UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2008 Bc. Karolína Kárníková

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

MODELOVÁNÍ INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

BC. KAROLÍNA KÁRNÍKOVÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2008

UNIVERSITY OF PARDUBICE

FAKULTY ECONOMICS AND ADMINISTRATION

MODELLING OF INDIVIUAL LOSSES IN NON-LIFE INSURANCE

BC. KAROLÍNA KÁRNÍKOVÁ

THESIS

2008

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Ústav systémového inženýrství a informatiky
Akademický rok: 2007/2008

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Karolína KÁRNÍKOVÁ**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**

Název tématu: **Modelování individuálních škod v neživotním pojištění**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Charakteristika neživotního pojištění.
Moderní teorie rizika.
Modelování škod jako součást teorie rizika.
Pravděpodobnostní rozdělení individuálních škod. Odhad jejich parametrů.
Testy dobré shody a jejich využití při modelování škod.
Praktická ukázka modelování škod pomocí statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:

Cipra, T.: Pojistná matematika v praxi. Praha: Edice HZ, 1994.
Cipra, T.: Pojistná matematika – teorie a praxe. Praha: EKOPRESS, Vydání II, 2006.
Cipra, T.: Finanční a pojistné vzorce. Praha: Grada Publishing, 2006.
Hogg, R. V. – Klugman, S. A.: Loss Distribution. New York: John Wiley&Sons, 1984.
Hossak, I. B. – Pollard, J. H. – Zehnwirth, B.: Introductory statistics with applications in general instance. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
Kaas, R. – Goovaerts, M. – Dhaene, J. – Denuit, M.: Modern Actuarial Risk Theory. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
Pacáková, V.: Aplikovaná poistná štatistika. Bratislava: Iura Edition, 2004.

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.
Ústav ekonomie

Datum zadání diplomové práce: 12. října 2007
Termín odevzdání diplomové práce: 26. května 2008

prof. Ing. Jan Čapek, CSc.
děkan

L.S.

doc. Ing. Pavel Petr, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 15. října 2007

Souhrn

Práce se zabývá modelováním individuálních škod v neživotním pojištění. Cílem práce je ukázat využití statistických metod v pojišťovně v rámci neživotního pojištění. Práce se zaměřuje na definování základních pojistných produktů v neživotním pojištění, dále pravděpodobnostními rozděleními, využívajícími se v této oblasti, včetně odhadu jejich parametrů. Dále práce uvádí využití testů dobré shody a praktické využití statistického programu Stagraphics Centurion.

Klíčová slova:
pojistný trh, neživotní pojištění, riziko, rozdělení pravděpodobnosti, odhady parametrů, testy shody

Summary

This Thesis consider of modelling individual losses in non-life insurance. Purpose of this Thesis is demonstrate use of statistical methods in insurance company within non-life insurance. Thesis define basic insurance products in non-life insurance, probability distributions using in this sphere of business, including estimation of their parameters. In thesis is described using of goodness-of–fit tests and illustration in statistics program Stagraphics Centurion.

Keywords:
insurance market, non-life insurance, risk, probability distributions, estimation of parameters, goodness-of-fit tests

Obsah:

1 ÚVOD

Lidé obvykle uzavírají pojištění, když se chtějí zabezpečit proti možným škodám, o nichž není předem jasné, v jaké výši a jestli vůbec nastanou.

Pojišťovnictví patři bezesporu ke klíčovým oblastem národního hospodářství každého státu. Je důležité jak z pohledu jednotlivců, tak z globálního pohledu.

Pojistný trh Evropské Unie čeká v budoucnu řada změn, nejedná se pouze o stále sílící konkurenci, ale zejména o zavedení nového projektu Solventnost II., která klade důraz na řízení rizik a kontrolu celého procesu pojištění v EU.

Pojišťovny se již dnes musí připravovat na tento systém posuzováním solventnosti. Pojišťovny musí důkladně stanovit způsob analýzy rizika, modelování jednotlivých rizik a jejich vzájemných vztahů. Pojišťovny pracují s náhodnými událostmi, do hry tak vstupuje teorie pravděpodobnosti. Metody používané v pojistné praxi využívají pestrou škálu od jednoduchých matematických metod ke složitější statistice při hledání odhadů parametrů z pozorovaných dat, až po složité modely náhodných procesů, rozebírajících třeba otázky doby do zruinování pojišťovny.

Cílem mé diplomové práce je ukázat praktickou aplikaci metod teorie rizika při řešení dílčích otázek pojistné praxe neživotního pojištění. Hlavním úkolem je pomocí statistického balíku STATGRAPHICS Centurion XV. modelovat individuální pojistné plnění při určitém pojistném produktu.

Dílčí cíle:

- analýza pojistného trhu v ČR
- analýza neživotního pojištění
- definic jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti, které se využívají v pojistné praxi
- odhady parametrů jednotlivých rozdělení
- testovat shodnosti zvolených pravděpodobnostních modelů pomocí testů dobré shody
- vytvoření modelového příkladu pomocí statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

2 POJIŠŤOVNICTVÍ

Význam pojišťovnictví a pojistného trhu samotného není v tržní ekonomice dost dobře znám. Pojišťovnictví patří mezi mladé, ale významné a velmi rychle se rozvíjející odvětví tržních ekonomik. Pojišťovnictví přispívá a podporuje ekonomickou stabilitu tržních ekonomik. Kromě pojistné ochrany má velký význam i akumulace poměrně velkého objemu peněžních prostředků, které získávají komerční pojišťovny od svých klientů. Vyplácením pojistného plnění pomáhají pojišťovací instituce svým klientům při obnově jejich majetku, zdraví a dalších hodnot [1, str. 58].

Jak již je zřejmé z předchozího, pojišťovnictví představuje nevýrobní část ekonomiky, která má zabezpečit eliminaci nahodilých událostí. Pojišťovna jako subjekt přebírá od svých klientů (za úplatu) riziko náhodné události.

Pojišťovnictví teda:

- podporuje investice a inovace
- spolehlivě realizuje doplňkové systémy k systému sociálního zabezpečení
- přispívá k modernizace finančních služeb
- stimuluje risk management, prostřednictvím cenových mechanismů
- zmírňuje inflaci odkladem spotřeby
- poskytuje zdroj pro rozvoj ekonomiky a společnosti (akumulace finančních zdrojů v technických rezervách)

2.1 Vývoj a vznik pojištění v ČR

Pojištění má velmi dlouhou historii, která je delší než 4 tisíce let. První dochované zmínky o pojišťovnictví pocházejí z období roku 2500 před naším letopočtem. Zmínky o pojišťovnictví můžeme nalézt v každém kulturním lidském společenství (Egypt – zmínky v Chammurabiho zákoníku, Indie, antické Řecko, Řím…). Důvodem vzniku pojišťovnictví byla snaha odstranit, nebo alespoň částečně eliminovat finanční důsledky způsobené nepříznivými náhodnými událostmi.

Historie pojišťovnictví na území České republiky se datuje ke konci 17. století. Roku 1699 podal Jan Kryštof Bořek návrh na zavedení požárního pojištění. V roce 1777 byla založena pojišťovna, která byla zřízena na eliminaci škod způsobených ohněm. Po roce 1822 začaly na území dnešní České republiky působit první zahraniční pojišťovny se sídly ve Vídni a Terstu. Skutečný rozvoj českého komerčního pojišťovnictví se datuje k roku 1827, kdy byl v Praze založen „Císařsko – královský privilegovaný český společný náhradu škody svedené pojišťující ústav“, který byl později přejmenován na „První česká vzájemná pojišťovna“. Tato pojišťovna zaplatila téměř 300 zlatých jako pojistné plnění při požáru Národního divadla roku 1881. Druhá polovina 19. století přinesla na český trh mnoho nových pojišťoven.

Vznikem samostatného Československa roku 1918 se nastartovala nová éra pojišťovnictví. Kromě nově založených českých pojišťoven na trh vstupovaly další zahraniční pojišťovny. I přes útlum, které pojišťovnictví zažilo během 2. Světové války a za dob protektorátu, působilo v roce 1945 v Československu asi 733 pojišťoven.

24. října 1945 byly tyto pojišťovny dekretem prezidenta znárodněny. V roce 1947 bylo v Československu už jen pět pojišťoven, které se roku 1948 sloučily pouze pod jeden pojišťovací ústav – Československá pojišťovna, národní podnik. V roce 1969 byla tato pojišťovna rozdělena na dvě pojišťovny a to Česká státní pojišťovna se sídlem v Praze a Slovenská štátná poisťovna se sídlem v Bratislavě. Monopol těchto pojišťoven trval až do počátku 90.let 20.století.

Dne 28.května 1991 byl přijat zákon č. 1985/1991 Sb. O pojišťovnictví, který umožňoval provozovat pojišťovací činnost na území České republiky subjektům, které splní podmínky dané tímto právním předpisem.

Vstup České republiky do Evropské Unie umožnil další růst počtu pojišťovacích společností.

2.2 Pojistný trh v číslech roku 2006

Instituce v pojišťovnictví České Republiky:

- pojišťovny a zajišťovny, ať už se sídlem v ČR nebo v EU
- pojišťovací zprostředkovatelé (vázaný pojišťovací zprostředkovatel, podřízený pojišťovací zprostředkovatel, pojišťovací agent, pojišťovací makléř, pojišťovací zprostředkovatel, jehož domovským členským státem není ČR)
- samostatný likvidátor pojistných událostí
- státní dozor nad pojišťovnictvím (ČNB)
- asociace pojišťoven
- finanční instituce zabývající se pojištěním (např. Komerční banka)
- poradenské firmy v oblasti pojišťovnictví
- stát

V roce 2006 působilo na našem pojistném trhu celkem 49 pojišťoven (6 životních pojišťoven, 26 pojišťoven neživotních a zbylých 17 smíšených-univerzálních pojišťoven poskytujících jak životní, tak neživotní pojištění). Z celkového počtu 49 pojišťoven působících na území České Republiky je 33 pojišťoven tuzemských a zbylých 16 jsou pobočky pojišťoven států Evropské unie (dvě pojišťovny zároveň vykonávají funkci zajišťovny).

Ze 33 pojišťoven se sídlem na území České Republiky jich 15 provozuje pouze neživotní pojištění, 3 životní pojištění a 15 zbývajících jsou pojišťovny univerzální. Pobočky 15 pojišťoven se sídlem na území EU nejčastěji nabízejí neživotní pojištění a to v 11 případech, 3 z nich nabízejí pouze životní pojištění a 2 pojišťovny jsou pojišťovnami univerzálními. Poslední zbývající pojišťovna je pojišťovna ze zemí třetího světa. Celkový přehled naleznete v Příloze 1 tohoto dokumentu.

Záměr provozovat pojišťovací činnost na území našeho státu oznámilo ke dni 31.12.2006 celkem 401 pojišťoven a poboček pojišťoven ze států EU nebo EHP (Evropského hospodářského prostoru). Zájem provozovat činnost projevilo o 73 subjektů více než v roce 2005. Největší zájem o vsup na naše území mají pojišťovací společnosti se sídlem ve Velké Británii, nebo Irsku.

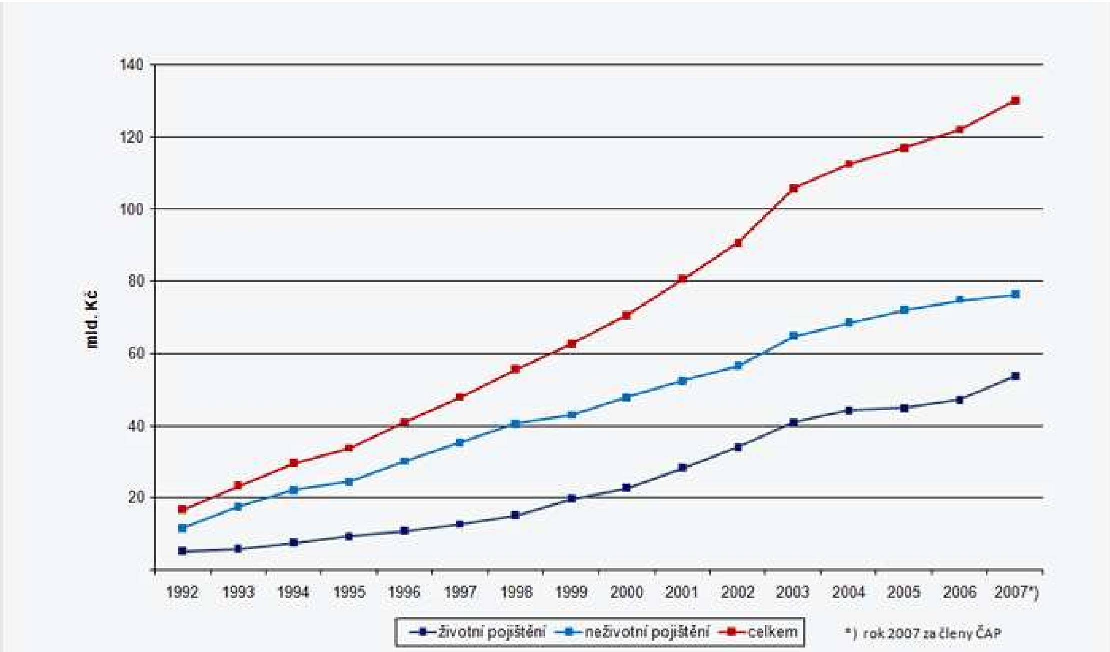
2.3 *Ukazatelé výkonnosti pojistného trhu*

Pojišťovnictví jako součást tržního hospodářství daného státu lze hodnotit danými ukazateli:

1. předepsané pojistné v příslušném roce,
2. pojistné plnění,
3. škodovost,
4. agregátní ukazatel pojištěnosti,
5. ostatní ukazatele.

2.3.1.1 Předepsané pojistné

Základní ukazatel vývoje pojistného trhu je hrubé předepsané pojistné (předepsané pojistné). Pod pojmem pojistné rozumíme cenu za pojistnou ochranu, kterou se podepsáním pojistné smlouvy zavázal pojistník zaplatit pojistiteli.



Obrázek 1: Vývoj objemu předepsaného pojistného v ČR, [2]

Tabulka 1: Celkové předepsané pojistné (za členy ČAP), [2 - výroční zpráva 2006]

Předepsané pojistné celkem (v tis Kč)	2004	2005	2006
	111 550 443	115 711 748	120 149 030

Oproti roku 2005 vzrostlo předepsané pojistné o 4% na 120 mld. Kč. Tempo růstu bylo o 0,3% vyšší než v předchozím roce, přičemž životní pojištění zaznamenalo vyšší dynamiku – zvýšení o 5,1%, zatímco neživotní pojištění pouze o 3,8%.

Tabulka 2: Výše předepsaného hrubého pojistného za členy ČAP, v tis Kč, [3]

Pojišťovna	Celkem	Neživotní	Životní
AIG CZECH REPUBLIC pojišťovna, a.s.	950741	950741	x
Allianz pojišťovna, a.s.	9373217	7230797	2142420
Aviva životní pojišťovna, a.s.	724904	x	724904
AXA životní pojišťovna, a.s.	1461365	56002	1405363
Česká kancelář pojistitelů	758	758	x
Česká podnikatelská pojišťovna, a.s.	4345158	3262338	1082820
Česká pojišťovna ZDRAVÍ a.s.	190146	190146	x
Česká pojišťovna a.s	39667243	26459685	13207558
ČSOB Pojišťovna, a.s., člen holdingu ČSOB.	7674006	3 41 690	4432316
D.A.S. pojišťovna právní ochrany, a.s	218624	218624	x
Evropská Cestovní Pojišťovna, a.s.	207396	207396	x
Exportní garanční a pojišťovací společnost, a.s. (EGAP)	910850	910850	x
Generali Pojišťovna a.s.	6388077	4423383	1964694
GERLING - Konzern Všeobecná pojišťovací akciová společnost	269296	269296	x
Hasičská vzájemná pojišťovna a.s.	337916	322844	15072
ING Životní pojišťovna, pobočka pro ČR	5938648	x	5938648
Komerční pojišťovna, a.s.	2655736	283378	2372358
Kooperativa, pojišťovna, a.s.	27427383	21155008	6272375
POJIŠŤOVNA CARDIF PRO VITA, a.s.	1020469	851417	169052
Pojišťovna České spořitelny, a.s.	4427575	23891	4403684
Pojišťovna Slavia a.s.	64070	64070	x
PRVNÍ AMERICKO - ČESKÁ POJIŠŤOVNA, a.s./AMCICO AIG Life	1983811	262693	1720848
UNIQA pojišťovna, a.s.	3147661	2302844	844817
VICTORIA VOLKSBANKEN pojišťovna, a.s.	243199	80078	163121
Wüstenrot pojišťovna, pobočka (WSB)	17034	17034	x
Wüstenrot, životní pojišťovna, a.s.	212151	x	212151
CELKEM	**119857434**	**72785233**	**47072201**

Z výše uvedeného vyplývá, že nejlépe postavenou pojišťovnou na českém trhu vůbec je Česká pojišťovna. Podíl České pojišťovny na trhu dle předepsaného pojistného činí 30,86 %, v neživotním pojištění 33,84 % a v životním pojištění pouze 26,15 %, což je dáno zejména velkou konkurencí (specializované životní pojišťovny).

