázorněji ilustrovaly její hlavní rysy, přednosti a úskalí, a dokázaly ve studentech vzbudit zájem o její hlubší studium a používání. Výhodou je, že studenti již absolvovali předmět Pravděpodobnost a statistika, a v předmětu Spolehlivost byli seznámeni se základními pojmy a metodami. V příspěvku je stručně uveden obsah

přednášky, a podrobněji náplň cvičení. Tu tvoří jedenáct na sebe navazujících příkladů, jejichž probrání by mělo poskytnout základní představu o metodě Monte Carlo.

TEORETICKÁ ČÁST

Princip

Metoda Monte Carlo je simulační technika, která se užívá pro vyšetřování chování náhodných veličin a jejich funkcí. Vychází z klasické definice pravděpodobnosti, podle níž poměr počtu příznivých výsledků pokusu n_e k celkovému počtu pokusů n konverguje s rostoucím počtem n k číslu, které udává pravděpodobnost daného jevu P ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_e}{n} = P \quad (1)$$

Praktický postup spočívá v mnohonásobném opakování simulačního výpočtu, kdy se v každém kroku vhodným programem přiřadí jednotlivým vstupním veličinám x_1, x_2, \dots, x_n náhodné hodnoty (tak, aby každá z těchto veličin měla příslušné rozdělení pravděpodobnosti), a provede se výpočet výstupní veličiny

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

Zařazením vypočtených hodnot do tříd získáme rozdělení četností veličiny y , které odpovídá hustotě pravděpodobnosti $f(y)$. Podobně získáme rozdělení kumulativních četností a distribuční funkci $F(y)$. V dalším stanovujeme hodnoty distribuční funkce $F(y^*)$, vyjadřující pravděpodobnost, že náhodná veličina y (např. pevnost nebo doba života) bude menší nebo nanejvýš rovna y^* , nebo určujeme kvantily $y(F^*)$, což jsou hodnoty y , odpovídající pravděpodobnosti nepřekročení F^* (např. zaručená únosnost konstrukce).

Počítačové programy

Základem každého programu pro aplikaci metody Monte Carlo je generátor (pseudo)náhodných čísel (z) s rovnoměrným rozdělením v intervalu $\langle 0;1 \rangle$, a podprogram pro jejich transformaci do zadaných rozdělení. Tento podprogram vychází z toho, že rozdělení hodnot distribuční funkce $F(x)$ jakékoliv spojitě náhodné veličiny je rovnoměrné v intervalu $\langle 0;1 \rangle$; jednotlivé hodnoty $x_{i,j}$ (tj. kvantily i -té proměnné) se proto počítají z výrazu

$$x_{i,j} = F_i^{-1} \left(z_{i,j} \right), \quad (3)$$

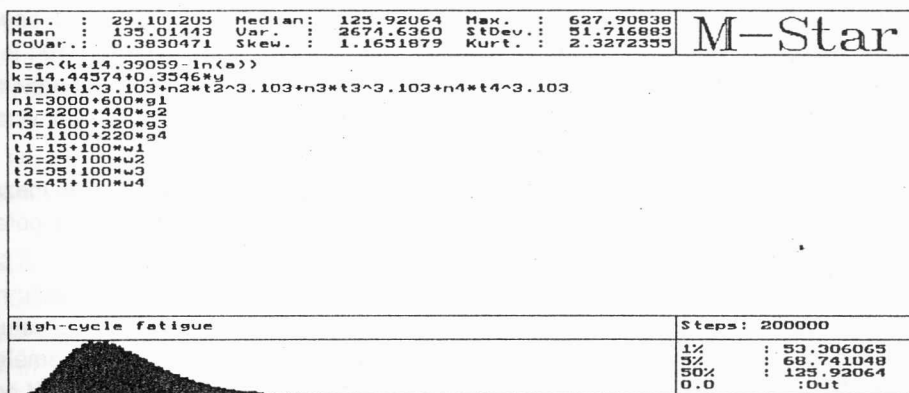
kde F_i^{-1} je inverzní funkce k distribuční funkci F_i veličiny x_i . (Funkce F_i může odpovídat některému z běžných rozdělení (normální, exponenciální apod.), ale může být sestrojena i pro experimentálně zjištěné rozdělení, např. tak, že se relativní kumulativní četnost aproximuje lomenou čarou). Další částí simulačního programu je podprogram pro výpočet hodnot veličiny y a podprogram pro jejich seřazení podle velikosti a pro určování charakteristik výsledného rozdělení a vybraných hodnot distribuční funkce a kvantilů. Podrobnosti lze najít v [3, 4].

Simulační programy je možno vytvářet buď vlastní, nebo lze užít některý z komerčně dostupných. Jednoduchý ilustrační program lze vytvořit i v rámci programu Excel; nevýhodou je, že jeho generátor je pomalý, a že je prakticky nemožné pracovat s více než několika tisíci čísly. Protože každý počítač generuje ve skutečnosti pseudonáhodná čísla, je při vývoji

vlastního programu Monte Carlo nutno věnovat pozornost i použitému generátoru a otestovat, zda generovaná čísla mají dostatečně náhodný charakter. I z tohoto důvodu se zpravidla vyplatí používat hotové ověřené programy.

V rámci výuky Spolehlivosti se na Dopravní fakultě užívají dva jednoduché komerční programy: M-Star, vytvořený v České republice [5], a VaP, vyvinutý ve Švýcarsku [6]. Oba umožňují interaktivní zadávání úlohy, a zvládnutí práce s nimi je snadné. Program VaP dovoluje zadávání základních analytických rozdělení (normální, lognormální, exponenciální aj.) prostřednictvím jejich parametrů. To je výhodné zejména pro rychlé obměňování školních příkladů; předností také je efektní zobrazování postupné tvorby výsledného histogramu v průběhu generování, a dále možnost bezprostředního vytvoření protokolu o provedených simulacích, který lze dále zpracovávat např. textovým editorem Word (lze importovat i obrázek výsledného histogramu ve formě bitmapy). Nevýhodou je, že vyšetřovaná funkce může být pouze jednořádková, a že po výpočtu je k dispozici poměrně málo číselných hodnot (pouze charakteristiky rozdělení a pravděpodobnost, že vyšetřovaná veličina je menší nebo rovna nule; další hodnoty se již z proběhlé simulace nezjistí).

Program M-Star naproti tomu vychází z rozdělení zadaných prostřednictvím histogramů; má vlastní knihovnu některých důležitých rozdělení (m.j. pro stavební praxi), a uživatel si může vytvořit i histogramy vlastní. (Musíme mít na mysli, že teoretická rozdělení jsou zpravidla jen určitou abstrakcí složitější skutečnosti, a že definiční obor skutečných veličin, např. pevnosti nebo rozměrů, je omezený. Histogram může zajistit jednoduchým způsobem příslušná ohraničení, zatímco teoretická rozdělení mohou při generování dát i hodnoty, které se v praxi nemohou vyskytnout. Rovněž vyrovnáním naměřených hodnot (tj. histogramu) teoretickým rozdělením vnášíme do procesu vyhodnocování subjektivní prvek, a tedy i určité riziko omylu). Vyšetřovanou funkci je možno zadat jako víceřádkovou, a po provedeném výpočtu lze zjišťovat hodnoty distribuční funkce pro různé hodnoty vyšetřované funkce y , i hodnoty kvantilů pro různé pravděpodobnosti (obr. 1).



Obr. 1 Ukázka obrazovky s výsledky simulace Monte Carlo programem M-Star.

Další velkou výhodou tohoto programu je možnost uložit výsledky ve formě histogramu s číselně uvedenými četnostmi, takže mohou být dále zpracovávány nebo použity jako vstup pro další výpočty u rozsáhlejších úloh. V současné době pracují autoři [5] na vylepšené verzi programu M-Star i dalších, jako je např. Ant-Hill, který umožňuje řešení a názorné zobrazení vícedimenzionálních úloh [1, 2].

Přesnost výpočtů

Velmi důležitou otázkou u metody Monte Carlo je potřebný počet simulací pro dosažení dostatečné přesnosti výsledků. Uskutečníme-li nových n pokusů, dostaneme poněkud jiné rozdělení veličiny y , a také jiné hodnoty $F(y^*)$ nebo $y(F^*)$. Určitou představu o možném rozmezí vyšetřovaných hodnot získáme několikanásobným opakováním celé simulace (vždy s n pokusy). Jednodušší je, sestavit konfidenční interval pro příslušnou hodnotu. Lze využít toho, že počet výskytů n_e náhodného jevu o pravděpodobnosti P v n pokusech má binomické rozdělení, a že při velkých počtech pokusů $\{n > 9/[P(1-P)]\}$ můžeme toto rozdělení aproximovat normálním. Pracujeme-li s relativní četností výskytu náhodného jevu, jsou odpovídající parametry tohoto rozdělení (střední hodnota a směrodatná odchylka)

$$\mu = P, \quad \sigma = \sqrt{P(1-P)/n}, \quad (4)$$

Hranice intervalu spolehlivosti pro skutečnou pravděpodobnost P určitého jevu (např. pro skutečnou hodnotu F) tedy můžeme přibližně stanovit podle vztahu

$$P_L = P_e - u_{\alpha/2} \sqrt{P_e(1-P_e)/n} \leq P \leq P_e + u_{\alpha/2} \sqrt{P_e(1-P_e)/n} = P_U, \quad (5)$$

kde experimentálně zjištěná hodnota $P_e (= n_e/n)$ představuje odhad pravděpodobnosti P , a $u_{\alpha/2}$ je $\alpha/2$ -kritická hodnota normovaného normálního rozdělení; α je pravděpodobnost, že skutečná hodnota P bude vně vypočteného konfidenčního intervalu.

Poloviční šířka intervalu spolehlivosti vyjadřuje chybu v určení pravděpodobnosti P . Označíme-li relativní chybu (vztáženou k této pravděpodobnosti) jako δ , dostaneme ze vztahu (5) následující výraz pro potřebný počet simulací pro stanovení (očekávané) pravděpodobnosti určitého jevu s chybou nepřesahující δ na hladině spolehlivosti α :

$$n = u_{\alpha/2}^2 (1-P)/(P\delta^2). \quad (6)$$

Potřebný počet simulací tedy značně narůstá s klesající hodnotou P . Například pro posouzení určitého jevu, očekávaného s pravděpodobností $P = 10^{-2}$, vychází [při povolené desetiprocentní chybě (tj. $\delta = 0.1$) a při $\alpha = 5\%$] přibližně 40000 simulací, při $P = 10^{-3}$ je to již 400000 simulací atd. Popsaná základní metoda Monte Carlo je proto při nízkých hodnotách P vhodná jen pokud lze závislost $y(x)$ vyjádřit poměrně jednoduchým analytickým výrazem. Některé její modifikace pro složitější případy jsou popsány např. v [7, 8].

Podobným způsobem jako ve vztahu (5) můžeme stanovit i konfidenční meze pro kvantily. Zde se využívá toho, že u hodnot, seřazených podle velikosti, odpovídá pořadové číslo kvantilu, dělené počtem pokusů, hodnotě distribuční funkce. Blíže viz [9].

Při použití techniky Monte Carlo je také nutné - podobně jako u všech metod posuzování spolehlivosti - přihlížet k tomu, na kolika vzorcích byly získány údaje o vstupních veličinách (např. parametry rozdělení nebo histogram). Zejména při nízkém počtu naměřených hodnot (desítky a méně) je nutno zohlednit, že výběrové odhady parametrů mohou být odlišné od skutečných hodnot. V principu to lze provést např. tak, že při jednotlivých „pokusech“ Monte Carlo přiřazujeme náhodné hodnoty také parametrům vstupních veličin, a to tak, aby se pohybovaly v pravděpodobném rozmezí. Jiná cesta spočívá v tom, že ke každé náhodně vygenerované hodnotě x_0 vstupní veličiny x (pomocí vztahu 3) přidáme ještě složku Δx_0 , charakterizující rozptyl příslušného kvantilu; vytváříme tedy tzv. rozmazané rozdělení. Tyto otázky přesahují rámec základního kurzu, a v podrobnostech odkazujeme na literaturu [9].