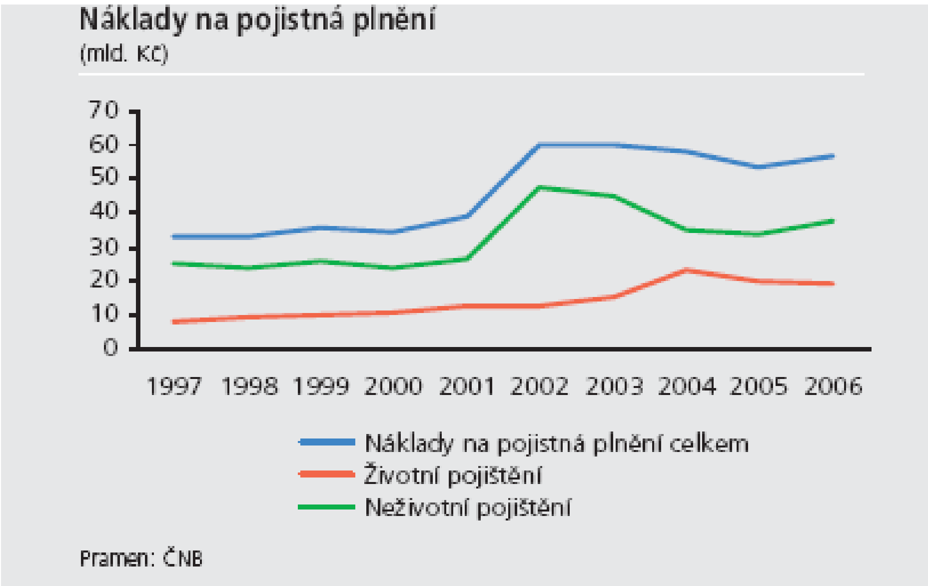
Celkový podíl neživotního pojištění je 61 %, životního pojištění pouze 39 %. Ve většině evropských zemí bývá tento poměr opačný.

2.3.1.2 Pojistné plnění

Pojistným plněním se rozumí náhrada pojistiteli v případě, že dojde k pojistné události. Náhrada je prováděna převážně formou peněžního plnění, ale objevují se i případy naturálního plnění.

Tabulka 3: Celková pojistná plnění (za členy ČAP), [2 - výroční zpráva 2006]

Náklady na pojistná plnění (v tis Kč)	2004	2005	2006
	58 430 740	53 635 331	56 609 280



Obrázek 2: Vývoj nákladů na pojistná plnění, [4, str. 77]

Celkové náklady na pojistná plnění činily v roce 2006 56 mld. Kč což je zhruba o 5% více než za rok 2005. Tento nárůst byl způsoben zejména růstem nákladů na pojistná plnění v neživotním pojištění, která se zvýšila o 12%. Tento nárůst byl ovlivněn zejména nepříznivými klimatickými podmínkami. Náklady na pojistná plnění v životním pojištění klesly o 4,5%.

Na celkových nákladech na pojistná plnění v neživotním pojištění se zajistitelé podíleli 24,7 % (9,3mld Kč) a na nákladech na životní pojištění jen 1,7% (325mil Kč).

2.3.1.3 Škodovost

Ukazatel, vyjadřující poměr mezi výší poskytnutých pojistných plnění a výší přijatého (předepsaného) pojistného.

Tabulka 4: Škodovost v jednotlivých letech (za členy ČAP), [2]

Škodovost (v %)	2004	2005	2006
	52,38055397	46,35253717	47,115886

Škodovost v průběhu posledních 3 let klesala, což je pro pojišťovny velmi pozitivní jev. Protože to buď znamená nárůst přijatého pojistného, nebo snížení pojistného plnění, které pojišťovny musely vyplatit. Pokles škodovosti pro jednotlivé pojišťovny znamená zlepšení jejich hospodářského výsledku, případně navýšení zisku.

2.3.1.4 Agregátní ukazatel pojištěnosti (propojištěnost)

Agregátní ukazatel pojištěnosti představuje jeden z nejdůležitějších ukazatelů hodnotící úroveň pojistného trhu jako celku. Vypočte se jako poměr mezi předepsaným pojistným a hrubým domácím produktem (HDP).

Tabulka 5: Vývoj HDP v ČR [zdroj vlastní]

HDP (v mld. Kč)	2004	2005	2006
	2 781	2 970	3 204

Tabulka 6: Agregátní ukazatel pojištěnosti [zdroj vlastní]

Agregátní ukazatel pojištěnosti (v %)	2004	2005	2006
	3,8	3,9	4

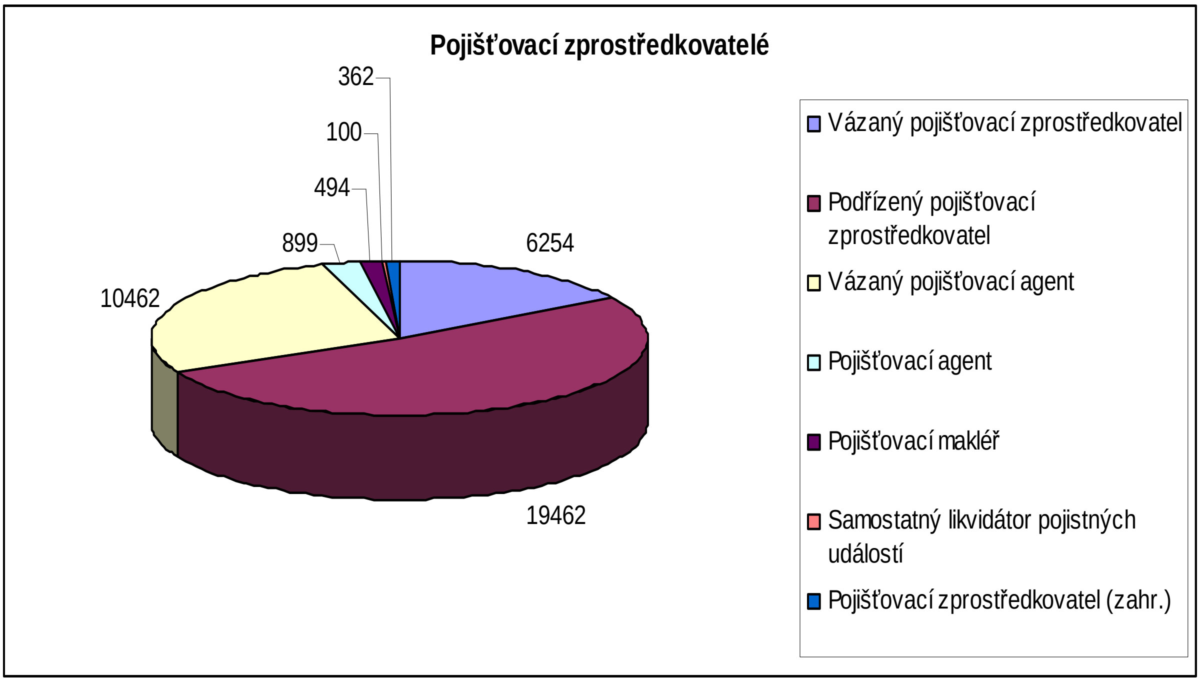
Z výše uvedeného vyplývá, že pojistný trh má vzestupnou tendenci na vytváření HDP. Každoroční růst je o 0,1%.

2.3.1.5 Ostatní ukazatelé

1. Počet komerčních pojišťoven
2. Počet zaměstnanců v pojišťovnictví
3. Počet uzavřených pojistných smluv
4. Počet vyřízených pojistných událostí
5. Průměrné pojistné plnění na jednu pojistnou smlouvu
6. Koncentrace pojistného trhu

Tabulka 7: Počet pojišťovacích zprostředkovatelů v registru ke dni 8.3.2006, [5]

Druh zprostředkovatele	FO	PO	Celkem
Vázaný pojišťovací zprostředkovatel	6076	178	6254
Podřízený pojišťovací zprostředkovatel	10779	8683	19462
Vázaný pojišťovací agent	10418	44	10462
Pojišťovací agent	443	456	899
Pojišťovací makléř	124	370	494
Samostatný likvidátor pojistných událostí	36	64	100
Pojišťovací zprostředkovatel (zahr.)	25	337	362
CELKEM	**27901**	**10132**	**38033**



Graf 1: Počet pojišťovacích zprostředkovatelů v registru ke dni 8.3.2006, [zdroj vlastní]

Ke konci roku 2006 bylo v platnosti celkem 22,6 mil pojistných smluv uzavřených mezi pojistníky (fyzické i právnické osoby) a pojistiteli (pojišťovnami), z toho 7,9 mil životních a 14,7 mil. neživotních pojistných smluv. Tento počet se týká 27 členů České asociace pojišťoven (ČAP) se zhruba 14 tisíci zaměstnanci. Jsou to reprezentativní údaje v zásadě pro celý pojistný trh v České republice. Pojišťovny na českém trhu nabízejí více než 260 pojistných produktů a jejich modifikací. [6]

V roce 2006 dosáhly pojišťovny se sídlem na území ČR celkového zisku ve výši 14,6 mld. Kč, což představuje nejlepší hospodářský výsledek v celkového historii českého pojišťovnictví.

3 NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ V ČR

Produkty neživotního pojištění nebývají zpravidla spojeny s žádnou formou spoření. Předepsané pojistné představuje pouze ohodnocení pojištěného rizika a provizi pojišťovně. V případě, že nastane pojistná událost, pojišťovna plní předem sjednané pojistné plnění, které je většinou stejné v kterémkoliv momentě pojistné doby.

Neživotní pojištění není jako životní rezervotvorné, které funguje tedy za jiným účelem než ke krytí rizika smrti nebo dožití. Oproti životnímu se také liší ve výpočtu rizikového netto pojištění. Rozsah pojistných rizik je v této oblasti velmi rozsáhlý. V neživotním pojištění platí věta: *"pojistit se dá cokoliv, jen je otázka za kolik"*.

Neživotní pojištění se sjednává většinou na dobu 1 roku.

Neživotní pojištění je vzhledem ke svému rozsahu krytí rizik náchylnější k pojistným podvodům.

Základní vymezení tří základních skupin životních a neživotních pojištění obsahuje zákon 363/1991 Sb.o pojišťovnictví, který v příloze vyjmenovává jednotlivá pojistná odvětví.

3.1 Rizika v neživotním pojištění

Riziko můžeme definovat jako hodnotu pravděpodobné ztráty vzniklé nositeli rizika, vyjádřena nejčastěji v měnových jednotkách.

R = D x P (1) (3.1)

R…… riziko

D…… škoda

P…… pravděpodobnost realizace scénáře nebezpečí

Škoda se dá definovat jako majetková újma vzniklá realizací náhodného vlivu (nebezpečí). Obvykle je škoda vyjádřena v peněžních jednotkách, dá se též ale vyjádřit počtem zraněných osob, počtem vadných výrobků, počtem uhynulých zvířat apod. Škoda je náhodná veličina, závislá na čase a prostoru v němž vzniká.

Neživotní pojištění zahrnuje krytí rizik neživotního charakteru.

3.1.1 Osobní rizika

Osobní rizika jsou rizika, která se týkají bezprostředně fyzických osob. V neživotním pojištění se jedná převážně o riziko úrazu, které může způsobit dočasnou, nebo trvalou pracovní invaliditu. Osobní rizika se také týkají cestovního pojištění osob.

3.1.2 Živelná rizika

Živelná rizika jsou rizika přímých škod na majetku způsobených přírodními vlivy (požár, výbuch, zemětřesení, povodeň, záplava, vichřice, krupobití, mráz, déšť, sucho, prudké změny teplot...). Druhy živelných rizik se od sebe liší dle jednotlivých geografických oblastí.

3.1.3 Šomážní rizika

Šomážní rizika jsou následná rizika přerušení provozu, výroby, nebo výpadku elektrického proudu v důsledku živelné katastrofy. Např. lze pojistit vzniklé škody (zkažení potravin v mrazírnách v při výpadku elektrického proudu), ale také ušlý zisk.

3.1.4 Dopravní rizika

Dopravní rizika jsou rizika, která vznikají v souvislosti s dopravními prostředky (havarijní pojištění, povinné ručení, kaskopojištění) nebo v souvislosti s přepravovaným nákladem (kargopojištění).

3.1.5 Strojní rizika

Strojní rizika jsou rizika poruchy nebo havárie strojních zařízení v důsledku vady materiálu, chybné technologie, zkratu v elektrické síti, případně v důsledku neodborného zacházení.

3.1.6 Rizika odcizení nebo vandalství

Vztahují se k pojištěnému majetku. V rámci pojištění majetku, ale i havarijního pojištění motorových vozidel.

3.1.7 Odpovědnostní rizika

Odpovědnostní rizika jsou rizika škod způsobených na majetku či zdraví jiné osoby, za který nese pojištěný zodpovědnost (placení léčebných výloh). Pro odpovědnostní pojištění je typické sjednání max. pojistného plnění. Odpovědností pojištění mají ze zákona povinné některé skupiny osob (např.lékaři).

3.1.8 Obchodně finanční rizika

Obchodně – finanční rizika vyplývají z obchodních vztahů na domácím i zahraničním trhu, z dodavatelsko-odběratelských vztahů. Za riziko se považuje např. dlouhodobý pokles kurzů, pokles poptávky po výrobku, službě, druhotná platební neschopnost...). Jako zvláštní kategorii tvoří úvěrové a devizové riziko. Obchodní rizika podmiňují vznik nových pojistných produktů např. pojištění exportních úvěrů, pojištění investičních celků apod.

3.1.9 Sociálně politická rizika

Sociálně politická rizika zahrnují vnitřní nepokoje, stávky, embarga, konfiskace surovin a materiálu. Často dochází k prolínání s obchodně – finančními riziky. Např. pojištění právní ochrany.

Pojišťovací rizika původně vedla ke vzniku tzv. Teorie rizika v pojišťovnictví. V 21. století z této teorie čerpají poznatky i další vědní disciplíny např. Ekonomika (riziko podnikání), lékařství (epidemiologie) nebo zemědělství. V oblasti matematiky se nevztahuje pouze na oblast pojišťovnictví, ale i na teorii her nebo na samotnou matematickou statistiku.

3.2 Dělení neživotního pojištění

3.2.1 Neživotní pojištění osob

Úrazové pojištění

Úrazové pojištění je nejběžnějším pojištěním pro běžného klienta. Asi by se dnes nenašel člověk, který o úrazovém pojištění ani neuvažoval. I přesto, že nejohroženějšími skupinami vhledem k náchylnosti k úrazu jsou děti a senioři, úrazové pojištění nás provází v průběhu celého života. Tento fakt je dán převážně tím, že pokud se nacházíme v některé z rizikových skupin, úrazové pojištění si uzavíráme jako samostatný produkt. V průběhu produktivního věku využíváme toto pojištění v rámci jiných pojistných produktů (např. v rámci životního pojištění).

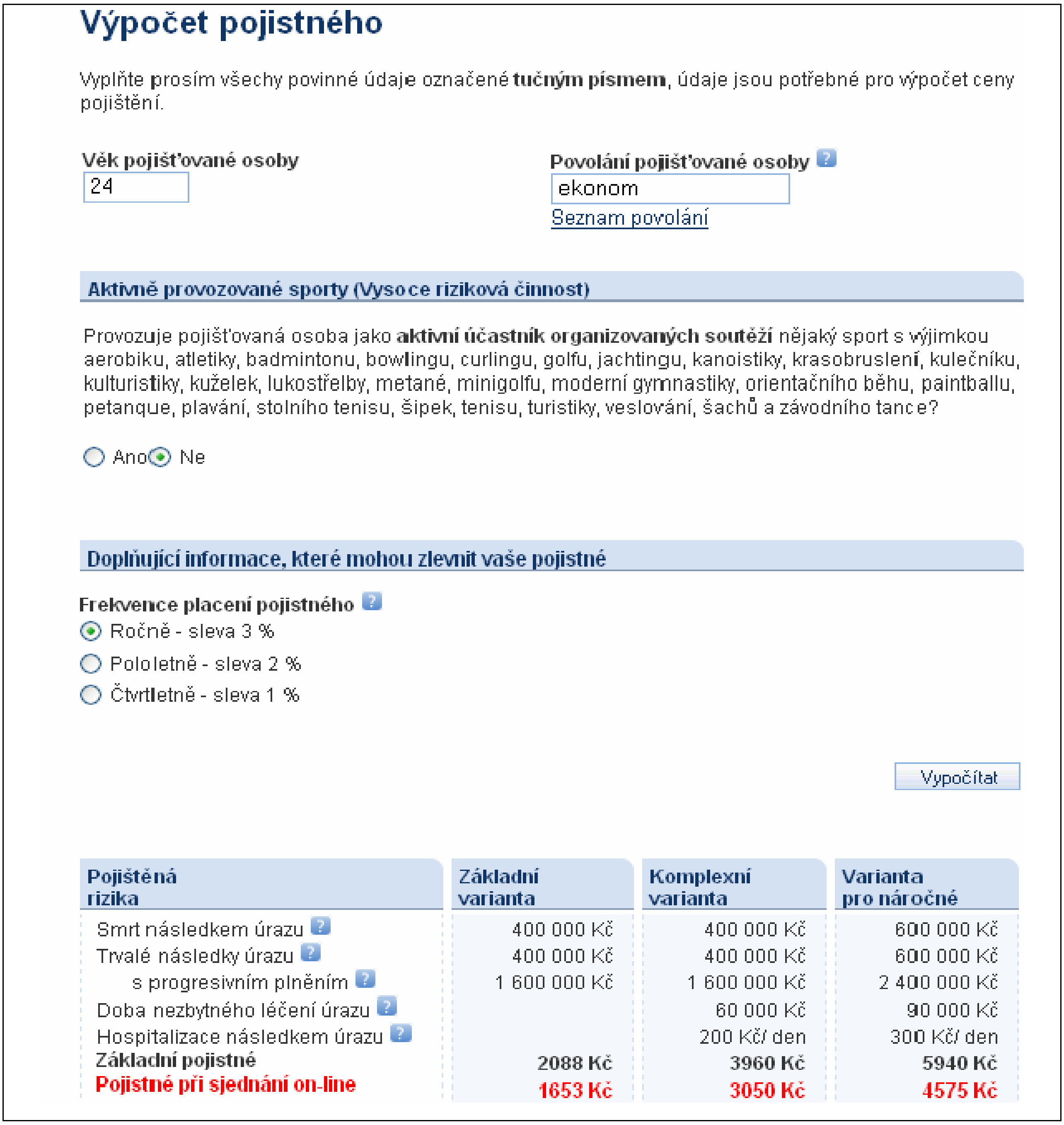
Úrazové pojištění kryje mnoho rizik, je jen na každém klientovi, zda toto riziko považuje za podstatné, či nikoliv. Toto pojištění samozřejmě neochrání pojištěného proti úrazu, ale zmírňuje následky úrazu a pomáhá zmírnit jeho finanční důsledky, které by mohly zhoršit ekonomickou situaci pojištěného.