PRAKTICKÉ PŘÍKLADY

Cvičení vycházejí z toho, že studenti již byli seznámeni se základními pojmy a metodami posuzování spolehlivosti, m.j. s interferenční metodou a s analytickým řešením systémů se sériově a paralelně řazenými prvky. Metoda Monte Carlo je ilustrována na následujících jedenácti úlohách, které lze rozdělit do tří skupin (cvičení). Vstupní veličiny v těchto příkladech mají teoretická rozdělení, aby bylo možno výsledky získané simulací porovnávat s „přesným“ řešením uvedeným u jednotlivých příkladů; otázka vhodnosti teoretických rozdělení pro řešení praktických úloh byla zmíněna dříve.

Cvičení 1.

Generování náhodné veličiny se zadaným rozdělením, posouzení shody hodnot parametrů rozdělení a jejich výběrových odhadů, ukázka rozdílu výsledků mezi opakováními celého pokusu, a vlivu počtu generovaných hodnot na přesnost výsledku.

Příklad 1.

Generujte náhodnou veličinu x s normovaným normálním rozdělením, $N(0; 1)$, a to pro počty pokusů $n = 1000 - 10000 - 100000$. (U programů M-Star a VaP stačí zapsat vyšetřovanou funkci ve tvaru $y = x$, a přiřadit nezávisle proměnné x normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.) Pro každý počet pokusů simulaci několikrát opakujte a porovnejte vždy výběrový průměr \bar{x} se střední hodnotou μ a výběrovou směrodatnou odchylkou s se σ . Posuďte charakter rozdělení [lze též porovnat koeficienty šikmosti a a špičatosti ε ; pro normální rozdělení je $\alpha = 0$ a $\varepsilon = 0$ (někdy se též užívá $\varepsilon = 3$ (VaP)); oba výrazy se liší pouze o konstantu]. Porovnejte dále hodnoty základní a výběrové distribuční funkce F pro různé kvantily, např. pro $x = -3$, $x = 0$ a $x = 2$; přesné hodnoty jsou $F(-3) = 0.00135$, $F(0) = 0.5$ a $F(2) = 0.97725$. [Program M-Star může ukázat tyto hodnoty přímo (a to pro různé hodnoty x), program VaP udává pouze jednorázově hodnotu $F(x = 0)$; chceme-li zjistit hodnotu F odpovídající určité hodnotě x^* , musíme generovat náhodnou veličinu x se střední hodnotou $\mu = x^*$. Program M-Star může navíc udávat hodnoty kvantilů pro různé zadané pravděpodobnosti F .] Ověřte, zda vygenerované hodnoty se pohybují v odpovídajících mezích.

U programu typu VaP lze též ukázat vliv volby počtu a šířky tříd na kvalitu zobrazení rozdělení vyšetřované veličiny, zejména při menším počtu hodnot n .

Příklad 2.

Generujte náhodnou veličinu t s exponenciálním rozdělením [$F = 1 - \exp(-t)$], s parametrem $\lambda = 1/1000$ (pro střední hodnotu $\mu (= t_m)$ a směrodatnou odchylkou s platí $\mu = \sigma = 1/\lambda$). Uvažujte $n = 1000 - 10000 - 100000$. Porovnejte vypočtené hodnoty průměru, směrodatné odchylky a koeficientu variace w (pro exponenciální rozdělení je $w = \sigma/\mu = 1$). Na hodnotách kvantilů a distribuční funkce ověřte, že při práci s histogramy (při generování náhodných veličin nebo při třídění vypočtených hodnot) mohou vznikat chyby, jestliže daný program přiřazuje všem hodnotám x , spadajícím do jedné třídy, stejnou hodnotu F . (Porovnejte hodnoty t pro hodnoty F blízké k nule, např. $F = 0.001 - 0.002 - 0.005 - 0.01$, a hodnoty F pro $t = t_m/1000 - t_m/500 - t_m/200 - t_m/100$).

Poznámka. Exponenciálním rozdělením lze např. popsat dobu do poruchy elektrotechnických a j. součástí v případě, že se neuplatňuje únava ani stárnutí. λ značí tzv.

intenzitu poruch (obecně $\lambda = \lambda(t)$; při exponenciálním rozdělení je $\lambda = konst$). V uvažovaném příkladu by byla střední doba do poruchy $t_m = 1/\lambda = 1000$ (např. hodin). Často nás zajímá také tzv. zaručená doba do poruchy t_γ , kterou přežije podíl výrobků γ . Její hodnotu dostaneme jako $(1-\gamma)$ -kvantil výsledného rozdělení. S programem M-Star můžeme snadno zjišťovat jak zaručené doby pro různé pravděpodobnosti, tak i pravděpodobnost, s jakou lze očekávat poruchu během různých dob t^* . Program VaP může určovat pouze pravděpodobnost, s jakou sledovaná veličina y nabude hodnoty menší než nula; je tedy nutno definovat y jako $y = t - t^*$ a zaručenou dobu provozu hledat zkusmo, s opakovaním simulací pro volené hodnoty t^* tak dlouho, dokud F nedosáhne přibližně hodnoty $1 - \gamma$.

Cvičení 2.

Základní operace s náhodnými veličinami (součet, ilustrace centrální limitní věty, součin). Ukázka stanovení pravděpodobnosti poruchy jednoduchého konstrukčního prvku, nalezení optimálních rozměrů prvku pro zajištění požadované spolehlivosti.

Příklad 3.