Pojištění kryje:

- trvalé následky úrazu
- smrt úrazem
- pojištění drobných úrazů
- pojištění pracovní neschopnosti
- pojištění vážných chorob
- pojištění invalidity
- pojištění pobytu v nemocnici

Výše pojistného se počítá podle toho do jaké rizikové skupiny je osoba zařazena, podle povolání, podle provozovaných sportů, podle věku a dále podle volby pojistné částky za jednotlivá rizika.

Praktická ukázka 1: Výpočet výše pojistného při úrazovém pojištění (Česká pojišťovna)



Výpočet pojistného

Vyplňte prosím všechny povinné údaje označené **tučným písmem**, údaje jsou potřebné pro výpočet ceny pojištění.

Věk pojišťované osoby
24

Povolání pojišťované osoby
ekonom
Seznam povolání

Aktivně provozované sporty (Vysoce riziková činnost)

Provozuje pojišťovaná osoba jako **aktivní účastník organizovaných soutěží** nějaký sport s výjimkou aerobiku, atletiky, badmintonu, bowlingu, curlingu, golfu, jachtingu, kanoistiky, krasobruslení, kulečníku, kulturistiky, kuželek, lukostřelby, metané, minigolfu, moderní gymnastiky, orientačního běhu, paintballu, petanque, plavání, stolního tenisu, šipek, tenisu, turistiky, veslování, šachů a závodního tance?

Ano Ne

Doplňující informace, které mohou zlevnit vaše pojistné

Frekvence placení pojistného
Ročně - sleva 3 %
Pololetně - sleva 2 %
Čtvrtletně - sleva 1 %

Vypočítat

Pojištěná rizika	Základní varianta	Komplexní varianta	Varianta pro náročné
Smrt následkem úrazu	400 000 Kč	400 000 Kč	600 000 Kč
Trvalé následky úrazu	400 000 Kč	400 000 Kč	600 000 Kč
s progresivním plněním	1 600 000 Kč	1 600 000 Kč	2 400 000 Kč
Doba nezbytného léčení úrazu		60 000 Kč	90 000 Kč
Hospitalizace následkem úrazu		200 Kč/ den	300 Kč/ den
Základní pojistné	**2088 Kč**	**3960 Kč**	**5940 Kč**
Pojistné při sjednání on-line	**1653 Kč**	**3050 Kč**	**4575 Kč**

Obrázek 3: On-line výpočet výše pojistného úrazového pojištění, [7 – vygenerovaný příklad]

Nemocenské pojištění

Komerční nemocenské pojištění je nadstandardní pojištění k povinnému zdravotnímu pojištění a povinnému sociálnímu pojištění.

Pojištění kryje:

- nadstandardní zdravotní péči
- nadstandardní pokoj v nemocnici
- stomatologické úkony, které nejsou hrazeny z veřejného zdravotního pojištění
- doplnění příjmů, které plynou z veřejného zdravotního pojištění

V praxi stále mnoho lidí nedokáže rozlišit komerční nemocenské pojištění (dobrovolné) a zdravotní pojištění (ze zákona povinné). Z toho důvodu není toto pojištění tak rozšířené.

3.2.2 Pojištění majetková

Pojištění domácnosti a pojištění budov

Ať už bydlíme ve vlastním, nebo pronajatém nebo státním bytě ohrožuje nás hromada rizik. Pojištění domácnosti se většinou vztahuje na 2 nejdůležitější z nich – riziko krádeže a riziko živelné pohromy.

Pojištění se vztahuje nejen na domácnost, jako na obal, ale i na věci, které jsou její součástí. Tyto věci však v pojistné smlouvě musí být přesně specifikovány. Pro uzavření pojistné smlouvy nebývá běžný znalecký odhad. Znalecký odhad je potřeba v případě, kdy si v rámci pojištění domácnosti chce pojistit např. velmi drahý obraz.

Pojištění kryje:

- krádeže a loupeže
- požár
- výbuch plynu
- úder blesku
- krupobití

- vichřice
- zemětřesení
- povodeň
- potopa
- záplavy, aj.

Výše pojistného závisí na:

- pojistná částka (celková hodnota domácnosti)
- velikost pojišťované plochy m^2
- lokalita (ve větších městech bývá pojistné dražší než v obcích)
- zvolená spoluúčast
- zabezpečení
- bezškodový průběh minulých let (využití převážně v havarijním pojištění)

Havarijní pojištění

Havarijní pojištění je na rozdíl od povinného ručení dobrovolné pojištění. Záleží na každém z nás, zda se toto pojištění rozhodneme. Pro motoristy, kteří vlastní hodně starý automobil by bylo havarijní pojištění zbytečné.

Havarijní pojištění kryje:

- havárií (škoda na vlastním motorovém vozidle, v případě, že viníkem havárie je vlastník pojištění)
- živelná nebezpečí
- náraz vozidla
- odcizení
- pojištění čelního skla
- zavazadel a věcí osobní potřeby, atd.

Výše pojistného závisí na:

- typ (značka vozidla)
- původ vozidla (domácí x zahraniční výroba)

- pořizovací cena vozidla, případně obvyklá cena vozidla (cena vozidla, za kterou by se vozidlo dalo pořídit v současnosti)
- zvolená rizika
- zvolená spoluúčast
- bezškodový průběh minulých let (sleva může dosáhnout až 50% z pojistného)

Tabulka 8: Základní ukazatele havarijního pojištění, [2 - výroční zpráva 2006]

Ukazatel (v tis.Kč)	2004	2005	2006
Předepsané pojistné	14 201 661	15 042 124	15 283 232
Pojistné plnění	9 417 224	9 251 558	9 706 240

Praktická ukázka 2: Výpočet havarijního pojištění

Modelový příklad na výpočet havarijního pojištění u 3 nejvýznamnějších českých pojišťoven. Já jako FO jsem vlastníkem automobilu Škoda Octavia, rok výroby 2005, uvedení do provozu nastalo 1.9.2005. Automobil používám výhradně k soukromým účelům. Automobil má pouze mechanické zabezpečení. Počet najetých km 285 000. Pojistná částka je na úrovni obvyklé ceny – 397600 Kč. Jako variantu pojištění jsem zvolila havárie a živel a spoluúčast ve výši 10%. Jaká je cena havarijního pojištění (v případě sjednání on-line).

Tabulka 9: Výpočty cen havarijního pojištění, [zdroj vlastní]

Pojišťovna	Cena havarijního pojištění (v Kč)
Česká pojišťovna	14 609
Uniqua	15 722
Allianz	19 318

Ceny havarijního pojištění u třech nejvýznamnějších českých pojišťoven se nějak významně neliší. I Přesto nejlevnější pojištění (v případě modelového případu) nabízí Česká pojišťovna.

Pojištění podnikatelských a průmyslových rizik

V rámci této skupiny pojištění lze uzavřít velkou řadu pojistných produktů. Tyto produkty kryjí rizika:

- živelná (povodeň, vichřice, záplava, krupobití, blesk, výbuch, aj.)
- technická (strojní pojištění, pojištění stavebních a montážních rizik)
- šomážní (přerušení provozu)
- odcizení, vandalství
- dopravní pojištění (poškození, zničení, krádež přepravované věci během její přepravy)

nabízené druhy pojištění:

- strojní pojištění
- pojištění elektronických zařízení
- pojištění znehodnocení zásob (v chladírnách a mrazírnách)
- pojištění transportu
- pojištění odpovědnosti za kontaminaci výrobku
- pojištění odpovědnosti za škody na životním prostředí
- pojištění ušlého zisku a stálých nákladů při přerušení provozu
- pojištění úvěru
- pojištění pohledávek, aj.

Pojištění zemědělských rizik

tento typ pojištění zahrnuje:

- pojištění hospodářských zvířat (nemoc, poranění, operace, porod nebo potrat, utracení zvířete z úředního příkazu, ztráta nebo odcizení zvířete)
- plodinové pojištění (živelné pohromy, finanční ztráty na produkci rostlinné výroby, které vznikly v důsledku působení celého souboru vlivů)
- pojištění lesů (poškození nebo zničení požárem, krupobití, záplavy, sesuv půdy)

Pojištění zemědělských rizik nabízejí tyto pojišťovny Allianz pojišťovna, a. s. , Česká pojišťovna a. s., Generali Pojišťovna a. s., Hasičská vzájemná pojišťovna, a. s., UNIQA pojišťovna, a. s.

3.2.3 Pojištění odpovědnostní

Toto pojištění se stává čím dál více oblíbenějším. Důvodem je uvědomění si, že nečekané ztráty nejen finančního charakteru nebo ztráty na zdraví, či ohrožení života někoho dalšího s sebou nese odpovědnost za škodu, kterou mu svým jednáním způsobíme. Pojištění obecně slouží ke krytí škod, které vznikly třetí osobě. Tyto škody jsou zákoně vymahatelné.

Odpovědností pojištění za škody při provozu motorového vozidla

Toto pojištění se běžně označuje jako povinné ručení. Sjednání si tohoto pojištění je základní povinností každého majitele motorového vozidla. Povinné ručení kryje škody způsobené provozem vozidla druhé osobě, rozhodně však nekryje škody způsobené na vlastním vozidle ani na zdraví řidiče.

Tabulka 10: Statistika pojištěných vozidel, [8]

Pojistitel	Počet registrací	
	k 31. 12. 2006	k 30. 6. 2007
Allianz pojišťovna	552786	554124
Česká podnikatelská pojišťovna	615673	662562
Česká pojišťovna	2303030	2238249
ČSOB Pojišťovna	274108	296128
Generali pojišťovna	377873	456611
Kooperativa Pojišťovna	1393058	1429076
Triglav pojišťovna	47985	67852
Uniqa pojišťovna	100177	120089
Wüstenrot pojišťovna	2528	16719
CELKEM	**5667218**	**5841410**

Minimální výše pojistného plnění je dána Zákonem č. 168/1999 Sb., o pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem motorového vozidla a to 35 mil Kč pro škodu na zdraví a 18 mil Kč pro škodu na majetku.

Zákonné pojištění odpovědnosti zaměstnavatele za škodu při pracovním úrazu, nebo nemoci z povolání

Zákonné pojištění se vztahuje na všechny zaměstnavatele, kteří zaměstnávají alespoň jednoho zaměstnance pro případ odpovědnosti za škodu způsobenou zaměstnanci při pracovním úrazu nebo nemoci z povolání.

Pojištění upravuje Vyhláškou Ministerstva financí č. 125/1993 Sb. ve znění pozdějších předpisů. Toto pojištění poskytují pouze dvě pojišťovny a to Česká pojišťovna a. s. a Kooperativa pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group (k 25.9. 2007)

Profesní odpovědností pojištění

Profesní odpovědnostní pojištění se týká oborů, u nichž hrozí riziko vzniku škody, která může snadno přesáhnout kapitál firmy.

Toto pojištění si ze zákona musí sjednat:

- advokáti
- stomatologové, lékaři, lékárníci
- veterinární lékaři
- notáři
- daňový poradci
- auditoři
- architekti
- právníci
- pojišťovací zprostředkovatelé

Pojištění odpovědnosti za výrobek
Pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou managementem
Pojištění odpovědnosti členů statutárních orgánů a dozorčích rad obchodních společností
Pojištění odpovědnosti k akcím
Pojištění odpovědnosti za škodu z výkonu práva myslivosti

3.2.4 Pojištění právní ochrany

Pojištění právní ochrany slouží pojištěnému v případě, že se z jakéhokoli důvodu dostanu do soudního sporu (ať už jako žalující, nebo žalovaný) nebo v souvislosti s právními úkony.

Pojištění kryje:

- soudní poplatky
- náklady na soudní znalce
- odměny advokátů a právních zástupců
- náklady na provedení výkonu rozhodnutí
- výdaje na cestování, aj.

Pojištění právní ochrany rodiny
Právní ochrana zaměstnance
Úrazové pojištění právní ochrany
Pojištění právní ochrany řidiče motorových vozidel
Právní ochrana podnikatelů
Právní ochrana nemovitosti

3.2.5 Cestovní pojištění

Celkový přehled Odvětví životních i neživotních pojištění naleznete v Příloze 2 tohoto dokumentu.

Tabulka 11: Vybrané ukazatelé neživotního pojištění za rok 2006, [4]

Ukazatele	Úrazové a zdravotní pojištění	Pojištění odpovědnosti z provozu motorových vozidel	Ostatní druhy pojištění motorových vozidel	Námořní, letecké a dopravní pojištění	Pojištění požáru a ostatních škod na majetku	Pojištění odpověd-nosti	Pojištění úvěrů a záruk	Pojištění pomoci, zákon-ných výdajů a ostatní pojištění pro případ finan. ztrát	Ostatní
Počet pojištěných osob	3 480 329	x	x	x	x	x	x	x	x
Počet pojištěných vozidel	x	5 511 463	1 290 709	x	x	x	x	x	x
Předepsané přímé hrubé pojistné	3 616	22 358	15 526	843	17 610	9 719	2 722	1 553	519
Náklady na pojistná plnění	953	12 649	9 903	296	9 112	2 341	-711	587	106

3.3 Stanovení pojistného v neživotním pojištění

Stanovení pojistného v neživotním pojištění je mnohem složitější proces, než je tomu u pojištění životního. Tato skutečnost je dána převážně tím, že životní pojištění se při výpočtech stanovení výšky pojistného opírá o věrohodnotné údaje rizikovosti z úmrtnostních tabulek. Oproti tomu rizikovost v neživotním pojištění lze jen velmi těžko odhadnout. Dále je u životního pojištění předem známa velikost pojistného plnění, ale u neživotního pojištění je dána pouze maximální možná hranice pojistného plnění.

Celkové pojistné v neživotním pojištění se stanovuje podle následující struktury:

netto pojistné

+ bezpečností přirážka

Rizikové pojistné

+ přirážka na provozní náklady

+ kalkulovaný zisk

Brutto pojistné

Základním stavebním kamenem, pro výpočet pojistného v neživotním pojištění, je znalost statistických údajů, které zachycují škodní vývoj a hospodaření pojišťovny za minulá období. Lze použít i statistické údaje jiné pojišťovny a to v případě, kdy pojišťovna nemá dostatek vlastních údajů (vstup nové pojišťovny na trh).

Statistické údaje se obvykle shromažďují pro jednotlivé druhy pojištění, tarifní skupiny a za jednotlivé kalendářní roky.

Relevantní údaje:

- počet pojištění v daném roce (počet pojistek)
- počet pojistných událostí (škod) v daném roce
- celková pojistná částka v daném roce (součet pojistných částek všech pojištění)
- celkové pojistné plnění (náhrada vzniklých škod) v daném roce
- nejvyšší pojistné plnění (maximální škoda) v daném roce
- celkové pojistné v daném roce

Z výše uvedených statistických údajů počítáme pro jednotlivé roky a tarifní skupiny následující ukazatele, které pojišťovny potřebují pro stanovení rizikového netto pojistného, bezpečnostní přirážky aj.

průměrná pojistná částka *PPČ = celková pojistná částka/počet pojištění*
průměrné pojistné plnění *PPP = celkové pojistné plnění/počet pojištění*
průměrná škoda *PŠ = celkové pojistné plnění/počet pojistných událostí*
škodní frekvence *ŠF = počet pojistných událostí/počet pojištění =* q_1
pojistná sazba *PS = celkové pojistné/celková pojistná částka*
škodní sazba *ŠS = celkové pojistné plnění/celková pojistná částka*
škodní kvóta (škodní průběh) *ŠK = celkové pojistné plnění/celkové pojistné*
škodní stupeň (škodní rozsah) *ŠS t= průměrná škoda/průměrná pojistná částka =* q_2.

3.3.1 Netto pojistné

Výpočet netto pojistného vychází z výše uvedených vzorců. Netto pojistné je takové pojistné, které pojišťovna vybere od klientů, ale výše tohoto pojistného vystačí pouze na pojistná plnění, ale nepokrývá další náklady pojišťovny (např. mzdy zaměstnanců, správní režie atd.)

Netto pojistné = škodní frekvence x škodní stupeň (3.2)

Praktická ukázka 3: Výpočet netto pojistného

Vypočtěte velikost netto pojistného na jednotkovou pojistnou částku v rámci určité tarifní skupiny neživotního pojištění, pokud známe následující informace:

- počet pojištění s pojistnou částkou 100.000 Kč je 100
- počet pojištění s pojistnou částkou 80.000 Kč je 1000
- počet pojištění s pojistnou částkou 50.000 Kč je 5000
- počet pojistných událostí s pojistným plněním ve výši 20.000 Kč je 15
- počet pojistných událostí s pojistným plněním ve výši 5.000 Kč je 70
- počet pojistných událostí s pojistným plněním ve výši 7.000 je 40

1. **škodní frekvence**

ŠF = počet pojistných událostí/počet pojištění = (15 + 70 + 40)/(100 + 1.000 + 5.000)
ŠF = 0,020492
Škodní frekvence pojistné události je tedy vypočtena na 2,1%

2. **škodní stupeň = PŠ/PPČ**

PŠ = celkové pojistné plnění/počet pojistných událostí
PŠ =(15 x 20.000 + 70 x 5.000 + 40 x 7.000)/(15 + 70 + 40)
PŠ = 7.440
Průměrná vzniklá škoda byla ve výši 7.440Kč.

PPČ = celková pojistná částka/počet pojištění
PPČ = (100 x 100.000 + 1.000 x 80.000 + 5.000 x 50.000)/(100 + 1.000 + 5.000)

PPČ=54.262,295

Průměrná pojistná částka činila 54.262,295Kč.

Škodní stupeň SŠt

SŠt = 7440/54262=0,137

Průměrná velikost pojistného plnění činí přibližně 14% z pojistné částky.

3. Stanovení netto pojistného

Netto pojistné = škodní frekvence x škodní stupeň

NP = 0,021 x 0,137

NP = 0,003

Netto pojistné by v rámci dané tarifní třídy činilo 0,3% z pojistné částky.

3.3.2 Rizikové pojistné

Rizikové pojistné se stanovuje jako netto pojistné + bezpečností přirážka. Rizikové pojistné je určeno k pokrytí výdajů pojišťovny i ke tvorbě rezerv. Bezpečností přirážka by měla krýt výkyvy ve škodním průběhu (výkyvy mohou být způsobeny odchylkami výpočtů od skutečnosti, nebo ekonomickými změnami daného produktu).

<u>Bezpečnostní přirážka</u>

Bezpečnostní přirážka se nejčastěji počítá jako směrodatná odchylka. Směrodatná odchylka se odhaduje na základě údajů z minulých ukazatelů škodní sazby.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \,, \tag{3.3}$$

kde x_i jsou úplné škodní sazby pro jednotlivé roky, $\bar{x}$ je průměr úplných škodních sazeb za tyto roky a n je počet let.

Rizikové pojistné se pak vypočítá jako rizikové netto pojistné + n-násobek bezpečností přirážky.

3.3.3 Brutto pojistné

Brutto pojistné je konečné pojistné, které klient zaplatí pojišťovně. Toto pojistné kryje náklady na pojistná plnění zvýšené o n-násobek bezpečnostní přirážky, dále kryje správní náklady pojišťovny i její kalkulovaný zisk.

Správní náklady

Správní náklady pojišťoven jsou představovány náklady spojenými jednak se správou jednotlivých pojistných smluv a jednak náklady spojenými s provozem pojišťovny, tzn. náklady mzdové (nejvýznamnější část těchto nákladů tvoří náklady spojené s provizemi za pojištění), materiálové, finanční apod.,

- správní náklady závislé na výši pojistné částky nebo pojistného
- správní náklady nezávislé na výši pojistné částky nebo pojistného. [9, str. 55]

Kalkulovaný zisk

Kalkulovaný zisk si každá pojišťovna stanovuje individuálně. Do jisté míry odráží situaci na trhu.

Brutto pojistné pak vypočítáme ze vztahu:

$$P_b = \frac{P_n \cdot (1 + r_s + z_p)}{1 - \gamma}. \tag{3.4}$$

Praktická ukázka 4: Výpočet rizikového pojistného

Pojistné plnění je nutné vyplatit v 1 případu z 200 smluv. Průměrná škoda na jednu pojistnou událost stejného typu je 100 000 Kč. Vypočtěte výši pojistného.

1. škodní frekvence (frekvence pojistného plnění)

ŠF = počet pojistných událostí/počet pojištění = 1/200

ŠF = 0,005

Pravděpodobnost nastání pojistné události je tedy vypočtena na 0,5%

2. výše pojistného

P = 100.000 x 0,005 = 500

Pokud bude od každého pojištěného vybráno pojistné plnění ve výši 500Kč, postačí to výplatu jednoho pojistného plnění ve výši 100.000 Kč.

3. škodní rozsah

Průměrná škoda je 70.000 Kč, pojištěná hodnota je 100.000 Kč.

Škodní rozsah = poměr mezi skutečnou škodou a pojištěnou hodnotou.

ŠR = 70.000/100.000 = 0,7

4. netto pojistné

NP = ŠF x ŠR x PČ

NP = 0,005 x 0,7 x 100.00

NP = 350

Netto pojistné pojišťovna spočetla ve výši 350 Kč.

5. stanovení bezpečnostní přirážky

Pojišťovna si stanovila bezpečnostní přirážku jako 20% rizikového netto pojistného.

BP = 350 x 0,2

BP = 70

Bezpečnostní přirážka je stanovena na 70 Kč.

6. Rizikové pojistné

Rizikové pojistné se stanovuje jako součet rizikového netto pojistného a bezpečnostní přirážky.

RP = NP + BP

NP = 420 Kč

7. Brutto pojistné

Správní náklady a zisk činí 5% z RP

BP = 420 x 1,05

BP = 441Kč

Celkové pojistné předepsané k úhradě činí 441 Kč.

4 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

Pojistná matematika se dlouhou dobu omezovala na jednoduché deterministické modely a elementární aritmetické operace finanční matematiky, které dodnes tvoří klasické jádro matematiky životního pojištění. Teprve počínaje 20. stoletím díky průkopnickým pracem Lundberga a později Craméra v teoretické oblasti a vzhledem k praktickému rozvoji neživotního pojištění se začínají v pojistné matematice používat pokročilé metody teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky a v menší míře také některé partie a techniky operačního výzkumu, teorie užitku, teorie rozhodování atd. Výsledkem tohoto vývoje, ke kterému také přispěl v roce 1957 vznik mezinárodní organizace pojistných matematiků ASTIN (Acturial Studies in Nonlife Insurance), je vznik tzv. Teorie rizika, která dnes představuje abstraktní základ moderní pojistné matematiky. Teorie rizika se většinou dává do souvislosti s neživotním pojištěním.

Pokud se vyšetřuje nějaké riziko izolovaně bez ohledu na kolektiv, z kterého bylo vybráno, mluví se někdy o tzv. individuálním riziku.

Matematické modelování v neživotním pojištění je součástí matematické disciplíny, označované jako teorie rizika a zahrnující rovněž finanční riziko. Mezi hlavní důvody, které motivují snahu o matematické modelování pojistných jevů, patří následující:

- model může nahradit nedostatečný počet dat (u začínajících pojišťoven, v případě špatné předchozí evidence dat apod.),
- často pomocí jednoduchým matematických vztahů s malým počtem parametrů či jiných matematických atributů lze popsat chování rozsáhlých pojistných kmenů,
- lze statisticky testovat vlastnosti pojistných kmenů aj**.** [10, str. 351]

Pojištění v podstatě znamená přenos rizik na pojišťovnu (jako na instituci specializovanou k přebírání rizik). Pojišťovatel musí k přebíraným rizikům zaujmout velice zodpovědný postoj. Pojistitelé jsou při své činnosti vystaveni působení celé řady rizik, zejména se jedná o pojistně technická rizika, která s sebou nesou nebezpečí, že vnikne záporný rozdíl mezi přijatým pojistným a vyplaceným pojistným plněním.

Existence pojistě technického rizika je dána skutečností, že pojišťovny pracují s nahodilostí a náhodnými proměnnými:

- **N** – počet pojistných škod v určitém období (nejčastěji kalendářní rok), též počet pojistných plnění – diskrétní náhodná proměnná
- **X** – výška individuálního pojistného plnění, z jednotlivých smluv v určitém portfoliu pojistek – spojitá náhodná proměnná
- **S** – celkové pojistné plnění za určité časové období (za 1 kalendářní rok), při určitém pojistném produktu

4.1 Celkové škody

Celková výše škody v individuálním škodním nároků odpovídá jednotlivým pojistným smlouvám z pojistného kmene, tvořeného i počtem smluv.

4.1.1 Individuální model rizika

V individuální teorii rizika modelujeme: písmenem S_n označíme výšku pojistného plnění z portfolia n individuálních rizik, potom S_n (nezávislé, nemají identické rozdělení pravděpodobnosti) vyjadřujeme ve tvaru:

$$Sn = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n, \tag{4.1}$$

kde X_i, i = 1, 2, …, n, kde i značí výšku pojistného plnění při i-té pojistce z celkového portfolia n pojistek (známých a pevně daných na začátku zkoumaného období). Předpokládáme, že rizika X_i jsou vzájemně nezávislé náhodné proměnné (nemusí být vždy identicky rozdělené).

Výška pojistného plnění je většinou reprezentována:

$$X_i = I_i * B_{i,} \tag{4.2}$$

kde náhodné proměnné $I_1, I_2, \ldots, I_n$ a $B_1, B_2, \ldots B_n$ jsou vzájemně nezávislé.

Náhodná proměnná (indikátor) I_i uvádí, jestli při i-té pojistce nastala pojistná událost z i-tého rizika. Je tedy zřejmé, že pojistná událost ve sledovaném období buď nastane, $I_i = 1$ nebo nenastane $I_i = 0$. Z těchto vztahů můžeme definovat pravděpodobnost pojistné události pro i-té riziko q_i.

$$q_i = P(I_i = 1) \quad \textbf{nebo} \quad 1 - q_i = P(I_i = 0) \tag{4.3}$$

Podmínka, že při každém individuálním riziku může být maximálně 1 pojistná událost je značně omezující. Tato podmínka je běžně splněna při různých typech životního pojištění, vylučuje však aplikaci individuálních modelů rizika při určitých typech neživotního pojištění: havarijní pojištění motorových vozidel, úrazové pojištění atd.

Náhodná proměnná B_i může mít libovolné rozdělení a představuje velikost pojistného plnění vzhledem k i-té pojistce, jestliže pojistné plnění bylo vyplaceno.

4.1.2 Kolektivní model rizika

Jestliže označíme písmenem N počet pojistných plnění za celé portfolio pojišťovny v daném období, písmenem X_i výšku i-tého pojistného plnění pro i = 1, 2, …, N tak:

$$\mathbf{S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N} \tag{4.4}$$

Představuje celkovou (agregovanou) sumu pojistných plnění, tzv. kolektivní riziko pojišťovny po čas uvažovaného období, nejčastěji kalendářního roku.

- $X_1, X_2, \ldots X_N$ jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné,
- náhodné proměnné N, $X_1, X_2, \ldots X_N$ jsou vzájemně nezávislé,
- jestliže N = 0, tak i S = 0.

Prvním krokem při určování rozdělení S je vyjádření náhodné proměnné S pomocí náhodné proměnné N (počtu pojistných plnění) po čas roku a náhodných proměnných X_i (výška pojistného plnění při i-té pojistné události).

Celkový počet pojistných plnění přitom nezávisí od výšky individuálních plnění a výška individuálního plnění není ovlivněna ani počtem, ani výškou ostatních pojistných plnění. Přitom rozdělení výšky individuálních pojistných plnění se ve sledovaném roce nemění. [11, str. 105]

4.2 Rozdělení pravděpodobnosti v pojišťovnictví

Analýza praktického problému v rámci teorie rizika většinou začíná vyšetřováním pravděpodobnostního rozdělení pojistných nároků $X_{i,}$. Vzhledem k velkému praktickému významu pro pojistitele se zároveň vyšetřuje pravděpodobnostní rozdělení agregovaných škod.

$$S = \sum_{i=1}^{N} Xi , \tag{4.5}$$

kde N je počet škod, teda náhodná veličina nabývající celých nezáporných hodnot. Pro N = 0 $\rightarrow$ S = 0. Náhodné součty náhodných veličit se uplatňují především v souvislosti s celkovými pojistnými nároky do času t v procesech rizika.

Základní vztahy pro náhodnou veličinu X

Protože pojistná plnění X_i jsou identicky rozdělená, můžeme jej označit společným symbolem X. Pro jejich základní charakteristiky platí:

Střední hodnota	E(X),
Rozptyl	$var(X) = E[X-E(X)]^2 = E(X)^2 – [E(X)]^2$,
Směrodatná odchylka	$\sigma(X) = (varX)^{1/2}$,
Variační koeficient	$v(X) = \sigma(X)/\lvert E(X) \rvert$,
Koeficient šikmosti	$\gamma_3(X) = E[X-E(X)]^3/(varX)^{3/2}$,
Koeficient špičatosti	$\gamma_4(X) = E[X-E(X)]^4/(varX)^2$.

4.3 Modely výše škod

Individuální pojistné plnění při více typech neživotních pojištění mají některé společné vlastnosti – většina z nich má hodnotu nižší než průměrné pojistné plnění, přitom jsou však dost pravděpodobné i extrémně vysoká pojistná plnění, což způsobuje velký rozptyl a pravostranné zešikmení těchto rozdělení.

Tyto vlastnosti vedou k předpokladu, že jako rozdělení pravděpodobnosti individuálních pojistných plnění můžou sloužit některé z pravostranných (pozitivně) zešikmených spojitých rozdělení. [11, str. 55]

V následující části uvedeme nejznámější rozdělení pravděpodobnosti:

- Exponenciální rozdělení
- Gama rozdělení
- Weibullovo rozdělení
- Lognormální rozdělení
- Paretovo rozdělení

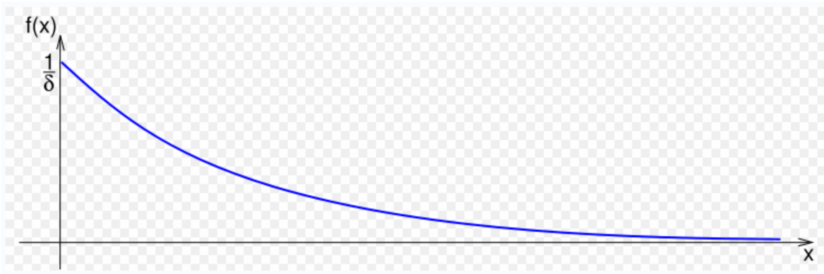
ke každému z uvedených rozdělení uvedeme hustotu pravděpodobnosti f(x), distribuční funkci F(x), momentovou vytvářející funkci $M_X(z)$, základní charakteristiky a z nich vyplývající vlastnosti. U některých z rozdělení uvedeme i vyjádření pravděpodobnosti P(X>x) intervalu nejvyšších možných hodnot individuálních pojistných plnění X.

- symbol X označuje náhodnou veličinu s tímto rozdělením, F(x) její distribuční funkci a f(x) hustotu pravděpodobnosti
- distribuční funkce $F(x) = P(X \le x) = p$
- hustota pravděpodobnosti $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

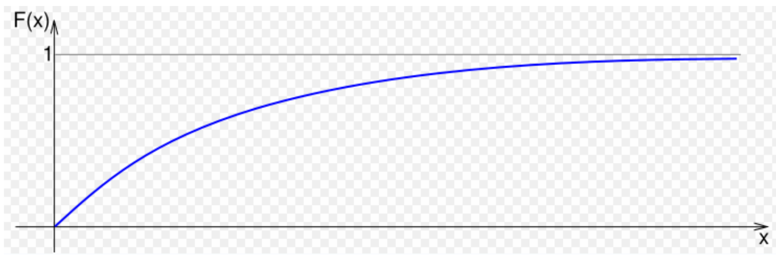
4.3.1 Exponenciální rozdělení (4.6)

Exp (λ), λ > 0

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$
$$P(X \succ x) = 1 - F(x) = -e^{-\lambda x} = \exp(-\lambda x)$$
$$EX = 1/\lambda$$
$$DX = 1/\lambda^2$$
$$\text{var}\, X = 1/\lambda^2$$
$$\gamma_3(x) = 2$$
$$m_x(z) = \lambda/(\lambda - z), z \prec \lambda$$



Obrázek 4: Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení, [12]



Obrázek 5: Distribuční funkce exponenciálního rozdělení, [12]

Exponenciální rozdělení Exp (λ) nemůžeme v praxi dost dobře využít, protože nedokonale modeluje nejnižší a nejvyšší hodnoty

Pravděpodobnost pravé strany rozdělení Exp (λ) velmi rychle konverguje k nule exponenciálně podél x – příliš rychle pro vysoké hodnoty pojistného plnění. Z toho důvodu je prakticky nemožné odhadnout pomocí exponenciálního modelu pojistná plnění velmi vysokých pojistných plnění. Tato znalost je pro pojišťovnu velmi, až životně důležitá.

Praktická ukázka 5: Příklad exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti

Při pojištění domácnosti mají pojistná plnění X exponenciální rozdělení. Střední hodnota je 18.100 Kč. Zjistíme pravděpodobnost těchto intervalů výšky pojistných plnění.

a) **P(X<2000)**

$$P(X \prec 2000) = F(2000) = 1 - e^{\frac{-2000}{18100}} = 0{,}1046$$

Pravděpodobnost, že pojistná plnění budou nižší než 2.000 Kč je 0,104.

b) **P(10000 < X < 30000)**

$$P(10000 \prec X \prec 30000) = F(30000) - F(10000) = e^{\frac{-10000}{18100}} - e^{\frac{-30000}{18100}} = 0{,}575517 - 0{,}19062 = 0{,}38489$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění bude v intervalu 10000 – 30000 Kč je 0,38.

c) **P(X > 40000)**

$$P(X \succ 40000) = e^{\frac{-40000}{18100}} = 0{,}1097$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění přesáhne částku 40.000 Kč je 0,1.

4.3.2 Gama rozdělení (4.7)

Γ(a,b), a > 0, b > 0

$$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax}, x \geq 0$$

$$EX = b/a$$

$$\operatorname{var} X = b/a^2$$

$$\gamma_3(x) = 2/\sqrt{b}$$

$$m_X(z) = \left(\frac{a}{a-z}\right)^b, z \prec a$$

Rozdělení $\Gamma(\lambda, 1)$ je totožné s rozdělením Exp (λ). Je-li parametr b přirozené číslo, pak se Γ(a,b) nazývá Erlangovo rozdělení. Také toto rozdělení se používá jako rozdělení výše pojistných nároků. V této souvislosti se používá transformace logaritmicko-gamma rozdělení LΓ(a,b,c), a > 0, b > 0, c > 0, jehož hustota má tvar:

$$f(x) = \frac{a^b}{c\Gamma(b)}\left[\log(x/c)\right]^{b-1}(x/c)^{-a-1}, x \succ c \tag{4.8}$$

Gamma rozdělení je flexibilnější než exponenciální rozdělení, přesto také příliš přesně neodhaduje pravděpodobnost vysokých pojistných plnění. Je vhodné pro modelování výšky pojistných plnění např.v havarijním pojištění, neboť variabilita výšky pojistných plnění není tak vysoká a různorodá jako o jiných typů pojištění.

4.3.3 Weibullovo rozdělení (4.9)

W(a,b), a > 0, b > 0

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, x \succ 0$$

$$EX = a^{-1/b}\Gamma(1/b+1)$$

$$\operatorname{var} X = a^{-2/b}\left\{\Gamma(2/b+1) - \left[\Gamma(1/b+1)\right]^2\right\}$$

Rozdělení W(λ,1) je totožné s rozdělením Exp (λ). Rozdělení W(a, 2) se nazývá Rayleighovo rozdělení. Weibullovo rozdělení se používá jako rozdělení doby životnosti různých druhů zařízení. Weibullovo rozdělení přesně vystihuje pravděpodobnost velmi vysokých pojistných plnění.