Nalezněte rozdělení součtu dvou náhodných veličin, $S = S_1 + S_2$. Obě vstupní veličiny mají normální rozdělení, s parametry: $S_1(10000; 2000)$, $S_2(5000; 1000)$. Generujte pro $a = 10000$ a 100000 . Parametry výsledného rozdělení jsou $\mu_y = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} = 15000$, $\sigma_y = (\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2)^{1/2} = 2236$. Přesvědčete se, že výsledné rozdělení je v tomto případě opět normální [$\alpha = 0$ a $\varepsilon = 0$ (M-Star), resp. 3 (VaP)]. Program VaP umožňuje přímé generování veličin x_1 a x_2 s danými parametry; při použití programu M-Star lze vyjít z histogramů normovaného normálního rozdělení a vztahů $S_1 = \mu_{S_1} + u_1 \times \sigma_{S_1}$, $S_2 = \mu_{S_2} + u_2 \times \sigma_{S_2}$. (Při každém „pokusu“ je nutno generovat dvě různá náhodná čísla (u_1, u_2) s normovaným normálním rozdělením.) Úlohu lze interpretovat jako stanovení výsledného zatížení v případě, kdy působí dvě navzájem nezávislá náhodná zatížení (uvedená čísla mohou vyjadřovat síly např. v newtonech). Stanovte maximální pravděpodobné zatížení, a to jako hodnotu, která bude překročena jen s velmi malou pravděpodobností γ např. pro $\gamma = 5\%$ je $y(F = 0.95) = 18678$.

Stejně jednoduchým způsobem lze stanovit výsledné rozdělení i v případě součtu většího počtu náhodných veličin, které mohou mít libovolná rozdělení, a kdy výsledné rozdělení již není normální. Metoda Monte Carlo je také velmi vhodná pro ilustraci centrální limitní věty, např. pomocí kompozice veličin x s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0; 1)$. Postupně se generují veličiny $y = x_1$, $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 + x_2 + x_3, \dots, y = x_1 + \dots + x_4$ (každou z hodnot x_1, x_2, \dots je nutno generovat zvlášť), a sleduje se postupné zaoblování rozdělení.

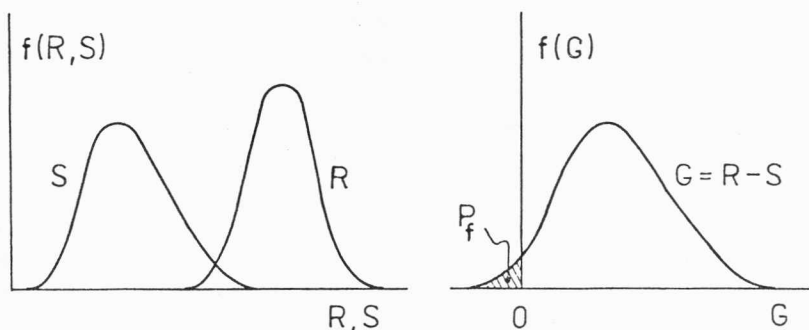
Příklad 4.

Stanovte pravděpodobnost poruchy konstrukčního prvku (prutu) přenášejícího osovou tahovou sílu S . Jak tato síla, tak i únosnost (odolnost) prutu R jsou náhodné veličiny. V nauce o spolehlivosti se definuje tzv. rezerva spolehlivosti

$$G = R - S, \quad (7)$$

a pravděpodobnost poruchy se určuje jako hodnota distribuční funkce F rezervy spolehlivosti pro $G = 0$ (obr. 2). Z matematického hlediska se jedná o stanovení výsledného rozdělení rozdílu dvou náhodných veličin; postup je tedy podobný jako při součtu, viz příklad 3. Pro jednoduchost a možnost posouzení přesnosti simulace budeme předpokládat, že obě vstupní veličiny R i S mají normální rozdělení, s parametry $\mu_R = 25000$ N, $\sigma_R = 2500$ N, $\mu_S = 15000$ N,

$\sigma_S = 2500$ N. V tomto případě bude i rozdělení rezervy spolehlivosti G normální, s $\mu_G = 10000$ N, $\sigma_G = 3536$ N, a pravděpodobnost poruchy bude $P_f = F(G = 0) = 0.00234$. Simulaci několikrát opakujte a posuďte přesnost výpočtu a popř. vhodný počet pokusů n . Stejným způsobem se úloha řeší při jakémkoliv rozdělení únosnosti a zatížení.



Obr. 2 Interferenční metoda posuzování spolehlivosti. R - odolnost konstrukce, S - účinky zatížení, G - rezerva spolehlivosti.

Příklad 5.

Součin dvou náhodných veličin. Stanovte únosnost prutu přenášejícího osovou tahovou sílu. Únosnost R je dána vztahem

$$R = AY, \quad (8)$$

kde A je plocha průřezu a Y je mez kluzu materiálu prutu. Předpokládejte, že A i Y mají normální rozdělení, s parametry $\mu_A = 100 \text{ mm}^2$, $\sigma_A = 5 \text{ mm}^2$, $\mu_Y = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_Y = 25 \text{ MPa}$. Porovnejte výsledky několika opakovaných simulací (vždy např. pro $n = 30000$) s hodnotami získanými analytickým řešením.

Přesné řešení dává střední hodnotu $\mu_R = \mu_A \cdot \mu_Y = 25000$ N. Směrodatnou odchylku je nutno (při analytickém řešení) počítat ze vztahu $\sigma_R = \mu_R \cdot \omega_R$, kde ω je koeficient variace, který se v případě součinu dvou nezávislých náhodných veličin počítá jako $\omega_R = (\omega_A^2 + \omega_Y^2 + \omega_A^2 \cdot \omega_Y^2)^{1/2}$. Po dosazení dostaneme $\omega_A = 0.05$, $\omega_Y = 0.10$, $\omega_R = 0.1119$, $\sigma_R = 2798$ N. Výsledné rozdělení již není normální, ale mírně pravostranné ($\alpha \approx 0.105$). Můžeme též stanovit např. minimální zaručenou únosnost prutu, která nebude dosažena jen s (velmi malou) pravděpodobností α , a to jako α -kvantil rozdělení R . Pro $\alpha = 0.001$ vychází $R_{0.001} \approx 16850$ N, což je o 500 N ($\approx 3\%$) více než hodnota 16350 N, která by odpovídala normálnímu rozdělení.

Příklad 6.