4.3.4 Logaritmicko-normální rozdělení (Lognormální rozdělení) (4.10)

LN(μ, σ^2), - ∞ < μ < ∞, σ > 0

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], x \succ 0$$

$$EX = e^{\mu + 1/2\sigma^2}$$

$$\operatorname{var} X = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Rozdělení LN (μ, σ^2) má náhodná veličina X = e^y , kde Y ≈ N(μ, σ^2). Toto rozdělení se často používá jako rozdělení výše pojistných nároků v neživotním pojištění.

$$E(X^k) = E(e^{kY}) = M_y(z = k) = e^{k\mu + \frac{\sigma^2}{2}k^2} \qquad (4.11)$$

Výhodou tohoto rozdělení pravděpodobnosti je fakt, že ze vztahu 4.11 můžeme vyjádřit všechny uvedené charakteristiky rozdělení LN(μ, σ^2)

4.3.5 Cauchyovo rozdělení (4.12)

C(a, b) - ∞ < a < ∞, b > 0

Cauchyovo rozdělení je vhodné pro modelování situací s odlehlými pozorováními.

4.3.6 Paretovo rozdělení (4.13)

$Pa(\alpha, \lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\lambda^{\alpha},}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}\, pro x \succ 0, \alpha \succ 0, \lambda \succ 0 \\ 0\, pro x \leq 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}, x \geq a$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \alpha \succ 1$$

$$\operatorname{var} X = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha \succ 2$$

$$\gamma_3(X) = \frac{2\sqrt{\alpha-2}(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha}(\alpha-3)}, \alpha \succ 3$$

Paretovo rozdělení se používá jako rozdělení pojistných nároků hlavně v situaci odlehlých hodnot (např. v nemocenském pojištění). Paretovo rozdělení je pro modelování v pojišťovnictví nejlepší, protože velmi pomalu konverguje k ose x.

Praktická ukázka 6: Příklad Paretova rozdělení pravděpodobnosti

Výška pojistných plnění v 1000 peněžních jednotek (p.j.) při pojištění proti požáru má Paretovo rozdělení pravděpodobností P(α, λ), přičemž α=2,8 a λ=1800. Chceme zjistit pravděpodobnost intervalů.

a) P(X< 5500)

$$P(X \prec 5500) = F(5500) = 1 - \left(\frac{1800}{1800 + 5500} \right)^{2,8} = 1 - 0{,}0198 = 0{,}98$$

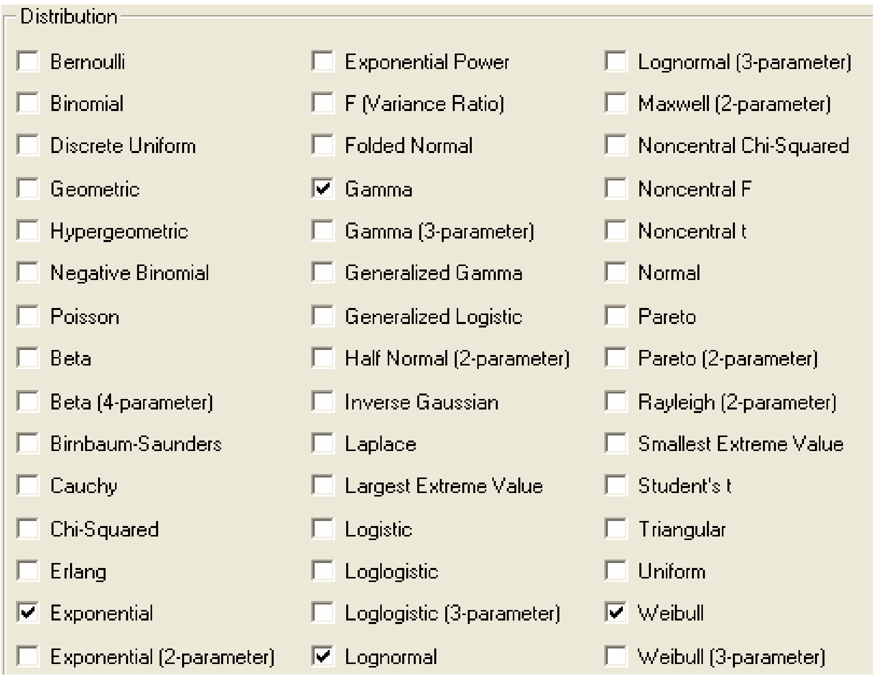
Pravděpodobnost, že pojistné plnění při požáru bude nižší jak 550 000 je 0,98.

b) P(15000 < X < 20000)

$$P(1500 \prec X \prec 3000) = F(3000) - F(1500) = 1 - 0{,}0641 - 1 - 0{,}1831 = 0{,}9359 - 0{,}8169 = 0{,}119$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění bude od 1500 do 3000 je přibližně 0,12.

Kromě uvedených pravděpodobnostních rozdělení se v konkrétních situacích používají i různá speciální rozdělení. Zatím jsme uváděli rozdělení pravděpodobnosti, které mají jeden nebo dva parametry. Existují ale i rozdělení, které mají tři parametry. Přehled můžeme vidět na Obrázku 6, kde jsou uvedena základní i méně známá rozdělení pravděpodobnosti včetně počtu jejich parametrů.



Obrázek 6: Rozdělení pravděpodobnosti využívající statistický program Stagraphics Centurio, [zdroj vlastní]

Čím více má rozdělení parametrů, tím více je flexibilnější, ale zároveň složitější na použití. Tyto rozdělení pravděpodobnosti se třemi parametry jsou důležitá hlavně pro posunutá rozdělení. To znamená, že grafy těchto rozdělení nemají počátek v hodnotě 0, ale jsou posunuté do hodnoty, která je větší než 0.

4.4 Odhady parametrů

Tvar každého pravděpodobnostního rozdělení závisí od jednoho, případně více jeho parametrů. Určení těchto parametrů je prvním závažným problémem při hledání vhodného pravděpodobnostního modelu počtu a výšky pojistných plnění. Parametry určujeme na základě neúplných informací = případ statistické indukce – odhad parametrů rozdělení.

K odhadu parametrů pravděpodobnostních rozdělení se nejčastěji využívá metoda momentů, metoda maximální věrohodnosti, metoda kvantilů a bayesovský odhad. K odhadům parametrů je nejjednodušší použít metodu maximální věrohodnosti, kterou lze aplikovat v mnoha situacích.

4.4.1 Metoda maximální věrohodnosti

Pravděpodobně nejpoužívanější metodou určování bodových odhadů je metoda maximální věrohodnosti. Bodové odhady získané touto metodou mají velmi dobré vlastnosti v porovnání s ostatními metodami. Jedinou nevýhodou této metody je, že čím větší je rozsah výběrových souborů, tím horší jsou vlastnosti bodových odhadů.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je vektor n nezávislých náhodných pozorování ze základního souboru $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta})$, kde $\boldsymbol{\Theta}' = (\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_p)$ je vektor p neznámých parametrů. Při daných hodnotách x_i, kde i = 1,…n závisí pouze na parametru Θ .

funkce věrohodnosti: $L(x,\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\Theta)$ (likelihood) (4.14)

obvykle je jednodušší místo funkce věrohodnosti použít její přirozený logaritmus (protože ln L $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta})$ je prostá a rostoucí funkce L$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta})$ maximum se nezmění).

přirozený logaritmus: $l(\Theta, x) = \ln L(x, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta)$ (4.15)

vlastnosti bodových odhadů:

- asymptoticky nevychýlený odhad
- konzistentní odhad
- má asymptoticky normální rozdělení
- nezkreslený
- efektivní
- invariantní

Praktická ukázka 7: Odhad parametrů exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti metodou maximální věrohodnosti

Pomocí metody maximální věrohodnosti odhadněme parametr λ exponenciálního rozdělení. Nechť x_1, x_2,…, x_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení Exp(λ) s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. dosadíme do funkce věrohodnosti $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i\%1}^{n} xi}$

2. zlogaritmujeme $l(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} xi$

3. určíme maximální l(λ) – vypočteme derivaci zlogaritmované fce podle λ a položíme rovno 0

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

4. vztah pro maximálně věrohodný odhad λ´ $\lambda' = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{x}$

5. $\Theta' = \frac{1}{\lambda'} = \overline{x}$

Praktická ukázka 8: Odhad parametrů paretova rozdělení pravděpodobnosti metodou maximální věrohodnosti

Pomocí metody maximální věrohodnosti odhadněte parametry λ, α Paterova rozdělení pravděpodobnosti. P(α,λ).

1. dosadíme do funkce věrohodnosti $L(\alpha, \lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}}$

2. zlogaritmujeme $l(\alpha, \lambda; x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \alpha + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1)\ln(\lambda + x_i)\right]$

3. vypočteme derivaci zlogaritmované fce podle α a položíme rovno 0

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda + x_i) = 0$$

4. vztah pro maximálně věrohodný odhad

$$A = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})} \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} \qquad B - A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})} \tag{4.16}$$

4.4.2 Metoda momentů

Tato metoda patří mezi nejstarší a nejčastěji používané metody bodových odhadů. Používá se zejména tehdy, když jsou jiné metody odhadu numericky náročnější. Nevýhodou této metody je, že získané výsledky nemají kvalitní ohodnocení. Princip metody momentů spočívá v tom, že momenty odhadujeme odpovídajícími výběrovými momenty (aritmetický průměr a disperze)

Paretovo rozdělení:

$$\frac{\lambda}{\alpha - 1} = \bar{x} \qquad \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} = S^2 \qquad \tilde{\alpha} = \frac{2S^2}{S^2 - \bar{x}^2} \qquad \tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1) * \bar{x} \tag{4.17}$$

Gama rozdělení:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \bar{x} \qquad \frac{\alpha}{\beta^2} = S^2 \qquad \tilde{\beta} = \frac{\bar{x}}{S^2} \qquad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{S^2} \tag{4.18}$$

4.4.3 Metoda kvantilů

Metoda kvantilů je vhodná pro stanovení subjektivní pravděpodobnosti v případe, že počet možných situací, které mohou nastat, je vysoký, popř. nekonečný. Pro konstrukci potřebujeme znát dolní a horní kvantil q_k (při odhadech dvou parametrů), prostý medián (odhad jednoho parametru) a distribuční funkci daného rozdělení.

Praktická ukázka 9: Odhad parametru Exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti metodou kvantilů

Výška pojistného plnění při pojištění domácnosti má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti, Exp $(\lambda = \frac{1}{35000})$. Určete parametr λ. metodou kvantilů.

$$1 - e^{-\lambda * q50} = 0{,}5$$
$$0{,}5 = e^{\lambda * q50}$$
$$\ln 0{,}5 = \lambda * q50$$
$$\lambda = \frac{\ln 0{,}5}{q50}$$

Program MS Excel nabízí řadu spojitých rozdělení, u kterých uvádí název příslušné funkce pro výpočet distribuční funkce, hustoty a kvantitu. Bohužel, pouze 4 z nabízených rozdělení mají uveden vzorec pro výpočet hustoty a u Exponenciálního a Weibullova rozdělení nenabízí ani funkce pro výpočet kvantitu. Přesný přehled viz následující Tabulka 11

Tabulka 12: Přehled spojitých rozdělení v programu MS Excel, [zdroj vlastní]

Rozdělení	Distribuční funkce	Hustota	Kvantily
Normální	Normdist	Normdist	Norminv
Normované normální	Normsdist	Ne	Normsinv
Logaritmicko normální	Lognormdist	Ne	Loginv
Exponenciální	Expondist	Expondist	Ne
Weibullovo	Weibull	Ne	Ne
Studentovo (t)	Tdist	Ne	Tinv
Fischer-Schnedecorovo (F)	Fdist	Ne	Finv
Chí-kvadrát	Chidist	Ne	Chiinv
Beta	Betadist	Ne	Betainv
Gama	Gammadist	Gammadist	Gammainv

Praktická ukázka 10: Odhady parametrů

Při pojištění krádeže kola známe 20 posledních hodnot individuálních pojistných plnění.

Tabulka 13: Hodnoty pojistných plnění, praktická ukázka 10, [zdroj vlastní]

465	1235	148	658	4895	458	456	12574	231	12
1598	2654	2014	1000	2560	4589	8452	3215	785	8256

Ze známých hodnot vypočteme výběrové charakteristiky

- výběrový průměr $\overline{x} = 2812{,}75$
- výběrový rozptyl $S^2 = 11543111$
- směrodatná odchylka $S = 3397{,}515$
- variační koeficient $Vk = 1{,}207$

a) metodou momentů odhadněme parametr rozdělení individuálních pojistných plnění za předpokladu exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \succ 0$$

Odhadujeme parametr λ exponenciálního rozdělení metodou momentů

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{2812{,}75} = 0{,}000356 = 3{,}56 * 10^{-4}$$

Parametr λ exponenciálního rozdělení má hodnotu 0,000356.

b) odhadněme parametry α a λ Paterova rozdělení pravděpodobnosti (metodou momentů) vycházíme ze základních rovnic (4.17):

Dosadíme do rovnic:

$$\frac{\lambda}{\alpha - 1} = 2812{,}75 \qquad \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = 11543111$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{2S^2}{S^2 - \bar{x}^2} = \frac{2 * 11543111}{11543111 - 2812{,}75^2} = 6{,}35713$$

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1) * \bar{x} = (8{,}38 - 1) * 2812{,}75 = 15068{,}27$$

c) Metodou momentů odhadněte parametry Gama rozdělení

G(α;β)

$$\tilde{\beta} = \frac{\bar{x}}{S^2} = \frac{2812{,}75}{11543111} = 0{,}000243673$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{S^2} = \frac{2812{,}75^2}{11543111} = 0{,}685392603$$

d) pomocí programu Microsoft Excel vypočtěme maximálně věrohodný odhad parametrů λ, α (Paterova rozdělení pravděpodobnosti)

při výpočtech použijeme hodnoty ze případu b) λ = 15068,27, α = 6,35713

Dosadíme do vztahů (4.16):

$$A = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})} = 6{,}395167 \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} = 6{,}476008$$

$$B - A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{x_i}{\lambda})} = -0{,}08084$$

Tabulka 14: Výpočet maximálně věrohodných odhadů praktická ukázka 10 , [zdroj vlastní]

pojistné plnění (xi)	1+ (xi/λ)	ln(1+xi/λ)	1/λ+xi	xi/λ (λ+xi)
465	1,030859555	0,030393	6,438E-05	1,99E-06
1235	1,081960325	0,078775	6,134E-05	5,03E-06
148	1,009821966	0,009774	6,572E-05	6,45E-07
658	1,04366793	0,042741	6,359E-05	2,78E-06
4895	1,32485489	0,281303	5,009E-05	1,63E-05
458	1,030395003	0,029942	6,441E-05	1,96E-06
456	1,030262274	0,029813	6,442E-05	1,95E-06
12574	1,834468925	0,606755	3,618E-05	3,02E-05
231	1,015330231	0,015214	6,536E-05	1E-06
12	1,000796376	0,000796	6,631E-05	5,28E-08
1598	1,106050687	0,100796	6E-05	6,36E-06
2654	1,176131742	0,162231	5,643E-05	9,94E-06
2014	1,133658376	0,12545	5,854E-05	7,82E-06
1000	1,066364635	0,064255	6,223E-05	4,13E-06
2560	1,169893466	0,156913	5,673E-05	9,64E-06
4589	1,304547312	0,265856	5,087E-05	1,55E-05
8452	1,560913898	0,445271	4,252E-05	2,38E-05
3215	1,213362303	0,193395	5,469E-05	1,17E-05
785	1,052096239	0,050785	6,308E-05	3,29E-06
8256	1,547906429	0,436903	4,287E-05	2,35E-05
56255		**3,127362**	**0,0011498**	**0,000178**

Protože musí platit B-A = 0, využijeme v programu Excel funkce nástroje – hledání řešení. Nastavená buňka je buňka ve které jsme vypočítali rozdíl B-A (dáno vzorcem), cílová hodnota nastavíme 0, měněná buňka je původní λ (dáno hodnotou). Hledáme takové λ, aby rozdíl B-A=0. Tím dostaneme maximálně věrohodný odhad parametrů:

$$\tilde{\lambda} = 5971,163$$

$$\tilde{\alpha} = 6,35713$$

Vytvořený příklad v programu Excel najdete v Příloze 3 tohoto dokumentu.

4.5 Testy dobré shody

Test dobré shody je metodou matematické statistiky, která umožňuje ověřit, zda má náhodná veličina určité předem dané rozdělení pravděpodobnosti. Takové rozdělení může být dáno včetně parametrů, nebo s neznámými parametry.

Postup:

- máme náhodný výběr a navrhneme předpokládaný typ rozdělení pravděpodobnosti
- odhadneme parametry předpokládaného rozdělení
- ověříme vhodnost předpokládaného rozdělení s odhadnutými parametry pomocí vybraného testu shody

4.5.1 Pearsonův χ2 – test dobré shody

χ2 – test slouží k ověření shody skutečného rozdělení pravděpodobnosti základního souboru s námi předpokládaným rozdělením s hustotou pravděpodobnosti, kde Θ je vektor parametrů (srovnání empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti).

Nechť x_1, x_2,…, x_n jsou empirické údaje náhodné proměnné X, zjištěné náhodným výběrem a roztříděné do k skupin s četností O_1, O_2,…, O_k

H0: náhodná proměnná X má dané rozdělení pravděpodobnosti s hustotou f (x;Θ)

Testovací kritérium: $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (4.19)$$

Toto testovací kritérium je založeno na srovnání skutečných (O_i) a teoretických (E_i) četností všech tříd.

χ2 – rozdělení je s počtem stupňů volnosti k-1-p, kde p je počet parametrů předpokládaného rozdělení pravděpodobnosti a k je počet tříd (počet intervalů)

Přijmutí H0: $\chi^2 \prec \chi^2_{1-\alpha}$ [11, str. 78]

Praktická ukázka 11: Příklad χ2 – test

V pobočce pojišťovny ověřujeme, zda počet pojistných událostí nahlášených během jednoho dne má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti. Hypotézu ověřujeme na hladině významnosti 5 %.

Tabulka 15: Data k praktické ukázce 11.: Počet nahlášených pojistných událostí, [zdroj vlastní]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 a více
ni	79	188	282	275	196	114	45	10	7	3	1	0

1. Formulujeme H0: Počet pojistných událostí v jednotlivých dnech má Poissonovo rozdělení a alternativní hypotézu H1: Počet pojistných událostí v jednotlivých dnech nemá Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti.

2. Vypočteme neznámý parametr λ a odhadneme jej jako vážený výběrový průměr.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{1200}(79 \cdot 0 + 188 \cdot 1 + \cdots + 0 \cdot 11) = \frac{3364}{1200} = 2{,}80.$$

3. Při hodnotě parametru λ = 2,8 vypočítáme postupně pravděpodobnosti.

Tabulka 16: Výpočet pravděpodobností k praktické ukázce 11., [zdroj vlastní]

Kategorie	Počet nahlášených PU	Pozorovaná četnost	Pravděpodobnost	Očekávaná četnost	Četnost
i	x_i	n_i	πi	$n\pi_i$	$x_i * n_i$
1	0	79	0,923670886	72,97	0
2	1	188	1,086808511	204,32	188
3	2	282	1,014361702	286,05	564
4	3	275	0,970836364	266,98	825
5	4	196	0,953520408	186,89	784
6	5	114	0,918070175	104,66	570
7	6	45	1,085333333	48,84	270
8	7	10	1,954	19,54	70
9	8	7	0,977142857	6,84	56
10	9	3	0,71	2,13	27
11	10	1	0,78	0,78	10
12	11 a více	0	0	0	0
Celkem		**1200**	**1**	**1200**	**3364**

4. Vzhledem k tomu, že krajní očekávané četnosti jsou menší než 5, spojíme okrajové třídy

Tabulka 17: Spojení tříd k praktické ukázce 11., [zdroj vlastní]

Kategorie	Počet nahlášených PU	Pozorovaná četnost	Pravděpodobnost	Očekávaná četnost
i	x_i	n_i	πi	$n\pi_i$
1	0	79	0,923670886	72,97
2	1	188	1,086808511	204,32
3	2	282	1,014361702	286,05
4	3	275	0,970836364	266,98
5	4	196	0,953520408	186,89
6	5	114	0,918070175	104,66
7	6	45	1,085333333	48,84
8	7	10	1,954	19,54
9	8 a více	11	0,886363636	9,75
Celkem		**1200**	**1**	**1200**

5. Dle vzorce 4.19. vypočteme hodnotu testovacího kritéria, která je 8,50

6. Počet stupňů volnosti df = k – m – 1, kde k = 9 (počet kategorií), m = 1 (počet parametrů), df = 7

7. Kritická hodnota pro 7 stupňů volnosti a 5% hladinu významnosti je 14,07 (viz příloha č. 4)

8. Protože testová statistika $\chi^2 = 8,5 < 14,07$ přijímáme hypotézu H0

4.5.2 Kolmorgorovův – Smirnovův test

Test je založen na porovnání rozdílů mezi distribuční funkcí ověřovaného a výběrového rozdělení pravděpodobností.

Nechť x_1, x_2,…, x_n je náhodný výběr ze spojitého rozdělení pravděpodobností s distribuční funkcí F(x). Je-li n < 5 nelze použít $\chi 2$ – test.

H0: náhodná proměnná X má dané rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí F(x)

Testovací kritérium: $d_n = \max\left|F_n(x) - F(x)\right|$ (4.20)

$$\left|F_n(x) - F(x)\right| = \left|F_n(x_{(j)}) - F(x_{(j)})\right| \quad nebo \quad \left|F_n(x_{(j;1)}) - F(x_{(j)})\right| \qquad (4.21)$$

Přijmutí H0: $d_n \prec d_{n,\alpha}$¨

Výhody testu:

- nemusí být splněno, že n > 5
- test vychází z původních dat, nikoliv z údajů zařazených do tříd, nedochází ke ztrátě informací
- má větší sílu než χ2

Praktická ukázka 12: Příklad Kolmorgorova – Smirnovova testu

Na základě údajů z praktické ukázky 10 ověřme pomocí Kolmorgorova – Smirnovova testu ověřme na hladině významnosti α=0,05, zda výšky pojistných plnění mají exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

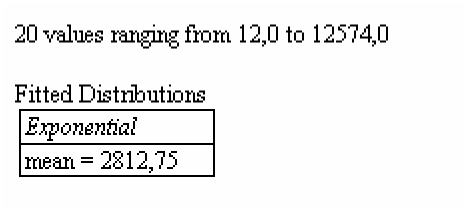
Tabulka 18: Data k praktické ukázce 12.: Výšky pojistných plnění, [zdroj vlastní]

465	1235	148	658	4895	458	456	12574	231	12
1598	2654	2014	1000	2560	4589	8452	3215	785	8256

Zkusme nyní na tento příklad použít statistického programu Stagraphic Centurion.

1. Formulujeme H0: Výšky pojistných plnění mají Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti a alternativní hypotézu H1: Výšky pojistných plnění nemají Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

2. Určeme parametr exponenciálního rozdělení: Jak můžeme vidět na Obrázku 7 odhad parametru λ exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti vyšel 2812,75.



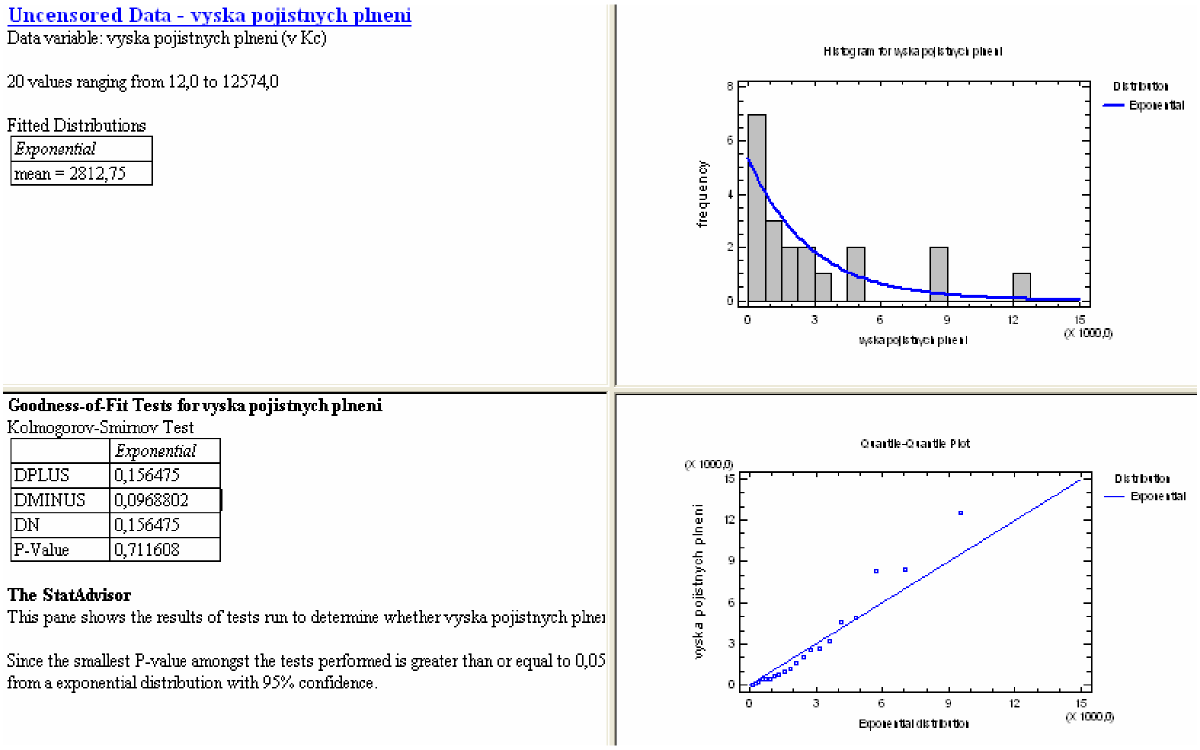
20 values ranging from 12,0 to 12574,0

Fitted Distributions

Exponential
mean = 2812,75

Obrázek 7: Odhad parametru λ k praktické ukázce 12, [zdroj vlastní]

3. Samotný výpočet



Obrázek 8: Výpočet praktické ukázky 12. v programu SC, [zdroj vlastní]

Závěrem: S jistotou 95% můžeme na základě Obrázku 8, nemůžu statistickou hypotézu H0: přijmout, neboť hodnota testovacího kritéria (DN = 0,15) je menší než P-Value (0,71). Můžeme tedy říci, že pojistná plnění nemají Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

4.5.3 Dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test

Přepokládejme, že X_1, X_2,…, X_m je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F a Y_1, Y_2,…Y_n je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí G a že oba výběry jsou nezávislé.

H0: F = G, distribuční funkce obou výběrů jsou totožné

Testovací kritérium: $D_{m,n} = \sup|F_m(x) - G_n(x)|$, (4.22)

kde $F_m(x)$ je empirická distribuční funkce prvního náhodného výběru a $G_n(x)$ je empirická distribuční funkce druhého náhodného výběru.

Přijmutí H0: $D_{m,n} \prec D_{\alpha,m,n}$

Postup testu:

- na základě náhodných výběrů vypočteme empirické distribuční funkce $F_m(x)$ a $G_n(x)$
- zjistíme hodnotu $D_{m,n}$
- zjistíme hodnotu $D_{\alpha,m,n}$ z tabulek kritických hodnot dvouvýběrového Kolmogorova – Smirnovova testu
- přijmeme, zamítneme H0:

Pro velké náhodné výběry, kdy m + n > 35 postupujeme na základě Smirnovovy věty.

Dvouvýběrový K-S test může v pojišťovnictví sloužit jen v případě, chce-li si někdo ověřit dva soubory, odlišené buď časově nebo místně. Srovnání dvou poboček – zda pojistná plnění v jedné pobočce mají stejné rozdělení pravděpodobnosti jako pojistná plnění ve druhé pobočce.

Zkusme nyní ukázat možné využití testu v praxi pojišťovny.

Praktická ukázka 13: Dvouvýběrový K-S test

Na základě údajů z Tabulky 19 zkume ověřit, že pojistná plnění v pobočce A mají stejné rozdělení pravděpodobnosti jako pojistná plnění v pobočce B. Využijme k ověření opět statistický program Stagraphics Centurion.

Tabulka 19: Údaje k praktické ukázce 13, [zdroj vlastní]

Pobočka A	465	1235	148	658	4895	456	458	12574	231	12
	1598	2654	2014	1000	2560	4589	8452	3215	785	8256
Pobočka B	1287	248	3489	4215	876	564	11679	345	5698	4139
	7456	8341	1007	24	785	6709	860	10034	345	7650

1. Formulujeme H0: Výšky pojistných plnění pobočky A mají rozdělení pravděpodobnosti jako výšky pojistných plnění pobočky B a alternativní hypotézu H1: Výšky pojistných plnění pobočky A a B nemají shodná rozdělení pravděpodobnosti.

2. Určení základních charakteristik obou výběrů: Jak můžeme vidět na Obrázku 9 oba náhodné výběry mají shodný počet, 20 pojistných plnění. Dále však můžeme vidět, že se jejich charakteristiky liší. Například průměrné plnění v pobočce B je cca. o 1.000 Kč vyšší než v pobočce B.

Summary Statistics

	vyska PP pobočka A	*vyska PP pobočka B*
Count	20	20
Average	2812,75	3787,55
Standard deviation	3397,52	3726,27
Coeff. of variation	120,79%	98,3821%
Minimum	12,0	24,0
Maximum	12574,0	11679,0
Range	12562,0	11655,0
Stnd. skewness	3,15162	1,3245
Stnd. kurtosis	2,36329	-0,702327

Obrázek 9: Základní charakteristiky k praktické ukázce 13, [zdroj vlastní]

Na základě vypočítaných hodnot koeficientů šikmosti a špičatosti (na základě jejich rozdílnosti) můžeme předpokládat, že výběry nemají shodné rozdělení pravděpodobnosti. Zkusme si nyní tento předpoklad ověřit.

Kolmogorov-Smirnov Test
Estimated overall statistic DN = 0,25
Two-sided large sample K-S statistic = 0,790569
Approximate P value = 0,55956

Obrázek 10: Výpočet praktické ukázky 13, [zdroj vlastní]

Na Obrázku 10 jasně vidíme, že na základě K-S testu musíme H0 zamítnout, neboť testovací kritérium DM s hodnotou 0,25 je nižší než P Value s hodnotou 0,55956.

Závěrem můžeme říci, že náhodné výběry nemají shodná rozdělení pravděpodobnosti.

4.5.4 Další testy shody

Tyto testy shody neuvádí žádná dostupná literatura. Tyto testy využívá statistický program Stagraphics Centurion.

1. Kuiper – V
   - tento test vychází z Kolmogorova testu
   - testovací kritérium V = $D^+ + D^-$

2. Cramer – Von Mises W^2
   - tento statistický test souvisí s empirickým a přizpůsobovaným rozdělením c.d.f.´s
   - tvar testovacího kritéria $W^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{12n}$ (4.23)

3. Watson U^2
   – tento test je modifikací předchozího W^2 testu
   – využívá se pro data opakující se v cyklech
   – tvar testovacího kritéria $U^2 = W^2 - n(\bar{z} - 0{,}5)^2$ (4.24)

4. Anderson – Darling A^2
   - Anderson – Darling test je počítán jako vážená míra mezi empirickým a přizpůsobovaným c.d.f.´s rozdělením
   - tvar testovacího kritéria $A^2 = -n - \frac{\sum_{i=1}^{n}((2i-1)\ln(z_{(i)}) + (2n+1-2i)\ln(1-z_{(i)}))}{n}$

(4.25)

4.5.5 Testy sloužící k ověření normálního rozdělení

1. Testy založené na šikmosti a špičatosti (Jarque – Berra)
2. Shapiro – Wilkův test normality
3. D´Agostinův test

5 PRAKTICKÁ UKÁZKA MODELOVÁNÍ ŠKOD POMOCÍ STATISTICKÉHO PROGRAMU STAGRAPHICS CENTURION XV.

Modelování výšky pojistných škod v praktické ukázce modelování ve statistickém programu Stagraphics Centurion XV.

Tabulka 20: Výšky individuálních škod, [13]

501	2796	5674	10217	14533	22853	31196	49763	93375	648748
687	2916	6122	10428	14657	23754	32536	54977	94310	
935	3173	6950	11248	15189	25730	36171	57487	104030	
1012	3464	7168	12028	16525	25748	39617	59145	117160	
1147	3618	7254	12421	17450	26606	39854	61038	123075	
1557	4000	7543	12456	18900	26621	40867	64874	135804	
1758	4217	8450	12657	19384	27201	41155	67488	165259	
1887	4559	9123	13334	19543	27344	43237	76147	189872	
2115	4720	9253	13789	20414	28606	46759	82348	285750	
2251	5185	9324	14014	20987	30950	46879	84714	578486	

V tabulce 20 vidíme 91 individuálních škod při určitém typu neživotního pojištění. Pomocí statistického programu nejprve určíme základní vlastnosti tohoto náhodného výběru.

5.1 Základní charakteristiky náhodné výběru individuálních škod

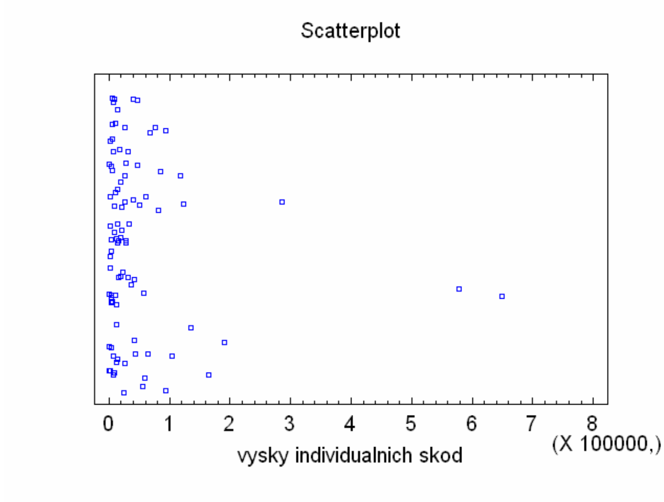
Summary Statistics for vysky individualnich skod

Count	91
Average	47110,6
Median	18900,0
Variance	9,41759E9
Standard deviation	97044,3
Minimum	501,0
Maximum	648748,
Range	648247,
Stnd. skewness	18,629
Stnd. kurtosis	49,9897

Obrázek 11: Základní charakteristiky individuálních škod, [zdroj vlastní]

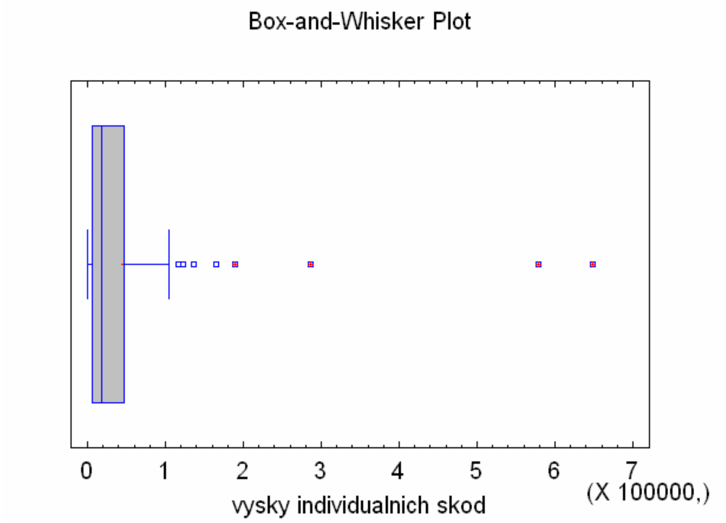
Na obrázku 11 vidíme základní statistické charakteristiky náhodného výběru individuálních škod.

- počet individuálních škod je 91 (91 statistických záznamů)
- průměrná výše škody je 47.110,6 Kč
- minimální výše škody je 501 Kč a maximální výše je 648.748 Kč
- celková suma, kterou pojištění nárokují je 4.287.067 Kč
- rozptyl je roven 9,41 a směrodatná odchylka 97044,3
- koeficient šikmosti je 18,629 a koeficient špičatosti 49,9897 (v rámci předpokládaného normálního rozdělení pravděpodobnosti)



Obrázek 12: Bodový graf, [zdroj vlastní]

Na obrázku 12 (bodový graf) vidíme rozmístění jednotlivých individuálních škod. Z obrázku vyplývá, že nejvíce škod je v intervalu <0, 100.000>, dále vidíme, že mezi škodami jsou dvě škody, které bychom mohly definovat jako odlehlé škody, tyto škody se nacházejí v intervalu <500.000, 700.000>. Na následujícím obrázku 13 (krabicový graf) vidíme tyto škody zesumarizované do skupin (do krabic). Vidíme totéž co na předchozím obrázku, ale grafické znázornění je pro uživatele jednodušší.