Optimalizace průřezu prutu přenášejícího osovou tahovou sílu. Navrhněte plochu průřezu tak, aby pravděpodobnost poruchy nepřekročila hodnotu $P_f = 0.0002$. Síla S je výslednicí dvou náhodných zatížení ($S = S_1 + S_2$), z nichž každé má své rozdělení pravděpodobnosti. Únosnost prutu je opět dána vztahem $R = AY$, kde plocha průřezu A i mez kluzu Y jednotlivých prutů jsou náhodné veličiny. Předpokládejte, že všechny veličiny mají normální rozdělení, a parametry rozdělení zatížení a meze kluzu jsou stejné jako v příkladech 3 a 5. O průřezu je známo pouze to, že koeficient variace u tohoto druhu výrobků je $\omega_A = 0.05$.

Při řešení postupujeme po krocích. Odhadneme plochu průřezu A_1 a podobně jako v příkladu 5 vypočítáme pravděpodobnost poruchy P_{f1} , porovnáme ji se zadanou hodnotou P_f , odhadem upravíme plochu průřezu na A_2 , znovu vypočítáme pravděpodobnost poruchy P_{f2} , atd. Při výpočtech vycházíme ze vztahu

$$G = AY - (S_1 + S_2) \quad (9)$$

Při výchozích hodnotách $S_1(10000 \text{ N}; 2000 \text{ N})$, $S_2(5000 \text{ N}; 1000 \text{ N})$ a $Y(250 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa})$ můžeme odhadnout výchozí plochu průřezu jako $A_1 = \mu_S/\mu_Y = (10000+5000)/250 = 60 \text{ mm}^2$, a po vygenerování rozdělení G_1 (pro $\mu_{A1} = 60 \text{ mm}^2$, $\sigma_{A1} = \omega_A \mu_{A1} = 0,05 \times 60 = 3 \text{ mm}^2$) dostaneme $P_{f1} \approx 0.50$. Po zvětšení průřezu na $A_2 = 80 \text{ mm}^2$ vychází $P_{f2} \approx 0.05 \div 0.06$, pro $A_3 = 100 \text{ mm}^2$ je $P_{f3} = 0.002 \div 0.003$. Pro $A_4 = 110 \text{ mm}^2$ (a $\sigma_A = 5.5 \text{ mm}^2$) se hodnoty P_{f4} pohybují mezi 0.0002 a 0.0004, což je méně než požadovaných 0.0005, takže jmenovitý průřez 110 mm^2 je vyhovující. (Je vhodné výpočet v poslední fázi alespoň pětkrát opakovat, abychom se ujistili, že pravděpodobnost poruchy vychází trvale menší než přípustná hodnota P_f .) Příklad je ukázkou toho, jak lze optimální geometrické (a j.) parametry součástí najít pomocí metody Monte Carlo velice snadno i tam, kde analytické řešení je již prakticky nemožné.

Cvičení 3.

Určování spolehlivosti soustav s více prvky (sériové, paralelní a kombinované řazení), určení spolehlivosti mechanických konstrukcí s více prvky, jestliže náhodnými veličinami je zatížení i pevnosti jednotlivých prvků.

Příklad 7.

Určete střední dobu do poruchy a zaručenou dobu provozu zařízení se třemi prvky, které jsou z hlediska spolehlivosti zařazeny v sérii. Doby do poruchy jednotlivých prvků, t_1 , t_2 , t_3 mají exponenciální rozdělení, se středními hodnotami $t_{1,m} = t_{2,m} = 1000 \text{ h}$, $t_{3,m} = 500 \text{ h}$ (tyto hodnoty jsou zároveň rovny převráceným hodnotám intenzit poruch λ_1 , λ_2 a λ_3).

Sériový obvod přestane plnit svoji funkci, jakmile dojde k poruše kteréhokoliv z prvků. Doba do poruchy systému sestaveného z náhodně vybraných součástí je tedy rovna nejkratší z dob do poruchy jednotlivých prvků, v našem případě

$$t = \min(t_1, t_2, t_3) \quad (10)$$

Při mnohonásobném opakování náhodného pokusu s takto definovanou výstupní funkcí dostaneme rozdělení doby do poruchy celého zařízení. (Úlohu lze řešit postupně pro jeden, dva a tři prvky, a sledovat, jak s rostoucím počtem prvků klesá spolehlivost soustavy.) Můžeme se přesvědčit, že výsledné rozdělení je opět exponenciální ($\omega = 1$). Přesnost simulací ověříme porovnáním s analytickým řešením. Výsledná intenzita poruch sériového obvodu s prvky s exponenciálním rozdělením je rovna součtu intenzit jednotlivých prvků, tzn $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.001 + 0.001 + 0.002 = 0.004 \text{ h}^{-1}$, takže střední doba do poruchy je $t_m = 1/\lambda = 250 \text{ h}$.

Stejným způsobem, pomocí vztahu (9), řešíme úlohu pro jakékoliv jiné rozdělení dob do poruchy jednotlivých prvků (např. Weibullovo). Pokud se týká zjišťování zaručených dob života, nebo pravděpodobností, s jakou lze očekávat poruchu během různých dob, platí totéž, co bylo řečeno u příkladu 2.

Příklad 8.

Určete střední dobu do poruchy zařízení se dvěma prvky, které jsou z hlediska spolehlivosti zapojeny paralelně. Jednotlivé prvky mají exponenciální rozdělení doby do poruchy, se středními hodnotami $t_{1,m} = 500$ h, $t_{2,m} = 500$ h.