Obrázek 13: Krabicový graf, [zdroj vlastní]

Na dalším výstupu z programu Statgraphics vidíme rozdělení základního souboru 91 individuálních pojistných škod do 20 intervalů. Kde největší zastoupení má interval jehož hodnoty se nacházejí mezi 500 Kč a 3725 Kč (15 škod) a škody přesahující částku 65.000 (také 15 škod)

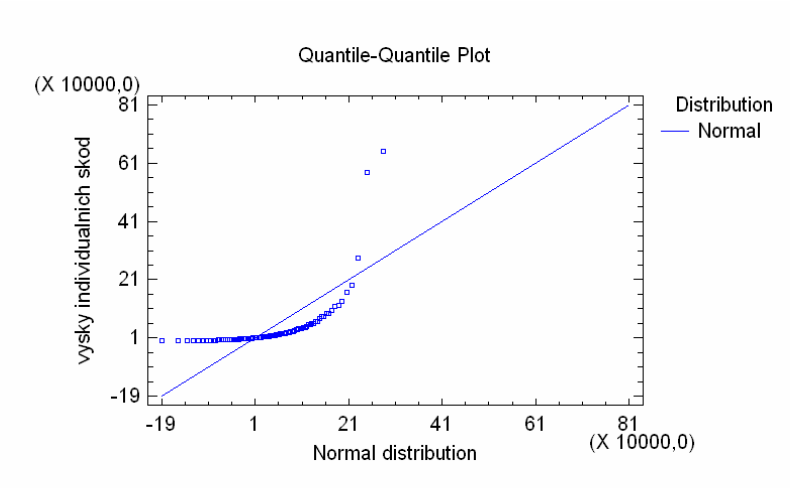
Frequency Tabulation for vysky individualnich skod

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency
	at or below	500,0		0
1	500,0	3725,0	2112,5	15
2	3725,0	6950,0	5337,5	8
3	6950,0	10175,0	8562,5	7
4	10175,0	13400,0	11787,5	8
5	13400,0	16625,0	15012,5	6
6	16625,0	19850,0	18237,5	4
7	19850,0	23075,0	21462,5	3
8	23075,0	26300,0	24687,5	3
9	26300,0	29525,0	27912,5	5
10	29525,0	32750,0	31137,5	3
11	32750,0	35975,0	34362,5	0
12	35975,0	39200,0	37587,5	1
13	39200,0	42425,0	40812,5	4
14	42425,0	45650,0	44037,5	1
15	45650,0	48875,0	47262,5	2
16	48875,0	52100,0	50487,5	1
17	52100,0	55325,0	53712,5	1
18	55325,0	58550,0	56937,5	1
19	58550,0	61775,0	60162,5	2
20	61775,0	65000,0	63387,5	1
	above	65000,0		15

Obrázek 14: Rozdělení základního souboru do 20 intervalů, [zdroj vlastní]

5.2 Rozdělení pravděpodobnosti

Statistický program STATGRAPHICS nabízí 45 různých rozdělení pravděpodobností, od známějších až po méně známé, jako například Maxwellovo nebo Noncentral f rozdělení. V modelovém příkladu se soustřeďuji na výběr takových rozdělení pravděpodobností, které se běžně využívají v pojišťovnictví.

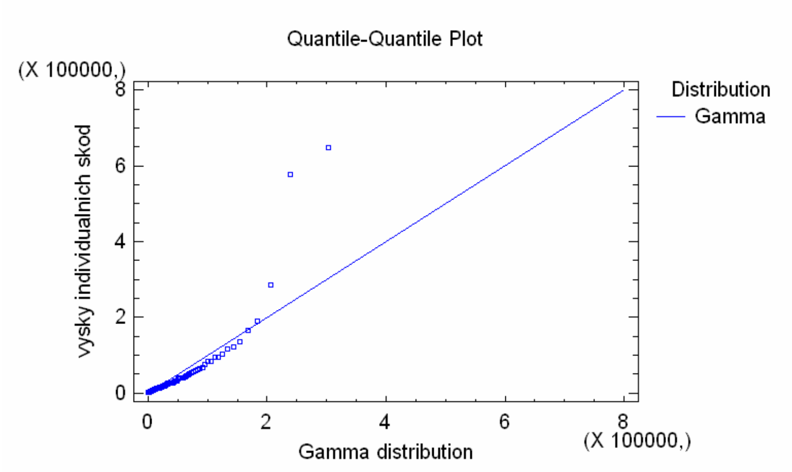


Obrázek 15: Vyhodnocení normálního rozdělení podle Q- Q grafu, [zdroj vlastní]

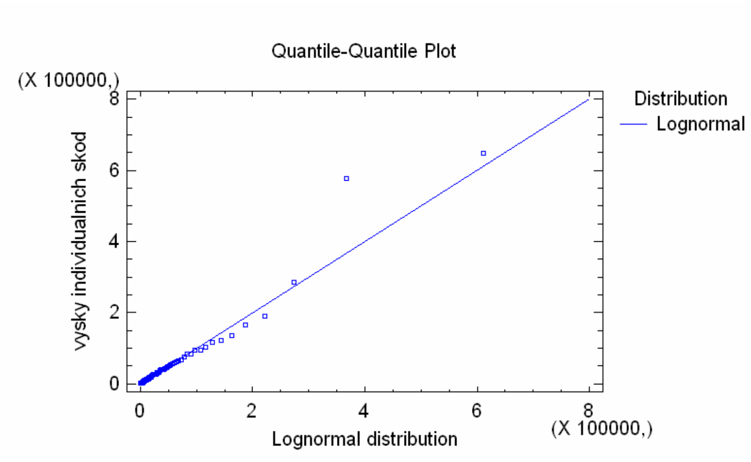
Q-Q graf: pokud body leží na zobrazené přímce, lze data považovat za výběr z daného (v našem případě normální) rozdělení pravděpodobnosti. Pokud se body od přímky vzdalují, nebo ji nekopírují, jedná se o jiné rozdělení pravděpodobnosti.

Z obrázku 15 jasně vidíme, že individuální škody nemají normální rozdělení pravděpodobnosti a musíme využít jiný typ rozdělení. Pokusme se teda najít takové rozdělení pravděpodobnosti, které bude co nejpřesněji kopírovat danou přímku.

Dle obrázku 16 vidíme, že individuální škody by mohly mít Gamma rozdělení pravděpodobnosti, neboť body leží na přímce až na malé výkyvy. V podstatě stejně jako graf Gamma rozdělení vypadá i graf Weibullova rozdělení pravděpodobnosti. Z toho vyplývá, že bychom měli najít ještě jiné rozdělení, které přesněji kopíruje náš náhodný výběr.



Obrázek 16: Vyhodnocení gama rozdělení podle Q-Q grafu, [zdroj vlastní]



Obrázek 17: Vyhodnocení lognormální rozdělení podle Q-Q grafu, [zdroj vlastní]

Nejlépe Q-Q graf kopíruje Lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Toto rozdělení si ověříme pomocí testů shody.

5.3 Testování náhodného výběru pomocí testů dobré shody

Statistický balík STATGRAPHICS nabízí 7 testů dobré shody (všechny jsou definované v předchozí kapitole).

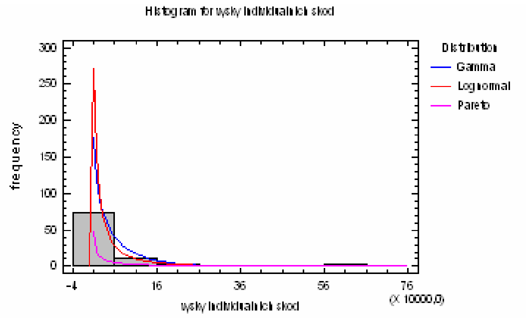
V nabídce Goodness-of-Fit Tests (testy dobré shody) pomocí $\chi 2$ testu dobré shody nebo K-S testu můžeme ověřit, zda zvolené rozdělení pravděpodobnosti dobře modeluje histogram empirických údajů. To znamená, zda vybrané rozdělení pravděpodobnosti, můžeme na hladině významnosti α buď přijmout nebo zamítnout.

5.3.1 χ2 test dobré shody

91 values ranging from 501,0 to 648748,

Fitted Distributions

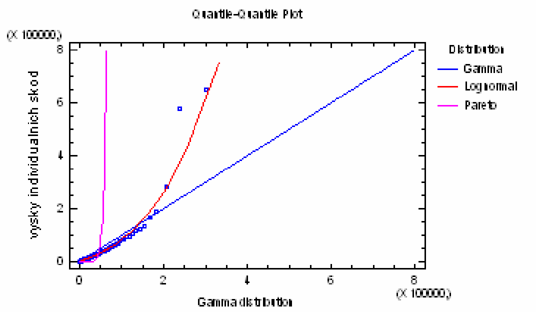
Gamma	*Lognormal*	*Pareto*
shape = 0,60522	mean = 50169,9	shape = 0,102663
scale = 0,0000128468	standard deviation = 139352,	
	Log scale: mean = 9,74064	
	Log scale: std. dev. = 1,47141	



Goodness-of-Fit Tests for vysky individualnich skod

Chi-Squared Test

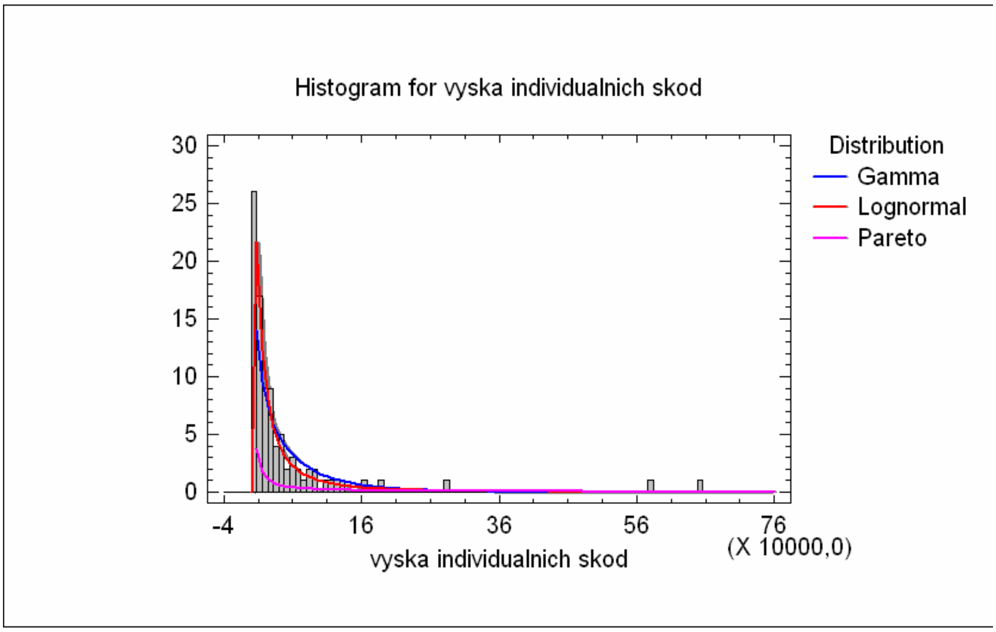
	Gamma	*Lognormal*	*Pareto*
Chi-Squared	16,4176	10,8577	396,418
D.f.	20	20	21
P-Value	0,690404	0,94983	0,0



Obrázek 18: Modelování χ2 testu dobré shody, [zdroj vlastní]

Na obrázku 18 (levý horní roh) vidíme odhady parametrů vybraných rozdělení pravděpodobnosti, tyto parametry považujeme za parametry odhadnuté metodou maximální věrohodnosti.

Na obrázku 18 (v pravé horní části) jasně vidíme, jak jednotlivá rozdělení modelují histogram. Podrobněji viz Obrázek 19 na následující straně



Obrázek 19: Histogram výšky individuálních škod, [zdroj vlastní]

Hodnota P-Value je nastavena na hodnotu 0,5 pokud hodnota P-Value u daného rozdělení pravděpodobnosti nepřekročí tuto hodnotu můžeme jednoznačně říci, že dané rozdělení není rozdělením základního souboru. Čím více hodnota P-Value daného rozdělení překračuje hodnotu 0,5, a blíží se hodnotě 1, tím více se toto rozdělení pravděpodobnosti blíží skutečnému rozdělení.

Dle χ2 testu dobré shody vychází jako nejlepší rozdělení pravděpodobnosti individuálních škod lognormální rozdělení pravděpodobnosti, jehož P-Value je 0,94983, což je nejvyšší hodnota ze zvolených rozdělení.

5.3.2 χ2 test dobré shody pro lognormální rozdělení pravděpodobnosti

H0 … jedná se o náhodný výběr z lognormálního rozdělení

A H … nejedná se o náhodný výběr z lognormálního rozdělení

}1 values ranging from 501,0 to 648748,

?itted Distributions

Lognormal
mean = 50169,9
standard deviation = 139352,
Log scale: mean = 9,74064
Log scale: std. dev. = 1,47141

Obrázek 20: základní charakteristiky lognormálního rozdělení, [zdroj vlastní]

Goodness-of-Fit Tests for vysky individualnich skod

Chi-Squared Test

	Lower Limit	*Upper Limit*	*Observed Frequency*	*Expected Frequency*	*Chi-Squared*
at or below		1369,3	5	3,96	0,28
	1369,3	2298,25	5	3,96	0,28
	2298,25	3249,55	3	3,96	0,23
	3249,55	4269,51	4	3,96	0,00
	4269,51	5385,23	3	3,96	0,23
	5385,23	6620,68	2	3,96	0,97
	6620,68	8001,38	4	3,96	0,00
	8001,38	9556,98	4	3,96	0,00
	9556,98	11323,6	3	3,96	0,23
	11323,6	13346,6	5	3,96	0,28
	13346,6	15684,4	5	3,96	0,28
	15684,4	18413,9	2	3,96	0,97
	18413,9	21639,3	5	3,96	0,28
	21639,3	25505,2	2	3,96	0,97
	25505,2	30219,9	7	3,96	2,34
	30219,9	36095,2	3	3,96	0,23
	36095,2	43622,6	6	3,96	1,06
	43622,6	53630,2	3	3,96	0,23
	53630,2	67645,0	6	3,96	1,06
	67645,0	88877,3	3	3,96	0,23
	88877,3	125666,	5	3,96	0,28
	125666,	210919,	3	3,96	0,23
above	210919,		3	3,96	0,23

Chi-Squared = 10,8577 with 20 d.f. P-Value = 0,94983

Obrázek 21: $\chi 2$ test dobré shody pro lognormální rozdělení, [zdroj vlastní]

Závěr: H0 nelze na hladině významnosti 5% zamítnout, tudíž individuální škody lze považovat za náhodný výběr z lognormálního rozdělení.

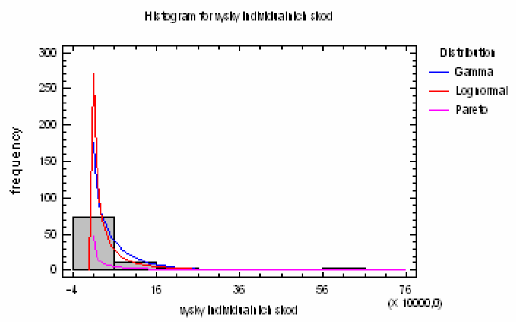
5.3.3 Kolmorgorovův – Smirnovův test

Ověřme si nyní výsledky $\chi 2$ testu dobré shody pomocí dalšího testu K-S testu, který by měl potvrdit výsledky předešlého testu.

91 values ranging from 501,0 to 648748,

Fitted Distributions

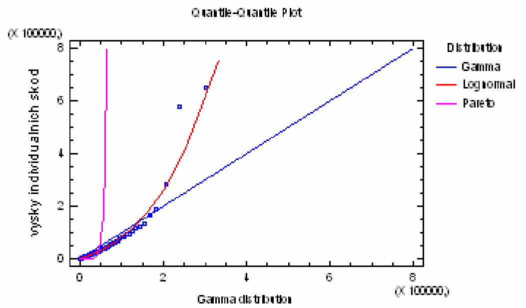
Gamma	*Lognormal*	*Pareto*
shape = 0,60522	mean = 50169,9	shape = 0,102663
scale = 0,0000128468	standard deviation = 139352,	
	Log scale: mean = 9,74064	
	Log scale: std. dev. = 1,47141	



Goodness-of-Fit Tests for vysky individualnich skod

Kolmogorov-Smirnov Test

	Gamma	*Lognormal*	*Pareto*
DPLUS	0,114383	0,0251474	0,254177
DMINUS	0,054649	0,0444999	0,482562
DN	0,114383	0,0444999	0,482562
P-Value	0,184953	0,99372	0,0



Obrázek 22: Modelování K-S testu dobré shody, [zdroj vlastní]

I v tomto případě můžeme za nejlepší model rozdělení individuálních škod považovat lognormální rozdělení pravděpodobnosti, jehož P-Value je opět nejvyšší. Tentokrát dosáhla hranice 0,9937, což je ještě více než při $\chi 2$ testu. Můžeme tedy s jistotou říci, že základní soubor má lognormální rozdělení pravděpodobnosti.

5.3.4 K-S test pro lognormální rozdělení pravděpodobnosti

91 values ranging from 501,0 to 648748,

Fitted Distributions

Lognormal
mean = 50169,9
standard deviation = 139352,
Log scale: mean = 9,74064
Log scale: std. dev. = 1,47141

Goodness-of-Fit Tests for vysky individualnich skod

Kolmogorov-Smirnov Test

	Lognormal
DPLUS	0,0251474
DMINUS	0,0444999
DN	0,0444999
P-Value	0,99372

Obrázek 23: K-S test dobré shody pro lognormální rozdělení, [zdroj vlastní]

Na základě analýzy pomocí statistického programu Stagraphic Centrurion jsme došli k závěru na základě porovnání Q-Q grafu a následnému ověření předpokladu pomocí $\chi 2$ testu dobré shody a K-S testu, že základní soubor má lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Mnou vybrané Gamma rozdělení se blíží rozdělení základního souboru, ale Paterovo rozdělení bylo vybráno úplně zcestně.