Paralelní obvod přestane plnit svoji funkci teprve jestliže dojde k poruše všech prvků. Doba do poruchy systému sestaveného z náhodně vybraných součástí je tedy rovna nejdelší z dob do poruchy jednotlivých prvků, v našem případě

$$t = \max(t_1, t_2). \quad (11)$$

Při mnohonásobném opakování náhodného pokusu s takto definovanou výstupní funkcí dostaneme rozdělení doby do poruchy celého zařízení. Můžeme se přesvědčit, že výsledné rozdělení již není exponenciální. Přesnost výpočtů můžeme posoudit porovnáním výběrové střední hodnoty s hodnotou získanou analytickým řešením. Obecně se střední doba do poruchy vypočítá jako

$$t_m = \int_0^{\infty} R(t) dt, \quad (12)$$

kde $R(t)$ je pravděpodobnost bezporuchového provozu po dobu $(0; t)$. Pro paralelní obvod s k navzájem nezávislými prvky platí

$$R(t) = 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \dots [1 - R_k(t)], \quad (13)$$

kde $R_i(t)$ je pravděpodobnost bezporuchového provozu i -tého prvku. Pro exponenciální rozdělení je $R_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$, kde $\lambda_i = 1/t_{i,m} = \text{konst}$ je intenzita poruch i -tého prvku. V případě dvou prvků obdržíme po dosazení pro $i = 1, 2$ do (13) a (11) a řadě úprav

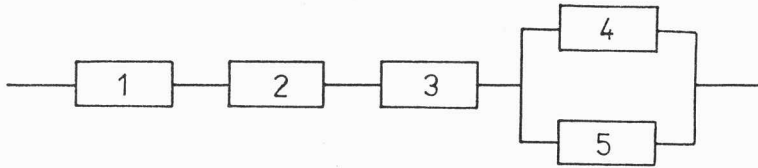
$$t_m = t_{m,1} + t_{m,2} - (t_{m,1}^{-1} + t_{m,2}^{-1})^{-1}. \quad (14)$$

Dosazením středních hodnot $t_{1,m}$ a $t_{2,m}$ dostaneme $t_m = 750$ h.

Vidíme, oč jednodušší je získání výsledku simulací Monte Carlo než odvozením analytického řešení. Při větším počtu paralelních prvků nebo při sérioparalelním uspořádání (viz následující příklad) jsou rozdíly v pracnosti ještě markantnější. Navíc, jednoduché vztahy (10), (11) můžeme užít i v případě, kdy doby do poruchy jednotlivých prvků mají jiné rozdělení než exponenciální, např. Weibullovo, a kdy analytické řešení je prakticky nemožné.

Příklad 9.

Posuďte spolehlivost zařízení s pěti prvky zařazenými sérioparalelně (obr.3). Jednotlivé prvky mají exponenciální rozdělení doby do poruchy, se středními hodnotami stejnými jako v příkladech 7 a 8 ($t_{1,m} = t_{2,m} = 1000$ h, $t_{3,m} = t_{4,m} = t_{5,m} = 500$ h).



Obr. 3 Sérioparalelní obvod příkladu 9.

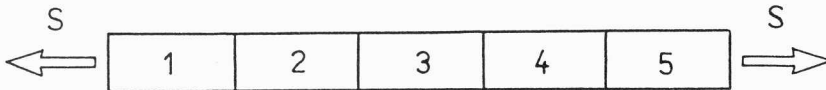
Při simulaci Monte Carlo vystačíme s jednoduchým výrazem

$$t = \min[t_1, t_2, t_3, \max(t_4, t_5)], \quad (15)$$

analytické řešení, získané podobným postupem jako v příkladu (8), je podstatně pracnější. Přesná hodnota střední doby do poruchy je 208.3 h. Rozdělení opět není exponenciální, tzn. intenzita poruch není konstantní. (Při analytickém vyšetřování složitých obvodů se tato skutečnost často zanedbává; takže výsledky mohou být méně přesné než při použití metody Monte Carlo.)

Příklad 10.

Stanovte pravděpodobnost poruchy táhla, sestaveného z pěti článků (obr. 4). Náhodnými veličinami jsou pevnosti jednotlivých článků R_1, R_2, \dots, R_5 a zatížení S . Jedná se o kombinaci úloh probíraných v příkladech 4 a 7: spolehlivost mechanické soustavy se sériově řazenými prvky, přičemž zatížení je ve všech prvcích stejné.



Obr. 4 Táhlo sestávající z pěti dílů - příklad 10.

Při řešení můžeme užít dva přístupy. U prvního stanovíme rozdělení rezervy spolehlivosti jednotlivých prvků:

$$G_1 = R_1 - S, \quad G_2 = R_2 - S, \dots, \quad G_5 = R_5 - S, \quad (16)$$

a pravděpodobnost poruchy určíme z výsledné rezervy spolehlivosti G , pro kterou platí

$$G = \min(G_1, G_2, \dots, G_5); \quad (17)$$

při této simulaci vycházíme z rozdělení G_1 až G_5 . Výhodou naznačeného postupu je, že u konstrukce s různými prvky můžeme z pravděpodobností poruchy P_{f1}, P_{f2}, \dots , zjištěných pro G_1, G_2, \dots , snadno zjistit, který z prvků je méně (nebo naopak příliš) bezpečný, a provést potřebné změny průřezů pro její optimalizaci, tzn. pro dosažení požadované bezpečnosti s minimálními náklady (viz též příklad 6).

U většiny programů Monte Carlo (M-Star ani VaP nevyjímaje) ale bohužel nemůžeme získávat současně rozdělení několika výstupních veličin. V takovém případě vycházíme přímo z výsledné rezervy spolehlivosti:

$$G = \min[(R_1 - S), (R_2 - S), \dots, (R_5 - S)] \quad (18)$$

Protože síly ve všech prvcích jsou vyvozeny stejným zatížením S , dosazuje se při jednotlivém pokusu do všech závorek v (17) stejná náhodná (generovaná) hodnota S .

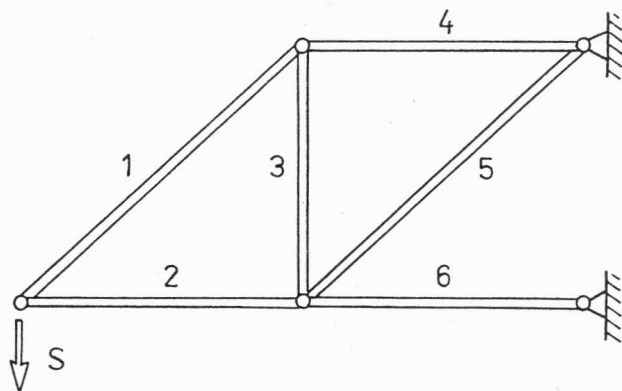
U programu M-Star lze užít i prvý přístup, jestliže oddělenými simulacemi vytvoříme histogramy rezerv spolehlivosti G_1, G_2, \dots, G_5 jednotlivých prvků, a ty pak použijeme jako vstup pro simulaci G podle vztahu (17).

Ukázkový příklad budeme řešit (pro jednoduchost) pro normální rozdělení S i všech R_i , a to s následujícími parametry: $\mu_{R1} = \mu_{R2} = \dots = \mu_{R5} = 25000 \text{ N}$, $\sigma_{R1} = \sigma_{R2} = \dots = \sigma_{R5} = 2500 \text{ N}$, $\mu_S = 15000 \text{ N}$, $\sigma_S = 1500 \text{ N}$. Výsledné charakteristiky rozdělení rezervy spolehlivosti jsou $\mu_G \approx 7100 \text{ N}$, $\sigma_G \approx 2250 \text{ N}$, $\alpha_G \approx -0.012$, $\varepsilon_G \approx 3.06$. Pravděpodobnost poruchy celého tělesa je $P_f \approx 0.0015$.

Postup při jiných rozděleních (např. lognormální) by byl stejný. Uvedený příklad lze také užít k ilustraci toho, jak s rostoucím počtem prvků klesá bezpečnost konstrukce.

Příklad 11.

Posuďte spolehlivost prutové (příhradové) konstrukce podle obr. 5.



Obr. 5 Příhradová konstrukce - příklad 11.

Porucha jednoho prutu znamená ztrátu únosnosti celé konstrukce; z hlediska spolehlivosti jsou všechny prvky řazeny v sérii. Úloha je podobná jako v předchozím případě, zatížení S však vyvolá v každém prutu jinou sílu. Nedochází-li k plastickým deformacím, jsou síly v jednotlivých prutech přímo úměrné zatěžující síle, a můžeme psát:

$$S_1 = k_1 S, \quad S_2 = k_2 S, \quad \dots \quad S_6 = k_6 S \quad (19)$$

kde k_1, k_2, \dots, k_6 jsou konstanty, které odpovídají silám v prutech při zatížení konstrukce jednotkovou silou, $S = 1$. Při řešení můžeme užít oba předchozí přístupy. Rezervy spolehlivosti jednotlivých prutů se nyní počítají jako

$$G_1 = R_1 - k_1 S, \quad G_2 = R_2 - k_2 S, \quad \dots \quad G_6 = R_6 - k_6 S, \quad (20)$$

a výsledná rezerva spolehlivosti se určí podle vztahu (17), nyní pro G_1 až G_6 . Ve druhém případě užijeme vztah

$$G = \min \left[(R_1 - k_1 S), (R_2 - k_2 S), \dots, (R_5 - k_6 S) \right] \quad (21)$$

Pravděpodobnost poruchy určíme jako hodnotu distribuční funkce $F(G = 0)$. Pokud bychom chtěli zjistit parametry rozdělení únosnosti konstrukce, musíme užít vztah

$$R = G + S = \min \left[(R_1 - k_1 S), (R_2 - k_2 S), \dots, (R_5 - k_6 S) \right] + S \quad (22)$$

Ukázkový výpočet provedeme pro následující hodnoty: zatížení S i únosnosti všech prutů mají normální rozdělení, s parametry: $\mu_S = 15000$ N, $\sigma_S = 1500$ N, $\mu_{R1} = \mu_{R5} = 40000$ N, $\sigma_{R1} = \sigma_{R5} = 4000$ N, $\mu_{R2} = \mu_{R3} = \mu_{R4} = 30000$ N, $\sigma_{R2} = \sigma_{R3} = \sigma_{R4} = 3000$ N, $\mu_{R6} = 45000$ N, $\sigma_{R6} = 4500$ N. Hodnoty jednotlivých konstant pro uspořádání podle obr. 5 jsou: $k_1 = 1.414$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1.414$, $k_6 = 2$. (V prutech 2, 3 a 6 působí tlakové síly, takže příslušné konstanty by měly být záporné. Protože však příslušné síly budeme srovnávat s únosností prutů v tlaku (vyjádřenou kladnými hodnotami), uvažujeme i zmíněné konstanty jako kladné.) Při pěti opakováních jednoho miliónu simulací se jednotlivé charakteristiky pohybovaly v následujících mezích: $\mu_G = 11180 \div 11190$ N, $\sigma_G = 3184 \div 3189$ N, $\alpha_G = -0.507$ až -0.514 , $\varepsilon_G = 3.76 \div 3.78$ (VaP), $P_f = 0.00281 \div 0.00284$. I v této úloze bychom mohli na základě pravděpodobností poruch jednotlivých prvků P_{f1}, \dots, P_{f6} postupně měnit parametry průřezů a konstrukci optimalizovat pro dosažení předepsané bezpečnosti s minimálními náklady.

ZÁVĚR

Uvedená teorie a příklady představují minimum pro získání určité představy o metodě Monte Carlo. K jejímu úspěšnému používání je samozřejmě třeba další studium a cvik, neboť praktické úlohy jsou zpravidla složitější. Například doba do poruchy při únavě závisí na větším množství činitelů, z nichž některé jsou navzájem korelovány (např. konstanty v rovnici růstu trhliny). Jiným případem jsou úlohy s nelineární závislostí mezi zatížením a odezvou konstrukce, např. při plastických deformacích nebo namáhání na vzpěr. Velké množství řešených příkladů z různých oblastí lze najít v [1, 2], různé případy únavy řešil Vlk [10].

Dalším problémem, a to všeobecným, je skutečnost, že vstupní údaje o materiálu i zatížení byly často získány měřením na poměrně malém počtu vzorků. Známe proto pouze výběrové odhady parametrů jejich rozdělení. Skutečné parametry mohou být jiné, což platí i pro vyšetřované hodnoty, např. únosnost nebo dobu do poruchy. Tuto nejistotu je třeba zohlednit i při použití metody Monte Carlo; podrobnosti lze najít v [9].