6 ZÁVĚR

Pojistná matematika a statistika je jedním z hlavních pilířů výpočtů v součastném pojišťovnictví. Na práci pojistných matematiků a statistiků (resp. aktuárů) stojí dnes nejen zisk pojišťovny, ale i samotná její existence. Nově zaváděný projekt Solventnost II v Evropské Unii postavení pojistné matematiky a statistiky v pojišťovnictví ještě více posílí. V dostupné literatuře se spíše než s pojmem Solventnost II. setkáme s pojmem teorie rizika. Posouzení, kvalifikace a řízení rizik v pojišťovně v rámci zavádění projektu Solventnost II je velmi rozsáhlá a náročná činnost. Vždy musí začít statistickým modelováním počtu a výšky individuálních pojistných plnění.

První kapitola práce se zaměřuje na pojistný trh ČR. Zabývá se především velikostí a výkonností tohoto trhu. Definují se v ní základní výkonnostní ukazatelé, z nichž je patrné že pojistný trh prosperuje rok od roku lépe. Další kapitola je zaměřena na oblast neživotního pojištění, definuje základní pojmy a rizika v neživotním pojištění a k nim poté přiřazuje možné produkty. Nedílnou součástí této kapitoly je výpočet stanovení brutto pojistného v rámci neživotního pojištění. Na základě uvedeného postupu stanovení pojistného je vypočten modelový příklad.

Další kapitola této práce je věnována už samotné pojistné matematice v rámci neživotního pojištění. V této části se setkáváme s metody teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, které se týkají především:

- pravděpodobností rozdělení výše škod
- odhady parametrů jednotlivých rozdělení
- testování shody teoretického a skutečného rozdělení pravděpodobnosti pomocí testů shody

V rámci každého bodu jsou uvedeny nejen teoretické poznatky, ale i aplikace těchto poznatků na praktických ukázkách. K modelování praktických ukázek je převážně využíván tabulkový procesor MS Excel , v závěru je využit i statistický program Stagraphics Centurion.

Poslední a nejdůležitější kapitola ukazuje možnost praktického využití statistického programu Stagraphics Centurion. V rámci tohoto programu byl vytvořen modelový příklad, modelování individuálních pojistných plnění v rámci neživotního pojištění určitého druhu pojištění. Tento příklad je shrnutím předchozí části a ukázkou možnosti využití statistických programů v rámci neživotního pojišťovnictví.

Literatura:

Seznam citované literatury

[1] Čejková V.: *Pojistný trh, 1.* vydání Praha 2002, GRADA Publishing, 120 str., ISBN 80-247-0137-5

[2] www.cap.cz – výroční zpráva 2006 [online]. 2007 [cit. 2008-02-16]. Dostupný z www: <http://www.cap.cz/Zpravy.aspx?list=DOKUMENTY_02&zobrazeni=pro%20web%20pravideln%C3%A9%20ro%C4%8Dn%C3%AD%20statistiky>.

[3] www.finance.cz [online]. 2000- [cit. 2008-02-16]. Dostupný z www: <http://www.finance.cz/pojisteni/statistika/predepsane-pojistne/2006/>.

[4] www.cnb.cz [online]. 2006. 2003-2008 [cit. 2008-02-17]. Dostupný z www: <http://www.cnb.cz/m2export/sites/www.cnb.cz/cs/dohled_fin_trh/dnft_zpravy/download/dnft_2006_cz.pdf>.

[5] http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/home [online]. 2008- , 31.1. 2008 [cit. 2008-02-24]. Dostupný www: <http://www.czso.cz/csu/2008edicniplan.nsf/publ/9404-08-za_rok_2006>.

[6] *Ekonomický růst a rozvoj pojišťovnictví jdou ruku v ruce* [online]. 2006 [cit. 2008-02-13]. Dostupný z www: <http://www.sdfs.cz/akt-19.htm>.

[7] Úrazové pojištění on-line [online]. 2008- [cit. 2008-02-26]. Dostupný z www:<https://www.on-linepojisteni.cz/ppoi/smc_PPO_internet_uds_IUDS001_ea.do?cz.cpas.event=init&reload=true&os=true>.

[8] www.finance.cz [online]. 2000-2008 [cit. 2008-02-16]. Dostupný z www: <http://www.finance.cz/pojisteni/seznamy/nabidka-ruceni/>.

[9] Ducháčková E.: *Principy pojištění a pojišťovnictví*, 2. vyd. Praha; Ekopress, 2005. 178 stran. ISBN 80-86119-92-0

[10] CIPRA, T.: *Pojistná matematika* – teorie a praxe. 1. vyd. Praha; Ekopress, 1999. 398 stran. ISBN 80-86119-17-3

[11] Pacáková V.: *Aplikovaná poistná štatistika*, 2004 Bratislava. 261 stran. ISBN 80-8078-004-8

[12] http://cs.wikipedia.org/ : Exponenciální rozdělení [online]. 2008- , 6. 3. 2008 [cit. 2008-01-14]. Dostupný z www: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Exponenci%C3%A1ln%C3%AD_rozd%C4%9Blen%C3%AD>.

[13] *Ekonomika a management*. Technická univerzita v Liberci., 3/2007 , roč. 10, příspěvek: Pacáková V.: *Modelovanie a simulácia rizík v neživotnom pojistěni*. ISSN 1212-3609

Seznam použité literatury

[1] Cipra, T.: *Finanční a pojistné vzorce*, Grada, Praha 2006

[2] Cipra, T.: *Pojistná matematika – teorie a praxe*. 1. vyd. Praha; Ekopress, 1999. 398 stran. ISBN 80-86119-17-3

[3] Cipra, T.: *Teorie rizika v pojistné matematice*, vydáno ve spolupráci s Českou pojišťovnou, s.p. 1991

[4] Čejková, V.: *Pojistný trh, 1*. vydání Praha 2002, GRADA Publishing, 120 str., ISBN 80-247-0137-5

[5] Ducháčková, E.: *Principy pojištění a pojišťovnictví*, 2. vyd. Praha; Ekopress, 2005. 178 stran. ISBN 80-86119-92-0

[6] Kaas, R - GoOVaerts, M. – Dhaene, J.- Denuit, M.: *Modern Actuarial Risk Theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers 2001. 328 stran, ISBN:1402029527

[7] Pacáková, V.: *Aplikovaná poistná štatistika*, 2004 Bratislava. 261 stran. ISBN 80-8078-004-8

[8] Strub E.: *Non-life insurance mathematics*, 1988 Springer, 136 stran. ISBN:3540187871

[9] Kubanová, J.: *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*, 2. vyd. Bratislava 2004. 249 stran. ISBN 80-85659-37-9

Použité programy

[1] Microsoft Office Excel 2003

[2] STAGRAPHICS CENTURION XV

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Seznam praktických ukázek

Přílohy:

Seznam pojišťoven působících na českém trhu

- AEGON Pojišťovna, a. s.
- AIG CZECH REPUBLIC pojišťovna, a. s.
- Allianz pojišťovna, a. s.
- ARAG - pojišťovna právní ochrany, a. s.
- Aviva životní pojišťovna, a. s.
- AXA životní pojišťovna a.s.
- Cestovní pojišťovna ADRIA Way družstvo
- CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS POJIŠŤOVNA A. S.
- Česká národní zdravotní pojišťovna, a. s.
- Česká podnikatelská pojišťovna, a. s.
- Česká pojišťovna a. s.
- Česká pojišťovna ZDRAVÍ a. s.
- ČSOB Pojišťovna, a. s., člen holdingu ČSOB
- D.A.S. pojišťovna právní ochrany, a. s.
- Euler Hermes Čescob, úvěrová pojišťovna, a. s.
- Evropská Cestovní Pojišťovna, a. s.
- Exportní garanční a pojišťovací společnost, a. s. (EGAP)
- Generali Pojišťovna a. s.
- GERLING-Konzern Všeobecná pojišťovací akciová společnost - organizační složka
- Gothaer Allgemeine Versicherung AG - organizační složka pro Českou republiku
- HALALI, všeobecná pojišťovna, a. s.
- Hasičská vzájemná pojišťovna, a. s.
- HDI Haftpflichtverband der Deutschen Industrie Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit - org. složka
- Hutnická zaměstnanecká pojišťovna
- Komerční pojišťovna, a. s.
- Kooperativa, pojišťovna, a. s.
- KRAVAG - LOGISTIK Versicherungs - Aktiengesellschaft - organizační složka pro ČR
- MAXIMA pojišťovna, a. s.
- Nationale - Nederlanden pojišťovna, a. s.

- Nationale - Nederlanden životní pojišťovna, organizační složka
- Oborová zdravotní pojišťovna zaměstnanců bank, pojišťoven a stavebnictví
- Pojišťovna CARDIF PRO VITA, a. s.
- Pojišťovna České spořitelny, a. s.
- Pojišťovna Slavia a. s.
- Pojišťovna VZP, a. s.
- PRVNÍ AMERICKO-ČESKÁ POJIŠŤOVNA, a. s. (AMCICO AIG Life)
- QBE poisťovňa, a.s., pobočka
- Revírní bratrská pokladna, zdravotní pojišťovna
- Servisní pojišťovna a. s.
- Triglav pojišťovna, a. s.
- UNIQA pojišťovna, a. s.
- VICTORIA-VOLKSBANKEN pojišťovna, a. s.
- Vitalitas pojišťovna, a. s.
- Wüstenrot, životní pojišťovna, a. s.
- Vojenská zdravotní pojišťovna ČR
- Všeobecná zdravotní pojišťovna, a. s.
- Zaměstnanecká pojišťovna Škoda
- Zdravotní pojišťovna METAL - ALIANCE
- Zdravotní pojišťovna ministerstva vnitra České republiky

Další subjekty pojistného trhu

- AIDA - Česká sekce Mezinárodního sdružení pro pojistné právo
- Atradius Credit Insurance N. V., organizační složka
- Česká asociace pojišťoven
- Česká kancelář pojistitelů
- Svaz zdravotních pojišťoven České republiky

Odvětví a skupiny pojištění

Část A

Odvětví životních pojištění

1. Pojištění pouze pro případ smrti, pojištění pouze pro případ dožití, pojištění pro případ dožití se stanoveného věku nebo dřívější smrti, pojištění spojených životů, životní pojištění s vrácením pojistného.

2. Svatební pojištění nebo pojištění prostředků na výživu dětí.

3. Důchodové pojištění.

4. Pojištění podle bodů 1 až 3 spojené s investičním fondem.

5. Kapitálové činnosti

   a) umořování kapitálu založené na pojistně matematickém výpočtu, jimiž jsou proti jednorázovým nebo periodickým platbám dohodnutým předem přijaty závazky se stanovenou dobou trvání a ve stanovené výši,

   b) správa skupinových penzijních fondů,

   c) činnosti doprovázené pojištěním zabezpečujícím zachování kapitálu nebo platbu minimálního úroku,

   d) pojištění týkající se délky lidského života, které je upraveno právními předpisy z oblasti sociálního pojištění, pokud zákon umožňuje jeho provádění pojišťovnou na její vlastní riziko.

6. Pojištění pro případ úrazu nebo nemoci, je-li doplňkem pojištění podle odvětví 1 až 5.

Část B

Odvětví neživotních pojištění

1. Úrazové pojištění

a) s jednorázovým plněním,

b) s plněním povahy náhrady škody,

c) s kombinovaným plněním,

d) cestujících.

2. Pojištění nemoci

a) s jednorázovým plněním,

b) s plněním povahy náhrady škody,

c) s kombinovaným plněním,

d) smluvní zdravotní pojištění.

3. Pojištění škod na pozemních dopravních prostředcích jiných než drážních vozidlech

a) motorových,

b) nemotorových.

4. Pojištění škod na drážních vozidlech.

5. Pojištění škod na leteckých dopravních prostředcích.

6. Pojištění škod na plavidlech

a) vnitrozemských,

b) námořních.

7. Pojištění přepravovaných věcí včetně zavazadel a jiného majetku bez ohledu na použitý dopravní prostředek.

8. Pojištění škod na majetku jiném než uvedeném v bodech 3 až 7 způsobených

a) požárem,

b) výbuchem,

c) vichřicí,

d) přírodními živly jinými než vichřicí (např. blesk, povodně, záplavy),

e) jadernou energií,

f) sesuvem nebo poklesem půdy.

9. Pojištění jiných škod na majetku jiném než uvedeném v bodech 3 až 7 vzniklých krupobitím nebo mrazem anebo jinými příčinami (např. loupeží, krádeží nebo škody způsobené lesní zvěří), nejsou-li tyto příčiny zahrnuty v odvětví č. 8, včetně pojištění škod na hospodářských zvířatech způsobených nákazou nebo jinými příčinami.

10. Pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající

a) z provozu pozemního motorového a jeho přípojného vozidla,

b) z provozu drážního vozidla,

c) z činnosti dopravce.

11. Pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající z vlastnictví nebo užití leteckého dopravního prostředku, včetně odpovědnosti dopravce.

13. Všeobecné pojištění odpovědnosti za škodu jinou než uvedenou v odvětvích č. 10 až 12,

a) odpovědnost za škodu na životním prostředí,

b) odpovědnost za škodu způsobenou jaderným zařízením,

c) odpovědnost za škodu způsobenou vadou výrobku,

d) ostatní.

14. Pojištění úvěru

a) obecná platební neschopnost,

b) vývozní úvěr,

c) splátkový úvěr,

d) hypoteční úvěr,

e) zemědělský úvěr.

15. Pojištění záruky (kauce)

a) přímé záruky,

b) nepřímé záruky.

16. Pojištění různých finančních ztrát vyplývajících

a) z výkonu povolání,

b) z nedostatečného příjmu,

c) ze špatných povětrnostních podmínek,

d) ze ztráty zisku,

e) ze stálých nákladů,

f) z nepředvídaných obchodních výdajů,

g) ze ztráty tržní hodnoty,

h) ze ztráty pravidelného zdroje příjmu,

i) z jiné nepřímé obchodní finanční ztráty,

j) z ostatních finančních ztrát.

17. Pojištění právní ochrany.

18. Pojištění pomoci osobám v nouzi během cestování nebo pobytu mimo místa svého bydliště, včetně pojištění finančních ztrát bezprostředně souvisejících s cestováním (asistenční služby).

Část C

Skupiny neživotních pojištění

a) "Pojištění úrazu a nemoci" pro odvětví č. 1 a 2,

b) "Pojištění motorových vozidel" pro odvětví č. 3, 7 a 10,

c) "Pojištění požáru a jiných majetkových škod" pro odvětví č. 8 a 9,

d) "Letecké pojištění, pojištění vnitrozemské plavby a námořní pojištění a pojištění přepravovaných věcí" pro odvětví č. 4, 5, 6, 7, 11 a 12,

e) "Pojištění odpovědnosti za škodu" pro odvětví č. 10, 11, 12 a 13,

f) "Pojištění úvěru a záruky" pro odvětví č. 14 a 15,

g) "Pojištění jiných ztrát" pro odvětví č. 16, 17 a 18.

Vygenerovaný příklad

pojistné plnění (xi)	1+ (xi/L)	ln(1+xi/L)	1/L+xi	xi/L(L+xi)
465	1,030859548	0,030393	6,43779E-05	1,98667E-06
1235	1,081960305	0,0787745	6,13374E-05	5,02723E-06
148	1,009821964	0,009774	6,57191E-05	6,45491E-07
658	1,043667919	0,0427414	6,35879E-05	2,77675E-06
4895	1,324854811	0,2813029	5,0092E-05	1,62726E-05
458	1,030394996	0,0299422	6,4407E-05	1,95765E-06
456	1,030262266	0,0298134	6,44153E-05	1,94935E-06
12574	1,834468721	0,6067549	3,61765E-05	3,01881E-05
231	1,015330227	0,0152139	6,53626E-05	1,00202E-06
12	1,000796375	0,0007961	6,63118E-05	5,28091E-08
1598	1,106050661	0,1007957	6,00014E-05	6,36319E-06
2654	1,176131699	0,1622308	5,64262E-05	9,93844E-06
2014	1,133658343	0,1254499	5,85402E-05	7,82439E-06
1000	1,066364619	0,0642553	6,22345E-05	4,13017E-06
2560	1,169893425	0,1569127	5,67271E-05	9,63756E-06
4589	1,304547237	0,265856	5,08718E-05	1,54929E-05
8452	1,560913761	0,4452714	4,25165E-05	2,38481E-05
3215	1,213362251	0,1933952	5,46948E-05	1,16698E-05
785	1,052096226	0,0507846	6,30785E-05	3,28615E-06
8256	1,547906296	0,4369032	4,28738E-05	2,34908E-05
56255		**3,1273611**	**0,001149752**	**0,00017754**

x	2812,75		α	6,35713
S2 (rozptyl)	11543111		λ	15068,27
S	3397,5153			
Variační koeficiet	1,2078981	12078,98%		
			A	6,395168
	0,0003555		B	6,476009
				-0,080841

Kvantity Chí-kvadrát rozdělení

Kvantily $\chi^2_{1-\alpha}$ rozdělení χ^2 o df stupních volnosti

$\chi^2_{1-\alpha}(df)$	α		
df	0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,63	10,83
2	5,99	9,21	13,82
3	7,81	11,34	16,27
4	9,49	13,28	18,47
5	11,07	15,09	20,51
6	12,59	16,81	22,46
7	14,07	18,48	24,32
8	15,51	20,09	26,12
9	16,92	21,67	27,88
10	18,31	23,21	29,59
11	19,68	24,73	31,26
12	21,03	26,22	32,91
13	22,36	27,69	34,53
14	23,68	29,14	36,12
15	25,00	30,58	37,70
16	26,30	32,00	39,25
17	27,59	33,41	40,79
18	28,87	34,81	42,31
19	30,14	36,19	43,82
20	31,41	37,57	45,31