Konstrukce jsou často také staticky neurčité nebo značně tvarově složité. Na rozdíl od jednoduchého příkladu č. 11, kde konstanty k_1 až k_6 vyplývaly jen ze vzájemné polohy jednotlivých prutů, závisí u staticky neurčité konstrukce takovéto konstanty také na tuhosti prvků, a tedy i na velikosti jejich průřezů. Při optimalizaci konstrukce je v takových případech nutno na začátku každého kroku určit hodnoty těchto konstant samostatným výpočtem (obecněji - provést silovou a napěťovou analýzu konstrukce, např. metodou konečných prvků). Takovéto výpočty mohou být značně zdlouhavé, takže může být výhodnější použít jinou metodu, např. LHS nebo metodu odezvové plochy; přehled viz [7, 8]. Ve většině úloh, kde se uplatňují náhodné vlivy, však popsání metoda Monte Carlo zůstává nejjednodušším

a neúčinnějším prostředkem pro určování pravděpodobných hodnot sledované veličiny, pro posuzování spolehlivosti i při hledání optimálního uspořádání daného systému.

Poděkování. Příspěvek vznikl v rámci řešení projektů GA ČR č. 103/97/0139 a 101/98/0378, a rozvojového projektu FRVŠ č. 1131/1997. Autor děkuje studentům L. Beranovi, J. Krčálovi, J. Leškovi, R. Pavlíkovi, E. Špačkovi a zejména Bohumilu Culkovi mladšímu za dotazy a podněty, které přispěly ke zlepšení náplně základního kursu metody Monte Carlo.

Lektoroval: Prof. Ing. Pavel Marek, DrSc.

Předloženo v prosinci 1998.

Literatura

- [1] Marek, P. - Guštar, M. - Anagnos, T.: Simulation based reliability assessment for structural engineers. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
- [2] Marek, P. - Guštar, M. - Bathon, L.: Tragwerksbemessung. Von deterministischen zu probabilistischen Verfahren. Academia, Praha, 1998.
- [3] Marek, P. a kol.: Mezní stavy konstrukcí. Závěrečná zpráva grantové úlohy GAČR č. 103/94/0562, Praha, listopad 1996.
- [4] Rubinstein, R. Y.: Simulation and the Monte Carlo method. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [5] Marek, P. - Guštar, M.: Výpočetní programy M-StarTM a další. ARTech Praha, 1990 - 1998.
- [6] Petschacher, M. - Simov, G. - Toulev, S.: Výpočetní program Vap 1.6 for Windows. Institute for Structural Engineering (IBK), ETH Zürich. 1996.
- [7] Florian, A.: Moderní numerické simulační metody - přehled. Stavební obzor, 7, (1998), č. 2, s. 60-64.
- [8] Menčík, J.: Analýza a vytváření spolehlivosti konstrukcí. Sborník konf. Inženýrská mechanika '97, díl I, s. 141-146. ÚTAM (AVČR), Praha, 1997.
- [9] Menčík, J.: Reliability assessment by the Monte Carlo method with small amount of data. Zasláno k uveřejnění v Building Research Journal, 1998.
- [10] Vlk, M.: posouzení spolehlivosti konstrukcí namáhaných na únavu s využitím simulační techniky Monte Carlo. Příloha C zprávy [3].

Resumé

POUŽITÍ METODY MONTE CARLO PŘI VÝUCE SPOLEHLIVOSTI NA DFJP

Jaroslav MENČÍK

V příspěvku je shrnut obsah základního kursu simulační techniky Monte Carlo, přednášeného na Dopravní fakultě Jana Pernera v předmětech inženýrského a doktorandského studia, zabývajících se spolehlivostí. V první části je vysvětlen princip metody a stručně popsány dva komerční programy, užívané ve výuce. Rovněž je diskutována otázka přesnosti výsledků získaných simulací. V další části je uvedeno jedenáct úloh, pomocí nichž studenti získají představu o podstatě a možnostech metody Monte Carlo: od generování náhodné veličiny se zadaným rozdělením pravděpodobnosti, přes vytváření funkcí více náhodných veličin, až po výpočty

pravděpodobnosti poruchy konstrukčních dílů a složitějších systémů a jejich optimalizaci pro dosažení požadované spolehlivosti

Summary

USE OF THE MONTE CARLO METHOD IN THE RELIABILITY COURSES OF THE JAN PERNER TRANSPORT FACULTY

Jaroslav MENČÍK

The paper presents the short course of the Monte Carlo method, taught at the Faculty of Transportation in the subjects dealing with reliability. First, principles of the method are given, brief information about the Monte Carlo computer programs used in the course, and the questions of the accuracy of the simulations. Then, eleven examples follow: from simple generation of a quantity with given probability distribution, over generation of functions of more variables, to the assessment of the failure probability of mechanical components and complex systems, including their optimisation for the reliability level demanded.

Zusammenfassung

VERWENDUNG DER MONTE CARLO METHODE IN DEN ZUVERLÄSSIGKEITSKURSEN AUF DER JAN PERNER FAKULTÄT FÜR VERKEHRSWESEN

Jaroslav MENČÍK

Der Beitrag enthält den Text des Grundkurses der Methode Monte Carlo, vorgetragen an der Fakultät für Verkehrswesen in den Fächern, die Zuverlässigkeit behandeln. Im ersten Teil ist das Prinzip der Methode erläutert, sowie Information über die verwendeten Rechnerprogramme, und über die Genauigkeit der Simulationen. Dann, elf Beispiele folgen: von einfacher Erzeugung von Zufallsvariablen mit vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung, über Generierung von Funktionen mehrerer Zufallsvariablen, zur Zuverlässigkeitsabschätzung von mechanischen Teilen und komplizierten Systemen, sowie deren Optimierung für die gegebene Zuverlässigkeit.

Jaroslav Menčík:

Použití metody Monte Carlo při výuce spolehlivosti na DFJP